

# COMPOSITIO MATHEMATICA

HANS R. HAEGI

## **Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen**

*Compositio Mathematica*, tome 8 (1951), p. 81-111

[<http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1951\\_\\_8\\_\\_81\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__8__81_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrößen

von

Hans R. Haegi

---

## Einleitung

Ist eine Operation  $\Omega$  gegeben, welche jedem ebenen Gebiet  $G$  eine reelle Zahl  $g = \Omega(G)$  zuordnet, so nennen wir  $g$  eine „Gebietsgröße“. Solche Gebietsgrößen sind etwa Fläche, Durchmesser, Länge der Berandung, transfiniter Durchmesser, Kapazität von  $G$  etc. Zwischen diesen verschiedenartigsten Größen braucht kein Zusammenhang zu bestehen, aber es liegt nahe, nach Ungleichheitsrelationen zwischen ihnen zu fragen.

Dieser Problemkreis bildet den Hauptgegenstand einer demnächst erscheinenden Abhandlung von G. Pólya und G. Szegő<sup>1)</sup>. Die Fülle der darin enthaltenen suggestiven Detailfragen, Anregungen und Vermutungen gab Anlaß zu der vorliegenden Arbeit.

Sie befaßt sich speziell mit den Beziehungen zwischen geometrischen und funktionentheoretischen Größen. Dabei ist zweierlei von Interesse: erstens das Aufsuchen von Ungleichungen zwischen den betrachteten Größen, und zweitens die Frage nach der Existenz von Extremalgebieten, für die in der Ungleichung das Gleichheitszeichen eintritt. Zur Untersuchung bieten sich daher 2 Methoden. Die erste stellt mit Hilfe von Abschätzungen direkt die Ungleichung her, wobei sich die Extremalgebiete gelegentlich nebenbei ergeben. Die zweite sucht die Extremalgebiete auf, nachdem sie deren Existenz sichergestellt hat, woraus dann umgekehrt die Ungleichung folgt. Diesen beiden Aspekten gemäß gliedert sich die Arbeit in zwei Teile.

In einem ersten Teil wird zunächst die Funktion  $r_z$  des inneren Radius untersucht. Dies bietet an sich einiges Interesse; so wird etwa der Satz bewiesen, daß  $r_z$  in konvexen, symmetrischen Gebieten sein Maximum im Symmetriepunkt und nur dort annimmt (Vermutung [1], 1.23). Außerdem aber zeigt sich nämlich,

---

<sup>1)</sup> siehe [1] im Literaturverzeichnis.

daß sich aus der Kenntnis des Charakters der stationären Stellen von  $r_z$  Abschätzungen gewinnen lassen, die zu Relationen der gesuchten Art führen. Auf diese Weise resultiert eine Ungleichung für die Größe  $\dot{r}\bar{r}F^{-1}$ , sowie Ungleichungen zwischen  $\dot{r}$  und  $\varrho$ . Hierbei zeigt sich ein enger Zusammenhang mit dem Bloch-Landau-Problem für schlichte Funktionen, woraus ein neuer Beweis für den Wert  $\pi/4$  der Bloch-Konstanten für konvexe Gebiete fließt. Die meisten in diesem Teil hergeleiteten Resultate finden sich ohne Beweis in den „Comptes rendus“ <sup>2)</sup>).

Im zweiten Teil wird die Existenz von Gebieten bewiesen, welche bei gegebenem  $\dot{r}$  und  $\bar{r}$  den Durchmesser  $s$  maximieren. Moderne Variationsmethoden (Schiffer) sowie das Symmetrisierungstheorem (Pólya-Szegő) ermöglichen es, alle diese Extremalgebiete zu bestimmen, woraus eine scharfe Ungleichung für die 3 Größen  $\dot{r}$ ,  $\bar{r}$  und  $s$  resultiert.

Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

---

<sup>2)</sup> siehe [4] im Literaturverzeichnis.

## Bezeichnungen, Definitionen

- $\zeta$  Ebene des Einheitskreises  $K$   
 $\mathfrak{R}$  Klasse der einfach zusammenhängenden Gebiete der  $z$ -Ebene mit Randkontinuum, die  $z = 0$  enthalten, nicht aber  $z = \infty$   
 $G$  Gebiet aus  $\mathfrak{R}$  (falls nichts anderes bemerkt)  
 $\overline{G}$  abgeschlossene Hülle von  $G$   
*m-Symmetrie:* Ein Gebiet  $G$  heißt *m-symmetrisch*, wenn ein Symmetriepunkt  $P$  existiert, derart, daß  $G$  durch Drehung um  $P$  um jedes Vielfache des Winkels  $2\pi/m$  mit sich selbst zur Deckung gelangt.  $m = 2$ : gewöhnliche Punktsymmetrie.  
 $\mathfrak{S}$  Klasse der einfach zusammenhängenden Gebiete der  $z$ -Ebene mit Randkontinuum, die  $z = \infty$  enthalten, nicht aber  $z = 0$   
 $\Gamma$  Gebiet aus  $\mathfrak{S}$  (falls nichts anderes bemerkt)  
 $\overline{\Gamma}$  abgeschlossene Hülle von  $\Gamma$

Sei  $a \in G$ . Die Funktion

$$f_a(\zeta) = a + r_a \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + \dots \quad r_a > 0$$

bilde das Innere von  $K$  schlicht auf  $G$  ab. Wir nennen  $f_a(\zeta)$  die in bezug auf  $a$  normierte Abbildungsfunktion von  $G$  (in Zukunft abgekürzt n.A. bez.  $a$ )

$r_a$  inneren Radius von  $G$  in bezug auf  $a$ <sup>3)</sup>

Für  $f_0(\zeta)$  schreiben wir kurz  $f(\zeta)$ .

Für ein gegebenes Gebiet ist  $r_a$  eine Funktion von  $a$ . Ist die obere Grenze von  $r_a$  in  $G$  endlich, so bezeichnen wir sie mit  $\dot{r}$ , und nennen

$\dot{r}$  inneren Radius von  $G$  schlechthin

Die Funktion

$$\varphi(\zeta) = \bar{r} \zeta + b_0 + b_1 \zeta^{-1} + b_2 \zeta^{-2} + \dots \quad \bar{r} > 0$$

bilde das Äußere von  $K$  schlicht auf  $\Gamma$  ab. Wir nennen  $\varphi(\zeta)$  die normierte Abbildungsfunktion von  $\Gamma$  (in Zukunft abgekürzt n.A.)

$\bar{r}$  äußeren Radius von  $\Gamma$ <sup>4)</sup>

<sup>3)</sup> vergl. [2], Bd. II, Seite 16/17.

<sup>4)</sup> siehe Fußnote <sup>3)</sup>.

*Paare von Normalgebieten:* Ist das Komplement  $G'$  von  $\bar{G}$  ein Gebiet  $\Gamma$  oder das Komplement  $\Gamma'$  von  $\bar{\Gamma}$  ein Gebiet  $G$ , so nennen wir  $G, \Gamma$  ein „normales Paar“ von Gebieten,  $G$  bzw.  $\Gamma$  „Normalgebiete“. Ist das Komplement von  $\bar{\Gamma}$  leer, so schreiben wir  $\Gamma'$  den inneren Radius  $\dot{r} = 0$  zu.

Für Paare von Normalgebieten sind  $\dot{r}$  und  $\bar{r}$  zugleich definiert.

- $\Sigma$  gemeinsames Randkontinuum eines normalen Paares  
 $\varrho$  „Inkreisradius“ von  $G$  = obere Grenze der Radien aller offenen Kreisscheiben, die in  $G$  Platz haben.  $\varrho$  kann  $\infty$  sein.  
 $R$  „Umkreisradius“ <sup>5)</sup> von  $G$  = untere Grenze der Radien aller abgeschlossenen Kreisscheiben, die  $\bar{G}$  bedecken. Es ist  $R > 0$ .

*Kreisbeschränktheit:* Ein Gebiet  $G$  heißt „kreisbeschränkt“, wenn sein Inkreisradius endlich ist.

$\mathfrak{R}'$  Klasse der kreisbeschränkten Gebiete aus  $\mathfrak{R}$

$\mathfrak{R}''$  Klasse der beschränkten Gebiete aus  $\mathfrak{R}$  <sup>6)</sup>

$\mathfrak{R}^*$  }  
 $\mathfrak{R}'^*$  } die entsprechenden Gebietsklassen konvexer Gebiete  
 $\mathfrak{R}''^*$  }

$F$  innere Fläche von  $G \in \mathfrak{R}''$

$L$  Länge der Randkurve von  $G$ , falls  $\Sigma$  eine rektifizierbare Kurve ist

$s$  Durchmesser von  $\Sigma$

„Kreis“ = Paar von Normalgebieten, bestehend aus dem Inneren und Äußeren eines Kreises

„Nadel“ = längs Strecke geschlitzte Vollebene

„Streifen“ = Gebiet zwischen zwei parallelen Geraden

<sup>5)</sup> Radius des „Pferchkreises“ von  $\bar{G}$ .

<sup>6)</sup> Man beachte, daß es kreisbeschränkte Gebiete gibt, die nicht beschränkt sind, ja nicht einmal einen größten eingeschriebenen Kreis besitzen, etwa das Gebiet oberhalb der Kurve

$$y = (\cos x)^{-1}, \quad -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$$

# I

## 1. Die Funktion $r_z$

Für ein gegebenes Gebiet  $G$  ist  $r_z$  eine Funktion des Aufpunktes  $z$ , von der wir kurz einige z.T. bekannte Eigenschaften herleiten.

### a) Allgemeines

Gemäß Definition ist  $r_z = |f'_z(0)|$ . Die Funktion  $w = F(z)$  bilde  $G$  so auf  $G^*$  ab, daß  $z$  in  $w$  übergeht, und es sei  $f_w^*(\zeta)$  die n.A. von  $G^*$  bez.  $w$ . Dann ist

$$r_w = |f_w^*(0)| = \left| \frac{dw}{dz} \right|_z \cdot |f'_z(0)| = \left| \frac{dw}{dz} \right|_z \cdot r_z. \quad (1)$$

was zeigt, daß das Linienelement  $|dz|/r_z$  eine konforme Invariante ist. Für den Einheitskreis ergibt sich speziell

$$\frac{|d\zeta|}{r_\zeta} = \frac{|d\zeta|}{1 - |\zeta|^2}, \quad (2)$$

also das Linienelement der hyperbolischen Geometrie. Wir haben

**Satz 1.** Das Linienelement  $\frac{|dz|}{r_z}$  ist dasjenige der hyperbolischen Geometrie des Gebietes mit der Krümmung  $-4$ .

Aus (1) und (2) zusammen folgt

$$r_z = (1 - |\zeta|^2) |f'_\zeta(\zeta)|, \quad (3)$$

eine Formel, welche den inneren Radius an der Stelle  $z$  ausdrückt mit Hilfe der n.A. bezüglich eines festen Punktes  $a$  <sup>7)</sup>. Insbesondere für  $a = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} r_z &= (1 - |\zeta|^2) |f'_\zeta(\zeta)|, & (> 0), \\ \text{wo} \quad f(\zeta) &= r_0 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

Wir können dabei  $r_z$  als Funktion von  $z$  in  $G$  oder als Funktion von  $\zeta$  in  $K$  betrachten. Wollen wir das letztere betonen, so schreiben wir  $r_\zeta$  statt  $r_z$ . Wir sprechen dann von der  $r_z$ -Fläche über  $G$  bzw. der  $r_\zeta$ -Fläche über  $K$ , welche entsteht durch vertikales Abtragen der Funktionswerte über dem Argumentspunkt  $z$ , bzw.  $\zeta$ .

<sup>7)</sup> vergl. [2], Bd. II, S. 19, Nr. 110.

Die Tatsache, daß die Krümmung der hyperbolischen Geometrie des Gebietes mit dem Linienelement  $|dz|/r_z$  gleich  $-4$  ist, drückt sich in der folgenden partiellen Differentialgleichung für  $r_z$  aus:

$$r_z^2 \cdot \Delta \log r_z + 4 = 0. \quad (4)$$

Hieraus liest man ab, daß  $\log r_z$  superharmonisch ist, folglich  $r_z$  im Innern keine Minima haben kann.

Sei  $z \in G$  und  $\varrho_z$  der Radius der größten offenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $z$ , die ganz in  $G$  liegt. Dann ist einerseits  $\varrho_z \leq r_z$ , andererseits nach dem Koebe-Bieberbach'schen Viertels-Satz  $\varrho_z \geq \frac{1}{4} \cdot r_z$ , sodaß

$$\varrho_z \leq r_z \leq 4\varrho_z. \quad (5)$$

Es wird demnach  $r_z$  gleichmäßig beliebig klein, wenn nur  $z$  nahe genug dem Rande von  $G$  liegt. (3a), (4) und (5) zusammen liefern:

**Satz 2.** *Für ein gegebenes Gebiet  $G$  ist  $r_z$  eine positive Funktion von  $z$ , welche gleichmäßig gegen Null strebt, wenn  $z$  sich einem endlichen <sup>8)</sup> Randpunkt von  $G$  nähert. Setzen wir  $z = x + iy$ , so ist  $r_z$  analytisch in  $x$  und  $y$  und besitzt im Innern von  $G$  keine Minima.*

b) *Diskussion der stationären Stellen von  $r_z$ ; Hilfssätze.*

Wir betrachten die  $r_z$ -Fläche über  $G$  und die entsprechende  $r_\zeta$ -Fläche über  $K$ .  $z = f_a(\zeta)$  bildet die Flächen eineindeutig aufeinander ab, wobei stationäre Punkte (Punkte horizontaler Tangentialebene) sich entsprechen. Offenbar bleibt dabei auch der Charakter der stationären Stellen erhalten. Wir können diese daher in  $K$  untersuchen. Sei

$$z = f_a(\zeta) = a + r_a \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + \dots$$

die n.A. bez.  $a$ .

**Hilfssatz 1.** *Notwendig und hinreichend dafür, daß  $z = a$  stationärer Punkt von  $r_z$  sei, ist die Bedingung  $a_2 = 0$ . <sup>9)</sup>*

*Beweis:* Wir entwickeln  $r_\zeta$  in eine Taylorreihe um  $\zeta = \xi + i\eta = 0$ :

$$r_\zeta = r(\xi, \eta) = (1 - |\zeta|^2) |f'(\zeta)| = r_a + \Re(2a_2 \zeta) + O(\zeta^2) \quad (6)$$

Hieraus liest man die Behauptung ab.

<sup>8)</sup> Das Beispiel der Halbebene zeigt, daß  $r_z$  bei geeigneter Annäherung an den Punkt  $z = \infty$  jedem Grenzwert inklusive  $\infty$  zustreben kann.

<sup>9)</sup> veröl. [2]. Bd. II, S. 19, Nr. 113.

Sei jetzt  $\zeta = 0$  stationärer Punkt. Dann lautet die n.A. bez. 0

$$f(\zeta) = r_0\zeta + a_3\zeta^3 + \dots,$$

und die Taylorentwicklung von  $r_\xi$

$$\text{mit } \left. \begin{aligned} r_\zeta &= r_0 + Q(\xi, \eta) + O(\zeta^3), \\ Q(\xi, \eta) &= \Re(3a_3\zeta^2) - r_0 |\zeta|^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die quadratische Form  $Q(\xi, \eta)$  kann nicht identisch verschwinden; sie ist daher allein maßgebend für den Charakter der stationären Stelle. Außerdem kann sie nicht positiv definit sein,  $r_\zeta$  daher kein Minimum haben (vergl. Satz 2). Genauer folgt

**Hilfssatz 2.** *Notwendig und hinreichend dafür, daß  $r_\zeta$  in  $\zeta = 0$  folgendes stationäres Verhalten zeigt, ist, daß in*

$$\left. \begin{aligned} f(\zeta) &= r_0\zeta + a_3\zeta^3 + \dots, \\ |a_3| &< \frac{r_0}{3} \text{ ist für relatives Maximum,} \\ |a_3| &> \frac{r_0}{3} \text{ ist für Sattelpunkt,} \\ |a_3| &= \frac{r_0}{3} \text{ ist für parabolischen Punkt,} \\ a_3 &= 0 \text{ ist für Nabelpunkt.} \end{aligned} \right\}$$

**Hilfssatz 3.** *Sei  $G$  konvex, und es existiere ein Punkt  $z_0 \in G$  wo  $r_z$  stationär ist, etwa  $z_0 = 0$ . Dann gelten für die n.A. bez. 0 folgende Abschätzungen*

$$\frac{r_0}{1 + |\zeta|^2} < |f'(\zeta)| < \frac{r_0}{1 - |\zeta|^2}, \quad 0 < |\zeta| < 1,$$

$$|f(\zeta)| > r_0 \cdot \frac{\pi}{4}, \quad |\zeta| = 1,$$

außer wenn  $f(\zeta)$  die Form hat

$$f_s(\zeta) = \frac{r_0}{2\varepsilon} \log \frac{1 + \varepsilon\zeta}{1 - \varepsilon\zeta}, \quad |\varepsilon| = 1.$$

*Beweis:* Nach Hilfssatz 1 hat die n.A. bez. 0 die Form

$$f(\zeta) = r_0\zeta + a_3\zeta^3 + \dots, \quad (a_2 = 0).$$

Notwendig und hinreichend für die Konvexität von  $G$  ist

$$\Re w \equiv \Re \left\{ \zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right\} \geq -1 \quad \text{in } |\zeta| < 1.$$



Durch Anwendung des Lindelöf'schen Prinzips auf die Halbebene  $\Re w > -1$  und  $K$  ergibt sich wegen  $a_2 = 0$  folgende Alternative: es ist

entweder  $w/w + 2 = \varepsilon \zeta^2$ , mit  $|\varepsilon| = 1$ ,

$$\text{oder} \quad \left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{2|\zeta|^2 \bar{\zeta}}{1 - |\zeta|^4} \right| < \frac{2|\zeta|}{1 - |\zeta|^4}, \quad 0 < |\zeta| < 1. \quad (8)$$

Im ersten Fall ergibt sich für  $f(\zeta)$  sofort  $f_s(\zeta)$ , im zweiten Fall folgt durch Integration der Ungleichung längs der geradlinigen Verbindung von 0 bis  $\zeta$  und anschließendem Übergang zum Realteil

$$-\log(1 + |\zeta|^2) < \log \frac{|f'(\zeta)|}{r_0} < -\log(1 - |\zeta|^2),$$

für  $0 < |\zeta| < 1$ , woraus der erste Teil der Behauptung folgt. Sei jetzt  $f(\zeta) \neq f_s(\zeta)$ , und  $C$  das Bild in  $K$  der geraden Verbindungslinie  $0\zeta$ . Dann ist

$$|f(\zeta)| = \int_0^\zeta |dz| = \int_C |f'(\zeta)| |d\zeta| \geq \int_0^{|\zeta|} |f'(\zeta)| d|\zeta| > \int_0^{|\zeta|} \frac{r_0}{1 + |\zeta|^2} d|\zeta|.$$

Da dies für alle  $0 < |\zeta| < 1$  gilt, so können wir  $|\zeta|$  gegen 1 streben lassen, woraus die zweite Behauptung folgt. Im Ausnahmefall wird die Schranke für  $\zeta = \varepsilon^{-1}i$  erreicht.

**Hilfssatz 4.** Sei  $G$  konvex, und  $r_z$  besitze einen Nabelpunkt  $z_0 \in G$ , etwa  $z_0 = 0$ . Dann gelten für die n.A. bez. 0 folgende Abschätzungen

$$r_0(1 + |\zeta|^3)^{-2/3} < |f'(\zeta)| < r_0(1 - |\zeta|^3)^{-2/3}, \quad 0 < |\zeta| < 1,$$

$$|f(\zeta)| > r_0 \frac{\sqrt{3}}{12\pi} \{ \Gamma(\frac{1}{3}) \}^3, \quad |\zeta| = 1,$$

außer wenn  $f(\zeta)$  die Form hat

$$f(\zeta) = r_0 \int_0^\zeta [1 - (et)^3]^{-2/3} dt, \quad |\varepsilon| = 1.$$

**Beweis:** Nach Hilfssatz 2 hat die n.A. bez. 0 die Form

$$f(\zeta) = r_0 \zeta + a_4 \zeta^4 + \dots, \quad (a_2 = a_3 = 0).$$

Alsdann folgen die Behauptungen genau analog wie in Hilfssatz 3.

c)  $r_z$  in speziellen Gebieten

Wir entnehmen (5), daß sich die Existenz von  $\dot{r}$  und die Endlichkeit von  $\varrho$  gegenseitig bedingen:

**Satz 3** *Ein Gebiet besitzt dann und nur dann einen (endlichen) inneren Radius  $\dot{r}$ , wenn sein Inkreisradius  $\rho$  endlich ist, d.h. wenn es kreisbeschränkt ist.*

In einem kreisbeschränkten Gebiet  $G$  existiert also entweder mindestens ein Punkt  $\dot{z}$ , wo  $r_z$  den Wert  $\dot{r}$  als Maximum annimmt (und folglich dort insbesondere stationär ist), oder es existiert eine Punktfolge  $z_n \in G$ , die gegen  $\infty$  strebt, derart, daß die Folge  $r_{z_n}$  der zugehörigen Funktionswerte von unten gegen  $\dot{r}$  konvergiert. Letzteres kann natürlich nur eintreten für Gebiete  $G$  mit  $z = \infty$  als Randpunkt, etwa für den „Halbstreifen“<sup>10)</sup>; das erste gilt insbesondere für beschränkte Gebiete. Genauereres sagt darüber

**Satz 4.** *Falls  $G$  kreisbeschränkt, konvex und kein „Streifen“ ist, so besitzt  $r_z$  in  $G$*

entweder a) *keinen stationären Punkt*

oder b) *nur einen stationären Punkt, etwa  $z_0$ . In diesem Fall ist  $r_z = \dot{r}$  für  $z = z_0$ ,  $r_z < \dot{r}$  für  $z \neq z_0$  und  $r_z < \dot{r} - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) für alle  $z \in G$  außerhalb einer kleinen Umgebung von  $z_0$ .*

*Beweis:*  $G$  sei kein „Streifen“; wir können ferner in der Alternative b)  $z_0 = 0$  annehmen. Dann ist  $f(\zeta) \neq f_s(\zeta)$ ; nach (3a) und Hilfssatz 3 gilt somit

$$r_z = |f'(\zeta)| (1 - |\zeta|^2) < r_0, \quad 0 < |\zeta| < 1.$$

1. Wäre  $a \neq 0$  ein weiterer stationärer Punkt, so fänden wir ebenso  $r_z < r_a$  für alle von  $a$  verschiedenen  $z \in G$ , also auch  $r_0 < r_a$ . Andererseits ist aber nach oben  $r_a < r_0$ : Widerspruch.
2. Wir betrachten die Falllinien der  $r_z$ -Fläche durch  $O$ . Dieselben fallen monoton im strengen Sinn (ansonst wäre ein zweiter stationärer Punkt vorhanden). Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

**Satz 5.** *Sei  $G$   $m$ -symmetrisch und konvex. Dann nimmt  $r_z$  sein Maximum im (in den) Symmetriepunkt(en) an und nur dort. Für  $m \geq 3$  handelt es sich um ein Nabelpunkt-Maximum.<sup>11)</sup>*

*Beweis:* Sei  $G$  kein „Streifen“,  $z = 0$  Symmetriepunkt. Die n.A. bez. 0 lautet

$$f(\zeta) = r_0 + a_{m+1}\zeta^{m+1} + \dots, \quad (a_2 = a_3 = \dots = a_m = 0).$$

<sup>10)</sup> vergl. Anhang, Beispiel 2.

<sup>11)</sup> Damit ist die in [1], 1.23 aufgestellte Vermutung bewiesen.

Darnach folgt der Satz aus den Hilfssätzen 1, 2 und 3 wie im Beweis von Satz 4, denn für den Streifen ist er richtig (vergleiche Anhang, Beispiel 1).

## 2. Ungleichungen für $\dot{r}$ , $\bar{r}$

### a) Zusammenstellung bekannter Resultate

Folgende Ungleichungen zwischen  $\dot{r}$ ,  $\bar{r}$  und geometrischen Größen sind bekannt<sup>12)</sup>

$$\varrho \leq \dot{r} \leq \bar{r} \leq R, \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}R \leq \bar{r} \leq \frac{1}{2}s, \quad (10)$$

$$\pi \dot{r}^2 \leq F \leq \pi \bar{r}^2, \quad (11)$$

$$2\pi \bar{r} \leq L. \quad (12)$$

Sie sind alle scharf; Gleichheit wird in (9), (11) und (12) sowie der rechten Seite von (10) nur erreicht für den „Kreis“, auf der linken Seite von (10) nur für die „Nadel“.

### b) Weitere Ungleichungen für $\dot{r}$

**Satz 6.** Sei  $G$  kreisbeschränkt und konvex. Dann ist

$$1 \leq \dot{r}/\varrho \leq 4/\pi,$$

und das Gleichheitszeichen gilt links nur für den Kreis, rechts z.B. für den „Streifen“.

**Satz 7.**  $G$  sei konvex und enthalte ein Nabelpunkt-Maximum von  $r_z$ . Dann ist

$$1 \leq \dot{r}/\varrho \leq 4\pi\sqrt{3}\{\Gamma(\frac{1}{3})\}^{-3},$$

und das Gleichheitszeichen gilt rechts nur für das gleichseitige Dreieck.

**Satz 8.** Bedeutet  $\alpha$  die Bloch-Landau-Konstante für schlichte Funktionen, so gilt für beliebige kreisbeschränkte Gebiete

$$1 \leq \dot{r}/\varrho \leq \alpha^{-1}.$$

Gleichheit wird rechts z.B. für Blochgebiete erreicht<sup>13)</sup>.

Die linken Seiten aller Ungleichungen folgen aus (5). Wir

<sup>12)</sup> Die hier zu Systemen zusammengezogenen Ungleichungen müssen in ihren Teilen sinngemäß auf diejenigen Gebietsklassen bezogen werden, für die die auftretenden Größen definiert sind. So ist die mittlere Ungleichung von (9) nur für Paare von Normalgebieten sinnvoll, während der linke Teil für alle kreisbeschränkten Gebiete gilt etc. Vergl. [2], Bd. II, S. 21 ff., Nrn. 122—27, 140/41, und [1], 1.21, Nr. 12 und 31.

<sup>13)</sup> vergl. [5].

zeigen sodann zunächst, daß das Bestimmen des Maximums der Größe  $\dot{r}/\varrho$  aufs engste mit dem Bloch-Landau-Problem zusammenhängt, woraus sich die Sätze 6 und 8 ergeben. Hierauf beweisen wir die Sätze 6 und 7 direkt, was uns umgekehrt einen neuen Beweis für den schon von Szegö<sup>14)</sup> gefundenen Wert  $\frac{1}{4}\pi$  der „konvexen“ Bloch-Konstanten liefert.

*Das Bloch-Landau-Problem für schlichte Funktionen*<sup>15)</sup>.

Sei  $\mathfrak{F}$  die Klasse der in  $|\zeta| < 1$  regulären, schlichten Funktionen der Form

$$f(\zeta) = \zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \dots,$$

$\mathfrak{R}_0$  die Klasse der zugehörigen Bildgebiete von  $K$  (also die Unterklasse der Gebiete  $G \in \mathfrak{R}$ , für die  $r_0 = 1$  ist). Wir können dann die Bloch-Landau'sche Konstante  $\alpha$  erklären durch

$$\text{Definition:} \quad \alpha = \inf_{G \in \mathfrak{R}_0} \varrho,$$

Nun hat R. M. Robinson bewiesen<sup>13)</sup>: es gibt Funktionen  $B(\zeta) \in \mathfrak{F}$  („Blochfunktionen“), für deren zugehörige Gebiete  $B \in \mathfrak{R}_0$  („Blochgebiete“)  $\varrho = \alpha$  ist; d.h. das Extremalproblem, unter allen Gebieten  $G \in \mathfrak{R}_0$  diejenigen zu suchen, welche  $\varrho$  minimieren, besitzt eine Lösung; die Extremalgebiete sind Blochgebiete, und es ist

$$\text{Min } \varrho = \alpha, \\ G \in \mathfrak{R}_0$$

Hierbei können wir die nicht kreisbeschränkten Gebiete  $G \in \mathfrak{R}_0$  ausser acht lassen. Befreien wir uns ferner von der unwesentlichen Normierung  $r_0 = 1$ , so folgt

$$\text{Min } \varrho/r_0 = \alpha, \quad (13) \\ G \in \mathfrak{R}'$$

und das Minimum wird erreicht für jedes zu einem Blochgebiet ähnliche Gebiet  $B'$ . Bei einem solchen Extremalgebiet ist außerdem  $r_0 = \dot{r}$ . Denn andernfalls gäbe es einen Punkt  $a \in B'$  mit  $r_a > r_0$ , sodaß eine Translation von  $B'$ , welche  $a$  nach  $O$  überführt, ein Gebiet  $G \in \mathfrak{R}'$  mit  $\varrho/r_0 < \alpha$  liefern würde, was nicht angeht<sup>16)</sup>. Die gleiche Überlegung zeigt, daß allgemein in (13)  $r_0$  durch  $r$  ersetzt werden kann, sodaß auch

$$\text{Min } \varrho/\dot{r} = \alpha, \quad (14) \\ G \in \mathfrak{R}'$$

<sup>14)</sup> [6].

<sup>15)</sup> vergl. dazu [7].

<sup>16)</sup> Hieraus geht nebenbei hervor, daß für eine Blochfunktion  $a_2 = 0$ ,  $|a_3| \leq \frac{1}{4}$  sein muss (Hilfssätze 1 und 2).

Betrachten wir statt  $\mathfrak{F}$  die Unterklasse  $\mathfrak{F}^*$  der konvexen Funktionen aus  $\mathfrak{F}$  und deren Bildgebiete  $G \in \mathfrak{R}_0^*$ , so wird durch dieselbe Definition die „konvexe Bloch-Landau-Konstante“  $\alpha^*$  erklärt. Es ist leicht zu sehen, daß sich Robinson's Existenzsatz samt Beweis, sowie alle oben angestellten Betrachtungen wörtlich übertragen lassen; es ist also

$$\begin{aligned} \text{Min } \varrho/r_0 &= \alpha^*, \\ G \in \mathfrak{R}'^* \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \text{Min } \varrho/\dot{r} &= \alpha^*, \\ G \in \mathfrak{R}'^* \end{aligned} \quad (14a)$$

und das Minimum wird geliefert durch konvexen Bloch-funktionen  $B^*(\zeta)$  entsprechende Blochgebiete  $B^*$  und die dazu ähnlichen Gebiete  $B'^*$ . Bei (14) und (14a) ist aber zu beachten, daß die Gebiete  $B'$  bzw.  $B'^*$  nicht mehr notwendigerweise die einzigen minimierenden Gebiete des so (Ersetzen von  $r_0$  durch  $\dot{r}$ ) modifizierten Extremalproblems sind. Als solche sind vielmehr jetzt auch Gebiete von der in Satz 4a erwähnten Art, bzw. deren nicht konvexe Analoga, denkbar — in der Tat tritt dies im konvexen Fall beim „Halbstreifen“ auch ein<sup>17)</sup>. Für den Wert von  $\alpha$  bzw.  $\alpha^*$  ist dies indes irrelevant.

Da Szegő<sup>18)</sup> bewiesen hat, daß  $\alpha^* = \pi/4$ , wobei der „Streifen“ das einzige Extremalgebiet ist, so folgen aus (14a) und (14) bzw. die Sätze 6 und 8.

#### *Zweiter Beweis von Satz 6*

Das Bisherige befähigt uns zu einem sehr kurzen Beweis des Satzes von Szegő, woraus dann wie oben Satz 6 folgt.

#### **Satz 9.** (Satz von Szegő)

*Das einzige konvexe Blochgebiet ist der „Streifen“ der Breite  $\frac{1}{2}\pi$ ; insbesondere ist also  $\alpha^* = \frac{1}{4}\pi$ .*

*Beweis:* Für ein Blochgebiet ist  $r_0 = \dot{r} = 1$ , d.h.  $r_z$  in  $z_0 = 0$  insbesondere stationär. Die n.A. bez. 0,  $f(\zeta)$ , eines jeden in Betracht fallenden Gebietes erfüllt daher die Voraussetzungen von Hilfsatz 3, woraus wegen  $\varrho \geq \text{Min}_{|\zeta|=1} |f(\zeta)|$  folgt  $\varrho > \frac{1}{4}\pi$ , außer wenn  $f(\zeta) = f_s(\zeta)$ , und das ist die n.A. des „Streifens“ der Breite  $\frac{1}{2}\pi$ . Hieraus folgt der Satz unmittelbar.

<sup>17)</sup> vergl. Anhang, Beispiel 2.

<sup>18)</sup> [6].

*Beweis von Satz 7*

Für alle in Betracht fallenden Gebiete kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $\dot{r} = r_0$  angenommen werden. Alsdann folgt die Behauptung unter Heranziehung von Hilfssatz 4 genau gleich wie im Beweis von Satz 9.

**Satz 10.** *Für konvexe,  $m$ -symmetrische Gebiete gilt*

$$1 \leq \dot{r}/\varrho \leq 2m\Gamma(2/m)[\Gamma(1/m)]^{-2}, \quad m \geq 2.$$

*Das Gleichheitszeichen gilt rechts bei  $m = 2$  nur für den „Streifen“, bei  $m \geq 3$  nur für die regulären  $m$ -Ecke.*

*Beweis:* Sei  $z = 0$  Symmetriepunkt. Die n.A. bez. 0 lautet

$$f(\zeta) = r_0\zeta + a_{m+1}\zeta^{m+1} + \dots, \quad (a_2 = a_3 = \dots = a_m = 0).$$

Hieraus gewinnt man, analog wie in Hilfssatz 3 ( $m = 2$ ) und Hilfssatz 4 ( $m = 3$ ) für alle  $m > 3$  Abschätzungen für  $|f'(\zeta)|$  und  $|f(e^{i\varphi})|$ ; nach Satz 5 ist ferner  $\dot{r} = r_0$ . Hieraus folgt die Behauptung in der Schlußweise des Beweises von Satz 9.

c) *Die Größe  $\lambda = \pi \dot{r} \bar{r} F^{-1}$*

Der in [1], 1.23 erwähnte merkwürdige Zusammenhang zwischen  $r_0$ ,  $\bar{r}$  und  $F$  bei Rhomben und regulären Polygonen legt es nahe, etwas allgemeiner die Größe  $\lambda = \pi \dot{r} \bar{r} F^{-1}$  für beliebige Paare von Normalgebieten  $G, \Gamma$  zu betrachten.  $\lambda$  ist dimensionslos und also nur noch eine Funktion der Gestalt von  $G$ . Zunächst zeigen die Beispiele 5 (Anhang), daß  $\lambda$  sowohl beliebig groß als auch beliebig klein werden kann. Beschränken wir uns aber auf konvexe Gebiete  $G$ , so folgt aus dem „inclusion-lemma“<sup>19)</sup> und der Tatsache, daß  $\lambda$  für Rechtecke nach unten und oben beschränkt ist<sup>20)</sup>, daß es zwei Zahlen  $k$  und  $k'$  gibt, derart, daß

$$0 < k < \lambda < k' < \infty$$

gilt, und es stellt sich die Frage nach den besten Werten von  $k$  und  $k'$ . Wir zeigen, daß  $k > \pi/8$ ,  $k' < 4/\pi$  ist, d.h. den

**Satz 11.** *Sei  $G$  beschränkt und konvex. Dann ist*

$$\pi/8 < \lambda < 4/\pi.$$

*Die Schranken sind nicht scharf.*

*Beweis:* Wir machen Gebrauch von einem geometrischen Lemma, das wir ohne Beweis anführen:

<sup>19)</sup> [1], 5.10, Lemma II und dortige Schlußweise.

<sup>20)</sup> Anhang, Beispiel 3.

*Lemma: Für ein beschränktes, konvexes Gebiet ist <sup>21)</sup>*

$$\frac{1}{2}\varrho L \leq F < 4\varrho R.$$

*Links wird Gleichheit für des Kreis sowie für jedes einem Kreise umschriebene Polygon erreicht, während die rechte Schranke durch schmale Rechtecke beliebig genau approximiert wird.*

Weiter ist nach Satz 6

$$\varrho \leq \dot{r} < 4\varrho/\pi^{22})$$

und nach (10), (12)

$$\pi R \leq 2\pi\bar{r} \leq L.$$

Durch Kombination folgt die behauptete Ungleichung; diese kann nicht scharf sein, da die obenstehenden 3 Ungleichungen nicht simultan scharf sind.

Es ist zu vermuten, daß die besten Werte für  $k$  und  $k'$  bzw.  $\frac{1}{2}$  und 1 sind, genauer, daß

$$\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$$

ist. Die untere Schranke wird hier für schmale Rechtecke beliebig genau approximiert <sup>23)</sup>; über die obere Schranke macht der folgende Satz eine Aussage

**Satz 12.** *Für Dreiecke, Rhomben, reguläre Polygone und Kreise ist  $\lambda = 1$ .*

*Beweis:* Für den Kreis ist die Aussage trivial. Für Rhomben und reguläre Polygone ist sie wegen Satz 5 mit den in [1], 1. 23 gemachten Bemerkungen äquivalent. Für Dreiecke finden wir die Relation durch explizite Berechnung von  $\dot{r}$  und  $\bar{r}$ , es ergibt sich

$$\dot{r} = \bar{R} \cdot 4\pi \prod_{\nu=1}^3 \frac{[\alpha_{\nu}^{a_{\nu}} (1 - \alpha_{\nu})^{a_{\nu}-1}]^{1/2}}{\Gamma(\alpha_{\nu})} \quad (15)$$

$$\bar{r} = \bar{R} \cdot \frac{1}{2}\pi \prod_{\nu=1}^3 \frac{[\alpha_{\nu}^{a_{\nu}} (1 - \alpha_{\nu})^{a_{\nu}-1}]^{-1/2}}{\Gamma(1 - \alpha_{\nu})} \quad (16)$$

wobei  $\bar{R}$  <sup>25)</sup> der Umkreisradius,  $\alpha_{\nu}\pi$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ) die Winkel des Dreiecks sind. Hieraus folgt die Behauptung.

<sup>21)</sup> Die linke Seite ist trivial, die rechte meines Wissens neu; etwas symmetrischer läßt sich auch zeigen:  $2\varrho R < F < 4\varrho R$ , wo beide Schranken scharf sind.

<sup>22)</sup>  $<$  anstatt  $\leq$  deshalb, weil, wie aus dem Beweis hervorgeht, das Gleichheitszeichen nur für unbeschränkte Gebiete gelten kann.

<sup>23)</sup> Anhang, Beispiel 3.

<sup>24)</sup> Dieses Resultat findet sich implizit schon bei Szegö [6], S. 44.

<sup>25)</sup> Im Gegensatz zu  $R$ .

## II

## 1. Einleitung

Die Grundidee der nachstehend zur Anwendung kommenden Methode ist die folgende:

Es möge aus allgemeinen Betrachtungen hervorgehen, daß zwischen gewissen Gebietsgrößen ( $\dot{r}$ ,  $\bar{r}$ ,  $\varrho$ ,  $R$ ,  $L$  usw.) Ungleichheitsrelationen bestehen müssen (so wie etwa das „inclusion lemma“ die Existenz von Schranken für  $\lambda$  bei konvexen Gebieten sicherstellt). Es gelingt dann oft, die Existenz von Extremalgebieten zu beweisen, für welche die Grenzen der Ungleichung erreicht werden, und Gleichheit herrscht. Damit wird das Aufsuchen der scharfen Ungleichung zu einem Extremalproblem, das sich mit Variationsmethoden systematisch behandeln läßt. Ist einmal das Extremalgebiet gefunden, so ergibt sich daraus die Gleichheitsrelation zwischen den zugehörigen Gebietsgrößen und damit die Ungleichung.

Die Verwendung von Variationsmethoden in Problemen konformer Abbildung ist keineswegs neu; schon Hadamard macht vom Variationsgedanken Gebrauch <sup>26)</sup>. Seither sind diese durch Julia <sup>27)</sup>, Schiffer <sup>28)</sup> und andere <sup>29)</sup> weiterentwickelt und ausgebaut worden.

Die Hauptaufgabe ist dabei einerseits das Erfinden zweckmäßiger, dem Problem angepaßter Variationen, andererseits das Berechnen von Variationsformeln, welche es erlauben, die Änderung gebietsabhängiger Größen bei Variation des Gebietes als Funktion der letzteren zu bestimmen. Hier sind hauptsächlich die Arbeiten von Schiffer maßgebend <sup>28)</sup>.

Neben diesen „qualitativen“ Variationsformeln, die alle auf infinitesimalen Variationen beruhen, machen wir ausgiebigen Gebrauch vom Variationsgedanken auch in quantitativer Form: oft ist nicht die Größe, wohl aber die Richtung bekannt, in der sich eine gebietsabhängige reelle Größe bei einem Variationsprozeß ändert. Hier ist vor allen das Symmetrisierungstheorem von Pólya-Szegő <sup>30)</sup> zu nennen, das wir, unseren Zwecken angepaßt, in leicht verschärfter Form formulieren.

*Symmetrisierung.*

Sei  $\Sigma$  das gemeinsame Randkontinuum eines Normalgebiet-

---

<sup>26)</sup> [11].

<sup>27)</sup> [12].

<sup>28)</sup> [8], [9], [10].

<sup>29)</sup> vergl. etwa das Literaturverzeichnis bei [10].

<sup>30)</sup> vergl. dazu [1], 1.10 und [3].



paares  $G, \Gamma$ , bestehend aus einer endlichen Anzahl analytischer Kurvenbögen;  $G$  sei nicht leer.

*Definition:* Die Symmetrisierung von  $G, \Gamma, \Sigma$ , bezüglich einer Geraden  $g$ <sup>32)</sup> ist eine geometrische Operation, welche  $G$  in  $G^*$ ,  $\Gamma$  in  $\Gamma^*$ ,  $\Sigma$  in  $\Sigma^*$  transformiert.  $G^*, \Gamma^*$  und  $\Sigma^*$  sind dabei durch folgende Eigenschaften bestimmt:

1. Jede zu  $g$  senkrechte Gerade  $n$ , welche  $\Sigma$  trifft, trifft auch  $\Sigma^*$  und umgekehrt.
2. Sei  $n_0$  eine solche Gerade. Ihr Schnitt mit dem abgeschlossenen Bereich  $(G^* + \Sigma^*) = \bar{G}^*$  ist eine zu  $g$  symmetrisch liegende Strecke, deren Länge gleich der Summe der Längen aller Strecken ist, die  $n_0$  aus  $(G + \Sigma) = \bar{G}$  herausschneidet. Unter einer Strecke der Länge null verstehen wir einen Punkt.
3.  $\Gamma^*$  ist das Komplement von  $\bar{G}^*$ ,  $G^*$  dasjenige von  $\bar{\Gamma}^*$ .

*Symmetrisierungstheorem*<sup>30)</sup>

1. Bei Symmetrisierung von  $G$  bzw.  $\Gamma$  nimmt  $\dot{r}$  nicht ab, bzw.  $\bar{r}$  nicht zu.
2. Unverändert bleiben  $\dot{r}$  bzw.  $\bar{r}$  nur, wenn  $G$  zu  $G^*$ , bzw.  $\Gamma$  zu  $\Gamma^*$  kongruent ist<sup>31)</sup>.

Im folgenden wenden wir diese Methoden an zur Herstellung einer scharfen Ungleichung zwischen den Größen  $\dot{r}$ ,  $\bar{r}$ , und  $s$ . Es tritt dabei der seltene Fall ein, dass sich Extremalgebiete, zugehörige Abbildungsfunktionen und sämtliche Beziehungen explizit aufstellen lassen.

## 2. Problemstellung und Existenzsatz

Wir betrachten alle Paare von Normalgebieten  $G, \Gamma$ <sup>33)</sup> mit vorgeschriebenem  $\dot{r}$  und  $\bar{r}$ . Dass es zu jedem Zahlenpaar  $(\dot{r}, \bar{r})$  mit  $0 \leq \dot{r} \leq \bar{r}$  solche Gebietepaare gibt, ist leicht einzusehen<sup>34)</sup>.

Sei  $\Sigma$  das gemeinsame Randkontinuum von  $G$  und  $\Gamma$ . Die Durchmesser  $s$  aller dieser Randkontinua  $\Sigma$  sind nach oben beschränkt, denn wegen (10) und  $s \leq 2R$  ist  $4\bar{r}$  eine solche Schranke. Zu jedem Zahlenpaar  $(\dot{r}, \bar{r})$  mit  $0 \leq \dot{r} \leq \bar{r}$  existiert also eine obere Grenze  $\sigma$  der Durchmesser von  $\Sigma$ , m.a.W.:

<sup>31)</sup> Dieser Zusatz geht über die ursprüngliche Formulierung hinaus; er folgt aber unmittelbar aus einer Diskussion des Gleichheitszeichens im Beweis [3]. Wir gehen darauf nicht näher ein.

<sup>32)</sup> im folgenden kurz „Symmetrisierung“ genannt.

<sup>33)</sup> Im folgenden sind alle betrachteten Gebiete Normalgebiete.

<sup>34)</sup> Man betrachte etwa die Ellipsen konstanter Achsensumme, vergl. Anhang, Beispiel 4.

es existiert eine scharfe Ungleichung

$$s \leq \sigma(\dot{r}, \bar{r}) \quad (17)$$

für die Durchmesser  $s$  der  $\Sigma$ . Damit stellt sich das folgende

*Extremalproblem 1:*

Gegeben ein Zahlenpaar  $(p, q)$ ,  $0 \leq p \leq q$ . Gesucht unter allen Normalgebietpaaren mit  $(\dot{r}, \bar{r}) = (p, q)$  eines, dessen Randkontinuum  $\Sigma$  den maximalen Durchmesser  $s = \sigma(p, q)$  besitzt.

Geben wir neben  $\bar{r}$  anstelle von  $\dot{r}$  den inneren Radius  $r_0$  bez. 0 vor, so führen die analogen Betrachtungen zu einer oberen Grenze  $\sigma^*(p, q)$  für die Durchmesser der zugehörigen Gebiete-paare, und damit zu

*Extremalproblem 2:*

Gegeben ein Zahlenpaar  $(p, q)$ ,  $0 \leq p \leq q$ . Gesucht unter allen Normalgebietpaaren mit  $(r_0, \bar{r}) = (p, q)$  eines, dessen Randkontinuum  $\Sigma$  den maximalen Durchmesser  $\sigma^*(p, q)$  besitzt.

Unser Ziel ist die Lösung dieser Extremalprobleme, sowie die Bestimmung der Funktion  $\sigma(\dot{r}, \bar{r})$ .

In einer vorbereitenden Betrachtung denken wir uns  $\sigma(\dot{r}, \bar{r})$  als Fläche in einem kartesischen  $(\dot{r}, \bar{r}, \sigma)$ -Koordinatensystem aufgetragen. Für die Spezialfälle  $\dot{r} = 0$  und  $\dot{r} = \bar{r}$  kennen wir  $\sigma$  bereits:

$$\sigma(0, \bar{r}) = 4\bar{r}, \text{ „Nadel“}; \quad (18)$$

$$\sigma(\dot{r} = \bar{r}) = 2\bar{r}, \text{ „Kreis“}. \quad (19)$$

Offenbar ist ferner

$$\sigma(\lambda\dot{r}, \lambda\bar{r}) = \lambda\sigma(\dot{r}, \bar{r}), \quad (20)$$

also  $\sigma$  homogen vom 1. Grade. Geometrisch gesprochen bedeutet dies, daß  $\sigma(\dot{r}, \bar{r})$  eine Kegelfläche mit Spitze in  $O$  darstellt. Zur weiteren Untersuchung betrachten wir zwei spezielle Variationen:

*Die s-Variation.*

Seien  $\alpha, \beta$  Endpunkte eines Durchmessers des Randkontinuums  $\Sigma$ ;  $\gamma$  liege auf der Verlängerung der Strecke  $[\alpha\beta]$  so, daß  $\beta$  innerer Punkt der Strecke  $[\alpha\gamma]$  ist. Wir variieren  $\Sigma$  dadurch, dass wir die Punkte der Strecke  $[\beta\gamma]$  mit  $\Sigma$  vereinigen. Dann ist klar:

*Eine s-Variation vergrößert  $\bar{r}$  <sup>35)</sup> und  $s$ , und läßt  $\dot{r}$  fest.*

*Die r-Variation.*

$\Sigma$  besitzt Punkte, deren  $\varepsilon$ -Umgebung sowohl Punkte von  $G$  als auch von  $\Gamma$  enthält, aber weder  $\alpha$  noch  $\beta$ . In der Umgebung

<sup>35)</sup> vergl. [2], Bd. II, S. 21, Nr. 121.

eines solchen Punktes können wir  $\Sigma$  so abändern, daß  $s$  unverändert bleibt, und für die neuen Gebiete  $G^*$  und  $\Gamma^*$  gilt:

$$G^* \subset G, \Gamma^* \supset \Gamma,$$

im strengen Sinn. Damit <sup>36)</sup>

*Eine  $r$ -Variation verkleinert  $\dot{r}$  und  $\bar{r}$ , und läßt  $s$  fest.*

Mit Hilfe dieser Variationen können wir nun die Monotonie von  $\sigma(\dot{r}, \bar{r})$  beweisen:

**Satz 13** a) *Es sei  $p' > p$ . Alle Gebiete mit  $(\dot{r}, \bar{r}) = (p', q)$  haben einen Durchmesser  $s < \sigma(p, q)$ , d.h. es ist*

$$\sigma(p', q) \leq \sigma(p, q), \text{ wenn } p' > p.$$

b) *Es sei  $q' < q$ . Alle Gebiete mit  $(\dot{r}, \bar{r}) = (p, q')$  haben einen Durchmesser  $s < \sigma(p, q)$ , d.h. es ist*

$$\sigma(p, q') \leq \sigma(p, q), \text{ wenn } q' < q.$$

**Zusatz** *Hat Extremalproblem 1 eine Lösung, so gilt sogar*

$$\sigma(p', q) < \sigma(p, q), \text{ wenn } p' > p,$$

$$\sigma(p, q') < \sigma(p, q), \text{ wenn } q' < q,$$

*d.h.  $\sigma$  ist monoton im strengen Sinne.*

*Beweis:* a) Gäbe es ein solches Gebiet mit  $s \geq \sigma(p, q)$ , so könnten wir durch eine  $r$ -Variation ein Gebiet  $G'$  mit  $\bar{r} < q$ ,  $s \geq \sigma(p, q)$ ,  $\dot{r} = p$  erhalten. Hieraus lieferte eine  $s$ -Variation ein Gebiet  $G''$  mit  $\bar{r} = q$ ,  $s > \sigma(p, q)$ ,  $\dot{r} = p$ , was nicht angeht.

b) Gäbe es ein solches Gebiet mit  $s \geq \sigma(p, q)$ , so führte schon eine  $s$ -Variation allein auf ein Gebiet  $G''$  wie unter a).

Der Zusatz ist eine triviale Folge des Hauptsatzes.

**Hilfssatz 5** *Die beiden Extremalprobleme sind äquivalent, d.h. es ist*

$$\sigma^*(p, q) = \sigma(p, q),$$

*und jede Lösung des einen ist eine Lösung des andern und umgekehrt.*

*Beweis:*

1. Offenbar ist  $\sigma^* \geq \sigma$ . Wäre  $\sigma^* > \sigma$ , so gäbe es ein Normalgebietpaar mit  $\dot{r} = p' > r_0 = p$ ,  $\bar{r} = q$ ,  $s > \sigma(p, q)$ , was nach Satz 13a unmöglich ist.
2. Lösung des ersten Problems ist eine Lösung des zweiten: trivial.

<sup>36)</sup> siehe Fußnote 35).

3. Lösung des zweiten Problems ist eine Lösung des ersten: für eine Lösung des zweiten Problems ist  $\bar{r} = q$ ,  $s = \sigma^*(p, q) = \sigma(p, q)$ . Wäre  $r_0 \neq \dot{r}$ , also  $r_0 = p < \dot{r} = p'$ , so würde das Lösungsgebiet wiederum Satz 13a widersprechen.

Wir kommen jetzt zum Beweis der Existenz von Lösungen des Extremalproblems. Dazu ist es zweckmäßig, die Grenzfälle „Kreis“ und „Nadel“ zunächst wieder auszuschließen. Wir formulieren also den

### Existenzsatz

*Sei  $\mathfrak{S}$  die Klasse der Randkontinua  $\Sigma$  der Normalgebiet-paare  $G, \Gamma$  mit vorgegebenen  $\dot{r}, \bar{r}$  ( $0 < \dot{r} < \bar{r}$ ). Dann existiert ein  $\Sigma \in \mathfrak{S}$  mit dem maximalen Durchmesser  $s = \sigma(\dot{r}, \bar{r})$ .*

*Beweis:*

Wegen Hilfssatz 5 genügt es, die Existenz von Lösungen des zweiten Extremalproblems zu beweisen.

Sei  $\mathfrak{S}'$  die Klasse der Randkontinua  $\Sigma$  von Normalgebiet-paaren, welche die Bedingungen des 2. Extremalproblems erfüllen. Es gibt eine Folge  $\{\Sigma_n\} \in \mathfrak{S}'$  derart, daß die zugehörigen Durchmesser  $s_n$  der  $\Sigma_n$  gegen  $\sigma(p, q)$  konvergieren. Es seien  $\alpha_n, \beta_n$  die Endpunkte von  $s_n$ ,  $G_n/\Gamma_n$  das zu  $\Sigma_n$  gehörige Paar von Normalgebieten,

$$\left. \begin{aligned} g_n(\zeta) &= r_0 \zeta + \dots, \\ \gamma_n(\zeta) &= \bar{r} \zeta + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

die Abbildungsfunktionen von  $G_n$  bzw.  $\Gamma_n$  auf das Innere bzw. Äußere von  $K$ . Durch verschiedentliche Auswahl können wir aus  $\{\Sigma_n\}$  eine Teilfolge  $\{\Sigma_{n'}\}$  auswählen, derart, daß die zugehörigen Folgen  $\alpha_{n'}, \beta_{n'}, s_{n'}$  bzw. gegen  $\alpha, \beta, \sigma$  streben, und die  $g_{n'}(\zeta), \gamma_{n'}(\zeta)$  in jedem abgeschlossenen Teilbereich ihrer respektiven Definitionsgebiete gegen reguläre, schlichte Grenzfunktionen  $g(\zeta)$  bzw.  $\gamma(\zeta)$  konvergieren. Sei  $\Gamma$  das durch  $\gamma(\zeta)$  definierte Gebiet,  $\Sigma$  sein Randkontinuum,  $s$  dessen Durchmesser. Dann ist

$$s \geq \sigma. \quad (22)$$

Um das einzusehen, betrachten wir die Bildkurve  $\Sigma_n(\varepsilon)$  von  $|\zeta| = 1 + \varepsilon$  bei  $\gamma_n(\zeta)$  (wir lassen hier und im folgenden die Striche bei den Indizes wieder weg). Sei  $s_n(\varepsilon)$  deren Durchmesser. Dann gilt für alle  $n$  und  $\varepsilon$

$$s_n(\varepsilon) > s_n,$$

somit durch Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$

$$s(\varepsilon) \geq \sigma.$$

Lassen wir hierin  $\varepsilon \rightarrow 0$  streben, so erhalten wir (22).

Sei weiter  $G$  das Komplement von  $\bar{\Gamma}$  ( $G, \Gamma$  bilden also ein normales Paar),  $G^*$  das durch  $g(\zeta)$  definierte Gebiet,  $r_0$  der innere Radius bez. 0 von  $G$ ,  $r_0^*$  derjenige von  $G^*$ . Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der  $g_n(\zeta)$  ist  $r_0^* = p$ ; und wir zeigen

$$r_0 \geq p, \quad (23)$$

Dazu brauchen wir nur  $G \supseteq G^*$  zu beweisen<sup>37)</sup>. Da  $G_n$  und  $\Gamma_n$  punktfremd sind, so folgt dies unmittelbar aus der gleichmäßigen Konvergenz der  $g_n(\zeta)$  und  $\gamma_n(\zeta)$ . Aus demselben Grunde ist ferner der äußere Radius  $\bar{r}$  von  $\Gamma$  gleich  $q$ . Wir haben damit ein Paar von Normalgebieten  $G, \Gamma$  gefunden mit folgenden Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \quad \bar{r} = q \\ 2. \quad \dot{r} \geq r_0 \geq p \\ 3. \quad s \geq \sigma \end{array} \right\} \quad (24)$$

Wegen Satz 13a und der Definition von  $\sigma$  als oberer Grenze können in 2. und 3. die Ungleichheitszeichen nicht bestehen.

Damit ist der Existenzsatz bewiesen.

### 3. Schiffers Gebietsvariationen

Aus Gründen der Raumersparnis gehen wir nur auf denjenigen Zweig der Theorie ein, der uns für unser Problem interessiert, und verweisen im Übrigen auf die Literatur — dies umso mehr, als gerade bei spezieller Anwendung die wesentlichen Gedanken besonders gut zum Ausdruck kommen.

Schiffer hat verschiedene Variationsformeln sehr allgemeiner Natur hergeleitet<sup>38)</sup>. Unter ihnen befindet sich eine, die sog. „Randvariation“ (boundary variation)<sup>39)</sup>, welche auf unsere Zwecke wie zugeschnitten ist und in äußerst eleganter Weise zum Resultat führt. Diese Variationsformel liegt aber so tief, daß ihre Wirkungsweise schwer zu überblicken ist; in einer Darstellung, welche auf tieferes Eindringen in die Theorie verzichtet, ist ihre Verwendung nicht angebracht. Wir ziehen es daher vor, eine Variationsformel an die Spitze zu stellen, welche bedeutend durchsichtiger ist, und nehmen den geringen Mehraufwand an Rechnung in Kauf. Wir formulieren sie unabhängig von den Gegebenheiten dieser Arbeit.

<sup>37)</sup> siehe Fußnote 35).

<sup>38)</sup> [8], [9], [10].

<sup>39)</sup> [8].

Es sei  $\Gamma$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet der  $z$ -Ebene mit mindestens zwei Randpunkten, das den Punkt  $\infty$  enthält;  $C$  sei seine Berandung. Durch

$$\varphi(\zeta) = \bar{r}\zeta + c_0 + c_1\zeta^{-1} + \dots, \quad \bar{r} > 0,$$

werde  $\Gamma$  schlicht auf das Äußere des  $\zeta$ -Einheitskreises  $K$  abgebildet. Seien ferner  $z_1, z_2, \dots, z_n$  eine endliche Anzahl von (untereinander und von  $\infty$  verschiedenen) Punkten aus  $\Gamma$ . Wir bilden

$$q(z) = a_0 + a_1z + \sum_{\nu=1}^n \frac{A_\nu}{z - z_\nu}, \quad (25)$$

und betrachten die Abbildung

$$z^* = z + \varepsilon q(z), \quad (26)$$

worin der komplexe Variationsparameter  $\varepsilon$  dem Betrage nach beliebig klein werden kann. Sei  $K_\delta$  die Punktmenge bestehend aus den abgeschlossenen Kreisscheiben vom Radius  $\delta$  um die Punkte  $z_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) und  $\infty$ <sup>40</sup>). Dann folgt aus dem Satz von Rouehé, daß das Gebiet  $(\Gamma - K_\delta)$  durch (26) schlicht abgebildet wird, sobald  $|\varepsilon|$  genügend klein ist. Wählen wir  $\delta$  so klein, daß  $K_\delta$  ganz in  $\Gamma$  liegt, so vermittelt (26) für kleines  $|\varepsilon|$  eine schlichte Abbildung von  $C$  auf ein benachbartes Randkontinuum  $C^*$ , und variiert damit  $\Gamma$  zu  $\Gamma^*$ . Sei

$$\varphi^*(\zeta) = \bar{r}^*\zeta + c_0^* + c_1^*\zeta^{-1} + \dots, \quad \bar{r}^* > 0,$$

die Funktion, welche  $\Gamma^*$  schlicht auf das Äußere von  $K$  abbildet. Dann besteht folgende

*Variationsformel:*

$$\left. \begin{aligned} \varphi^*(\zeta) = \varphi(\zeta) - \varepsilon \left\{ \sum_{\nu=1}^n A_\nu \frac{\zeta^2 \varphi'(\zeta)}{\zeta_\nu^2 \varphi'^2(\zeta_\nu) (\zeta - \zeta_\nu)} - q[\varphi(\zeta)] \right\} \\ - \bar{\varepsilon} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \bar{A}_\nu \frac{\zeta \varphi'(\zeta)}{\bar{\zeta}_\nu \overline{\varphi'(\zeta_\nu)^2} (\zeta \bar{\zeta}_\nu - 1)} \right\} \\ + i |\varepsilon| A \zeta \varphi'(\zeta) + O(\varepsilon^2), \\ A = \Im \left\{ \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|} \left[ \sum_{\nu=1}^n \frac{A_\nu}{\zeta_\nu^2 \varphi'^2(\zeta_\nu)} - a_1 \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

wo

und die  $\zeta_\nu$  die Bildpunkte der  $z_\nu$  bei  $\varphi(\zeta)$  sind.

Der Beweis sei hier nur angedeutet. Wir können annehmen, daß  $z = 0$  nicht in  $\bar{\Gamma}$  liegt. Durch Spiegelung beider Ebenen  $\zeta$

<sup>40</sup>) Unter einer Kreisscheibe vom Radius  $\delta$  um den Punkt  $\infty$  verstehen wir das Äußere des Kreises vom Radius  $1/\delta$  um den Nullpunkt.

und  $z$  an  $K$  erhalten wir ein Variationsproblem, das die Voraussetzungen des von Schiffer <sup>41)</sup> behandelten Problems erfüllt. Durch Rückübersetzen erhalten wir Formel (27).

### *Lagrange'sche Multiplikatoren*

Es tritt oft der Fall ein, daß eine Gebietsgröße unter Nebenbedingungen variiert werden soll. Dann ist es nützlich zu wissen, daß in einem gewissen Sinn das Lagrange'sche Multiplikatorentheorem Gültigkeit hat. Der folgende Hilfssatz bezieht sich auf den Fall einer einzigen Nebenbedingung, er läßt sich aber samt Beweis ohne wesentlich neue Gedanken auf den Fall von  $n$  Nebenbedingungen übertragen.

### **Hilfssatz 6.**

*Gegeben zwei reelle Gebietsgrößen  $P, Q$ . Es existiere ein Gebiet  $\Gamma$ , welches  $P$  bei festem  $Q$  zum Maximum macht. Es seien*

$$\begin{aligned}\delta P &= \Re\{\varepsilon V_P(z_1)\}, \\ \delta Q &= \Re\{\varepsilon V_Q(z_1)\},\end{aligned}\quad z_1 \in \Gamma,$$

*bzw. die Variationen von  $P, Q$  bei der speziellen Variation (26)*

$$z^* = z + \varepsilon \frac{1}{z - z_1} \quad (26a)$$

*von  $\Gamma$ ;  $V_P(z_1)$  und  $V_Q(z_1)$  seien regulär in einem Teilgebiet  $\Gamma'$  von  $\Gamma$ . Dann gilt identisch in  $z \in \Gamma'$*

$$V_P(z) + \lambda V_Q(z) = 0,$$

*mit konstantem (von  $z$  unabhängigem)  $\lambda$ .*

### *Beweis:*

Für jede Variation (26), die  $Q$  fest läßt, muss  $\delta P \leq 0$  sein.

1. Ist  $V_Q(z) \equiv 0$ , so ist die Behauptung trivial, denn dann erfüllt schon jede Variation (26a) die Nebenbedingung  $\delta Q = 0$ .
2. Sei  $V_Q(z) \not\equiv 0$ . Wir betrachten die allgemeinere Variation

$$z^* = z + \varepsilon \cdot \sum_{\nu=1}^2 \frac{A_\nu}{z - z_\nu}, \quad \left. \begin{array}{l} z_\nu \in \Gamma' \\ A_\nu \neq 0 \end{array} \right\} \quad (26b)$$

Wegen der Linearität von (27) in den  $A_\nu$  ist dann

$$\delta Q = \Re\{\varepsilon \sum_{\nu=1}^2 A_\nu V_Q(z_\nu)\}. \quad (28)$$

---

<sup>41)</sup> [9].

a) Sei  $V'_Q(z) \equiv 0$ ,  $V_Q(z) \equiv k = \text{const.} \neq 0$ . Dann erfüllt jede Variation (26b) mit  $A_1 + A_2 = 0$  die Nebenbedingung  $\delta Q = 0$ .

Aus

$$\delta P = \Re \left\{ \varepsilon \sum_{\nu=1}^2 A_\nu V_P(z_\nu) \right\} \leq 0 \quad (29)$$

folgt dann wegen der willkürlichen Wahl von  $\arg \varepsilon$  mit  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$V_P(z_1) - V_P(z_2) = 0$$

für alle  $z_1, z_2 \in \Gamma'$ , d.h.  $V_P(z) = \text{const.} = k'$ . Mit  $A = -k'/k$  folgt die Behauptung.

b) Sei jetzt  $V'_Q(z) \not\equiv 0$ ,  $V_Q(z) \not\equiv 0$ . Dann gelangen wir wie folgt zu einer Variation (26b), welche  $\delta Q = 0$  erfüllt. Wir wählen zunächst  $z_1^0, z_2^0 \in \Gamma'$  so, daß keine der drei Größen

$$V_Q(z_1^0), V_Q(z_2^0), V'_Q(z_2^0),$$

verschwindet. Dann bestimmen wir  $A_1^0$  und  $A_2^0$  aus

$$A_1^0 V_Q(z_1^0) + A_2^0 V_Q(z_2^0) = 0, \quad A_\nu^0 \neq 0.$$

Sei  $\lambda_0 = A_2^0/A_1^0$ . Wegen  $V'_Q(z_2^0) \neq 0$  können wir die Gleichung

$$F(z_1, z_2, \lambda_0) \equiv V_Q(z_1) + \lambda_0 V_Q(z_2) = 0$$

in der Umgebung von  $z_2^0$  nach  $z_2$  auflösen und erhalten

$$z_2 = z_2(z_1, \lambda_0).$$

Mit diesem  $z_2$  erfüllt Variation (26b) für alle  $z_1 \in \Gamma'$ ,  $\varepsilon$  die Bedingung  $\delta Q = 0$ . Mit (29) zusammen haben wir also

$$V_Q(z_1) + \lambda_0 V_Q\{z_2(z_1, \lambda_0)\} = 0,$$

$$V_P(z_1) + \lambda_0 V_P\{z_2(z_1, \lambda_0)\} = 0,$$

für alle  $z_1$  in der Umgebung von  $z_1^0$ .

Da  $\lambda_0 \neq 0$  ist, muß also identisch in  $z_1$  die Determinante

$$D_{PQ} = \begin{vmatrix} V_Q(z_1) & V_Q(z_2) \\ V_P(z_1) & V_P(z_2) \end{vmatrix}$$

verschwinden.

Dieselben Betrachtungen können wir anstellen für alle  $\lambda$  in einer Umgebung von  $\lambda_0$ . Es gilt daher

$$D_{PQ}(z_1, \lambda) \equiv 0, \quad (30)$$

in  $z_1$  und  $\lambda$ . Daraus

$$\frac{\partial D_{PQ}}{\partial \lambda} = \begin{vmatrix} V_Q(z_1) & V'_Q(z_2) \\ V_P(z_1) & V'_P(z_2) \end{vmatrix} \frac{\partial z_2}{\partial \lambda} \equiv 0.$$



Da offenbar  $\frac{\partial z_2}{\partial \lambda} \neq 0$  ist in einer Umgebung von  $\lambda_0$ , so folgt hieraus durch Kombination mit (30), daß die Wronskysche Determinante  $W\{V_P(z_2), V_Q(z_2)\}$  verschwindet für alle  $z_1$  in der Umgebung von  $z_1^0$ . Da dort  $\frac{\partial z_2}{\partial z_1} \neq 0$  ist, so resultiert daraus die Behauptung.

#### 4. Anwendung.

Nach Hilfssatz 5 erhalten wir alle Lösungen unseres Extremalproblem, indem wir die Normalgebietpaare  $G, \Gamma$  von vorgegebenem  $r_0$  und  $\bar{r}$  suchen, welche  $s$  maximieren. Sei  $G, \Gamma$  ein solches Paar von Normalgebieten. Wir variieren es durch eine Variation (26a). Ist dann

$$\varphi(\zeta) = \bar{r}\zeta + b_0 + b_1\zeta^{-1} + \dots$$

die n.A. von  $\Gamma$ , so folgt aus (27)

$$\delta \log \bar{r} = -\Re \varepsilon \frac{1}{\zeta_1^2 \varphi'(\zeta_1)^2}. \quad (31)$$

Da für  $G$  ferner  $r_0 = \dot{r}$  ist, so lautet die n.A. von  $G$  bez. 0

$$f(\zeta) = r_0\zeta + a_3\zeta^3 + \dots \quad (a_2 = 0),$$

damit aus (26a)

$$\delta \log r_0 = -\Re \varepsilon \frac{\varepsilon}{z_1^2} {}^{42}), \quad (32)$$

und schließlich

$$\delta \log |\beta - \alpha| = -\Re \varepsilon \frac{1}{(z_1 - \alpha)(z_1 - \beta)} \quad (33)$$

Unsere Extremalgebiete haben nun die Eigenschaft, daß bei beliebigen Variationen, die  $\bar{r}$  und  $r_0$  festlassen, der Durchmesser nicht vergrößert wird. Dazu ist jedenfalls notwendig, daß

$$|\beta^* - \alpha^*| \leq |\beta - \alpha|$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} \delta \log |\beta - \alpha| \leq 0 \\ \text{unter den Bedingungen} \\ \delta \log \bar{r} = 0 \\ \delta \log r_0 = 0 \end{array} \right\} \quad (34)$$

ist.

<sup>42)</sup> Man beachte, daß  $r_0^* = |f^{**}(a)|$  ist (und nicht etwa gleich  $|f^{**}(0)|$ !), wobei  $f^*(a) = 0$ . Wegen  $a_2 = 0$  ist aber  $r_0^*$  von  $|f^{**}(0)|$  nur um Größen der Ordnung  $\varepsilon^3$  verschieden.

Nach Hilfssatz 6 in seiner Erweiterung auf 2 Nebenbedingungen, sowie (31), (32) und (33) folgt hieraus folgende Differentialgleichung für die Abbildungsfunktion von  $\Gamma$

$$\frac{1}{(z_1 - \alpha)(z_1 - \beta)} + \lambda_1 \frac{1}{\zeta_1^2 \varphi'(\zeta_1)^2} + \lambda_2 \frac{1}{z_1^2} = 0.$$

Schreiben wir  $\zeta$  statt  $\zeta_1$ ,  $z$  statt  $z_1$  und führen  $z = \varphi(\zeta)$  als unabhängige Variable ein, so lautet die Gleichung, wenn wir noch durch  $\lambda_1 \neq 0$  dividieren:

$$\left(\frac{d \log \zeta}{dz}\right)^2 - \mu_1 \frac{1}{z^2} - \mu_2 \frac{1}{(z - \alpha)(z - \beta)} = 0. \quad (35)$$

Wir haben jetzt die Konstanten  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  untereinander und mit den Daten des Extremalgebietes in Verbindung zu bringen. Da  $\zeta(z)$  die Form

$$\zeta = \bar{r}^{-1}z + c_0 + c_1 z^{-1} + \dots$$

hat, so folgt durch Einsetzen in (35) und Koeffizientenvergleich

$$\mu_1 + \mu_2 = 1.$$

Damit erhält (35) die Form

$$\frac{d \log \zeta}{dz} = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{(z - \gamma)(z - \delta)}{(z - \alpha)(z - \beta)}} \quad (36)$$

wo bei der Wurzel derjenige Zweig zu wählen ist, der bei  $z = \infty$  den Wert  $+1$  hat.  $\gamma$  und  $\delta$  hängen noch von einem komplexen Parameter  $\mu$  ab; zwischen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  und  $\mu$  bestehen die Beziehungen

$$\gamma + \delta = \mu(\alpha + \beta), \quad \gamma\delta = \mu\alpha\beta. \quad (37)$$

(36) enthält somit neben der Integrationskonstanten noch weitere sechs reelle Parameter. Da wir nur deren drei, nämlich  $\dot{r}$ ,  $\bar{r}$  und  $\sigma$ , erwarten, ist zu vermuten, daß unsere Variationsmethode noch einige Informationslücken offengelassen hat. In der Tat liefern spezielle Variationen immer notwendige, im allgemeinen aber keine hinreichenden Bedingungen. Immerhin hat (26a) die Hauptauskunft geliefert, nämlich gerade soviel, daß das Symmetrisierungstheorem die Lücke schließen kann. Dazu stellen wir fest, daß die Berandung des Extremalgebietes aus einer stückweise analytischen Kurve besteht. Wenden wir daher das Symmetrisierungstheorem auf das Komplement von  $\Gamma$  an! Wir symmetrisieren zunächst bez. der Achse  $\alpha\beta$ , sodann bez. einer dazu senkrechten Geraden. Ist  $\Gamma$  nicht bereits symmetrisch, so wird dadurch  $\dot{r}$  ver-

größert,  $\bar{r}$  verkleinert, während, wie leicht zu sehen,  $\sigma$  unverändert bleibt. Eine Ähnlichkeitstransformation, welche  $\bar{r}$  den alten Wert erteilt, führt somit auf eine Konfiguration, welche mit Satz 13a im Widerspruch steht. Also muß  $\Gamma$  symmetrisch sein bez. seines Durchmessers und dessen Mittelsenkrechten. Eine einfache Betrachtung zeigt, daß dies nur möglich ist, wenn

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 0 \quad (38)$$

ist. Wir können dann außerdem  $\alpha$  reell wählen, was reelles  $\mu$  nach sich zieht, und setzen

$$\alpha = -\beta = a > 0. \quad (39)$$

Wegen (38) ist  $\alpha\beta \leq 0$  und  $\gamma\delta \leq 0$ , folglich  $\mu \geq 0$ ; wir können daher ferner

$$\left. \begin{aligned} \gamma\delta &= \mu\alpha\beta = -\mu a^2 = -b^2, \\ \mu &= (b/a)^2 = \kappa^2 \quad a, b > 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

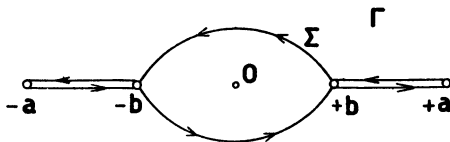
setzen und (36) erhält die Gestalt

$$\frac{d \log \zeta}{dz} = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{z^2 - b^2}{z^2 - a^2}}. \quad (41)$$

Diese Differentialgleichung läßt sich elementar integrieren, und wir finden für die Abbildungsfunktion des Extremalgebietes

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}\zeta &= z \frac{1}{2} \left\{ (1 - a^2/z^2)^{1/2} + (1 - b^2/z^2)^{1/2} \right\} \left\{ \frac{a(1 - b^2/z^2)^{1/2} - b(1 - a^2/z^2)^{1/2}}{a - b} \right\}^{\kappa} \\ &= z - \frac{a^2 - b^2}{4} \frac{1}{z} + \dots, \quad z = \varphi(\zeta), \\ \text{mit } \bar{r} &= \frac{1}{2} a (1 + \kappa)^{\frac{1+\kappa}{2}} (1 - \kappa)^{\frac{1-\kappa}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

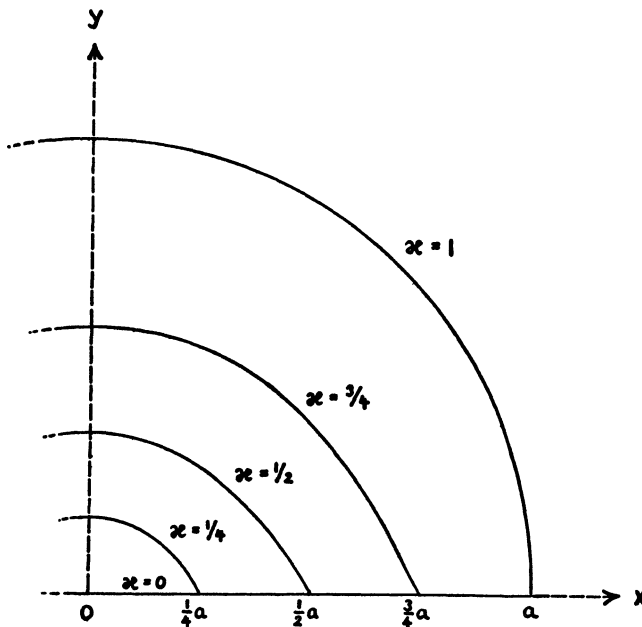
Für die Berandung  $\Sigma$  von  $\Gamma$  ergibt sich qualitativ folgendes Bild



Damit  $\alpha = a$  und  $\beta = -a$  Endpunkte des Durchmessers von  $\Sigma$  sind, muss  $b \leq a$  sein; ferner sind offenbar in (41) und (42) „Kreis“ und „Nadel“ für  $b \rightarrow a$ , bzw.  $b \rightarrow 0$  als Grenzfälle enthalten. Wir erhalten damit für jedes  $\kappa$  des abgeschlossenen Intervalls

$$0 \leq \kappa \leq 1 \quad (43)$$

ein Extremalgebiet. Die Winkel bei  $\pm b$ , unter denen die verschiedenen Zweige der Randkurve zusammenstoßen, haben den Wert  $2\pi/3$  für  $0 < \kappa < 1$ , unabhängig von  $\kappa$ . Derartige „Aufspaltungen“ von Berandungen extremaler Gebiete in symmetrische Gabeln sind eine häufige Erscheinung. Eine Übersicht über die vorliegenden Verhältnisse für verschiedene Werte von  $\kappa$  gibt die Tabelle:



Gezeichnet ist der Verlauf der Randkurven im ersten Quadranten für  $\kappa = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ , und 1. Man hat sie sich für  $0 < \kappa < 1$  wie folgt durchlaufen zu denken: vom Punkt  $z = a$  längs der  $x$ -Achse nach  $\kappa a$ , von dort unter dem Winkel  $2\pi/3$  gegen die positive

$x$ -Richtung und mit einer Anfangskrümmung  $k = \left( \frac{1-2\kappa^2}{1-\kappa^2} \right) \frac{\sqrt{3}}{2}$  auf dem gebogenen

Ast bis zur  $y$ -Achse und weiter gemäß Symmetrie. Man beachte, daß  $k$  mit wachsendem  $\kappa$  bei  $\kappa = 1/\sqrt{2}$  das Vorzeichen wechselt, sodaß die nahe bei  $z = a$  sich gabelnden Kurven sich zuerst gegen den Kreis  $\kappa = 1$  hinkrümmen, eine Tatsache, die sich bei  $\kappa = \frac{1}{2}$  gerade noch knapp erkennen lässt.

Es bleibt jetzt nur noch  $r_0 = \dot{r}$  zu berechnen. Wir suchen dazu die Abbildungsfunktion von  $G$ . Sei  $z(t) = z(e^{it})$  die Gleichung der Randkurve  $\Sigma$ ; aus (41) ergibt sich ihre Differentialgleichung zu

$$\left( \frac{1}{z} \frac{dz}{dt} \right)^2 + \frac{z^2 - a^2}{z^2 - b^2} = 0. \quad (44)$$

Die n.A. von  $G$  bez. 0

$$z = f(\zeta) = r_0 \zeta + a_3 \zeta^3 + \dots \quad (45)$$

muß auf dem Rande von  $K$  der Differentialgleichung (44) genügen; mit  $\zeta = e^{i\tau}$  finden wir

$$e^{2i\tau} \cdot \frac{f'(e^{i\tau})^2}{f(e^{i\tau})^2} \cdot \frac{f(e^{i\tau})^2 - b^2}{f(e^{i\tau})^2 - a^2} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \geq 0. \quad (46)$$

Wir werden dadurch darauf geführt, den Ausdruck

$$E(\zeta) \equiv \zeta^2 \frac{z'^2 z^2 - b^2}{z^2 z^2 - a^2}$$

zu bilden.  $E(\zeta)$  ist, als Funktion von  $\zeta$  betrachtet, wegen (46) in  $|\zeta| < 1$  regulär (da  $z$  die Werte  $\pm a$  nicht annimmt), in  $|\zeta| \leq 1$  noch stetig und außerdem auf dem Rande von  $K$  reell. Nach dem Schwarz'schen Spiegelungsprinzip ist  $E(\zeta)$  also in der ganzen Ebene regulär, folglich eine Konstante, deren Wert sich durch Einsetzen von  $\zeta = 0$  zu  $\kappa^2$  ergibt. Damit haben wir die Differentialgleichung für (45)

$$\kappa \frac{d \log \zeta}{dz} = \frac{1}{z} \sqrt{\frac{z^2 - b^2}{z^2 - a^2}}, \quad (47)$$

worin die Wurzel bei  $z = 0$  den Wert  $+\kappa$  hat. Hieraus durch Integration:

$$\begin{aligned} \dot{r}\zeta &= 2 \frac{(ab)^2}{a^2 - b^2} \frac{(1 - z^2/a^2)^{1/2} - (1 - z^2/b^2)^{1/2}}{z} \left\{ \frac{a(1 - z^2/a^2)^{1/2} + b(1 - z^2/b^2)^{1/2}}{a + b} \right\}^{1/\kappa} \\ &= z - \frac{a^2 - b^2}{(2ab)^2} z^3 + \dots, \quad z = f(\zeta), \end{aligned} \quad (48)$$

mit

$$\dot{r} = 2a\kappa(1 + \kappa)^{-\frac{1+\kappa}{2\kappa}} (1 - \kappa)^{+\frac{1-\kappa}{2\kappa}}.$$

Damit sind alle Stücke bestimmt.

Auch in (48) sind die Grenzfälle „Kreis“ und „Nadel“ für  $\kappa \rightarrow 1$  bzw.  $\kappa \rightarrow 0$  enthalten, wobei allerdings im letzteren Fall die Abbildungsfunktion ihren Sinn verliert.

Das Resultat fassen wir wie folgt zusammen

**Satz 14** Zu jedem Zahlenpaar  $(p, q)$  mit  $0 \leq p \leq q$  gibt es ein Paar von Normalgebieten  $G, \Gamma$  mit den gegebenen Abbildungsradien  $(\dot{r}, \bar{r}) = (p, q)$ , deren Randkontinuum den maximalen Durchmesser  $s = \sigma(p, q)$  besitzt. Dieses Paar von Extremalgebieten ist eindeutig bestimmt und durch die normierten Abbildungsfunktionen (42) und (48) gegeben <sup>43)</sup>.

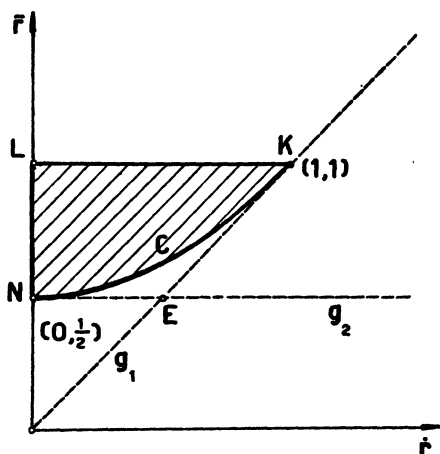
<sup>43)</sup> Für die Parameterwerte  $\kappa=0$  oder  $1$ , wo die Ausdrücke in (42), (48) und (49) unbestimmte Form annehmen, sind sie sinngemäß als Grenzwerte aufzufassen.

Zwischen den Größen  $\dot{r}$ ,  $\bar{r}$  und  $\sigma$  bestehen die Relationen

$$\dot{r} = \sigma \kappa (1 + \kappa)^{-\frac{1+\kappa}{2\kappa}} (1 - \kappa)^{+\frac{1-\kappa}{2\kappa}} \quad (48)$$

$$\bar{r} = \frac{1}{4} \sigma (1 + \kappa)^{\frac{1+\kappa}{2}} (1 - \kappa)^{\frac{1-\kappa}{2}} \quad 0 \leq \kappa \leq 1. \quad (49)$$

Es bleibt jetzt noch, das Resultat in Bekanntes einzuordnen. Dazu betrachten wir alle Gebiete <sup>44)</sup> mit dem Durchmesser  $s = 2$ .



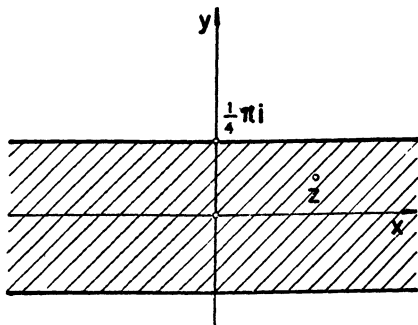
Jedes solche Gebiet stellt sich in der  $\dot{r}$ ,  $\bar{r}$ -Ebene als Punkt dar. Die Extremalgebiete von Satz 14 liegen auf der durch (49) in Parameterdarstellung gegebenen Kurve C, die monoton steigt und nach oben hohl ist. Dem Punkt K entspricht der „Kreis“, dem Punkt N die „Nadel“. Bisher war bekannt

$\dot{r} \leq \bar{r}$  d.h. alle Gebiete liegen oberhalb der Geraden  $g_1$ ;

$\bar{r} \geq \frac{1}{4}s$  d.h. alle Gebiete liegen oberhalb der Geraden  $g_2$ .

## ANHANG (Beispiele)

### 1. Der Streifen



Er wird durch

$$f_s(\zeta) = \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{1 + \varepsilon\zeta}{1 - \varepsilon\zeta},$$

$$|\varepsilon| = 1,$$

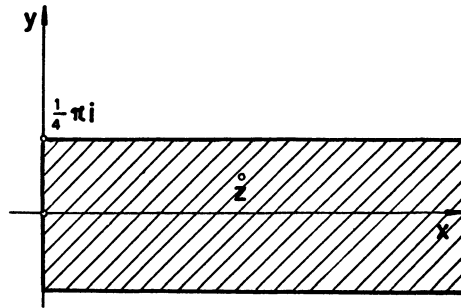
auf  $K$  abgebildet. Die Funktion des inneren Radius lautet im Falle  $\varepsilon = 1$  (vergl. die Figur)

$$r_z = \cos 2y;$$

<sup>44)</sup> Im folgenden steht „Gebiet“ kurz für „Paar von Normalgebieten“.

es ist also  $\dot{r} = r(x, 0) = 1$ , d.h.  $\dot{r}$  wird auf der Mittelparallelen angenommen.

## 2. Der Halbstreifen



Es ist

$r_z = \sinh 2x \cos 2y \{ \sinh^2 2x + \cos^2 2y \}^{-1/2}$ ,  
was auf der  $x$ -Achse bei  $x \rightarrow \infty$  gegen  $\dot{r} = 1$  strebt.

## 3. Das Rechteck

Die Seiten seien  $a, b$ ;  $a \geq b$ . Wir finden

$$\dot{r} = b \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2} \right\}^{-2}, \quad \text{mit } q = e^{-\pi a/b}.$$

Lassen wir  $b$  bei festem  $a$  gegen 0 streben, so existiert

$$\lim_{b \rightarrow 0} \dot{r}/b = 2/\pi \quad \text{und} \quad \lim_{b \rightarrow 0} \bar{r} = \bar{r}_{\text{Nadel}} = \frac{1}{4}a,$$

somit  $\lim_{b \rightarrow 0} \lambda = \frac{1}{2}$ . Für sehr schmale Rechtecke liegt demnach  $\lambda$  beliebig nahe bei  $\frac{1}{2}$ .

## 4. Die Ellipse

Halbachsen  $a, b$ ;  $a \geq b$ . Es ist

$$\dot{r} = \frac{a+b}{2} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{\nu(\nu+1)} \right\}^{-1} \left\{ 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} q^{\nu^2} \right\}^{-1}, \quad q = \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2,$$

$$\bar{r} = \frac{a+b}{2}.$$

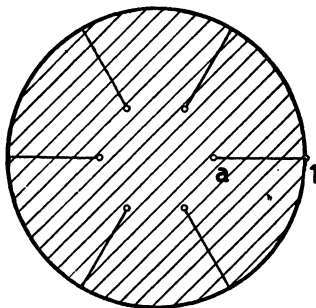
Lassen wir  $b$  bei festem  $\bar{r}$  von 0 bis  $a$  wachsen, so durchläuft offenbar  $\dot{r}$  alle Werte zwischen 0 und 1.

## 5. Der geschlitzte Kreis

Sei  $G$  der längs den Strecken

$$a \leq |z| \leq 1; \quad \arg z = \frac{2\pi}{n}k, \quad (k = 1, \dots, n)$$

aufgeschlitzte Einheitskreis. Dann ist



$$r_0 = \left\{ \frac{1}{2}(a^{n/2} + a^{-n/2}) \right\}^{-2/n},$$

$$\bar{r} = 1.$$

Ist bei gegebenem großen  $n$ ,  $a$  nicht zu klein, so ist  $r_0 = \bar{r}$ . Durch Wahl von  $n$  kann offenbar  $\bar{r}$  beliebig klein gemacht werden, während  $\bar{r} = F = 1$  bleibt. Somit wird  $\lambda$  beliebig klein.

Spiegeln wir die Figur am Einheitskreis, so sehen wir auf dieselbe Weise, daß  $\lambda$  beliebig groß werden kann.

#### LITERATURVERZEICHNIS

G. PÓLYA, G. SZEGÖ.

[1] Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Annals of Math's Studies [Princeton University Press; im Druck].

[2] Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis [New York 1945 (Dover Publications)].

[3] Inequalities for the capacity of a condenser [American Journal of Mathematics 67, 1—32 (1945)].

H. R. HAEGI.

[4] Sur le maximum du rayon intérieur [Comptes rendus 228, 891—892 (1949)].

R. M. ROBINSON.

[5] Bloch-functions [Duke Mathematical Journal 2, 453—459 (1936)].

G. SZEGÖ.

[6] Über eine Extremalaufgabe aus der Theorie der schlichten Abbildungen [Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 22, 38—47 (1923)], nebst Berichtigung [daselbst 23, 64 (1924)].

E. LANDAU.

[7] Über die Bloch-sche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten [Mathematische Zeitschrift 30, 608—634 (1929)].

M. SCHIFFER.

[8] A method of variation within the family of simple functions [Proceedings of the London Mathematical Society 44, 432—449 (1938)].

[9] Variation of the Green-function and theory of the  $p$ -valued functions [American Journal of Mathematics 65, 341—360 (1943)].

[10] Hadamard's formula and variation of domainfunctions [American Journal of Mathematics 68, 417—448 (1946)].

J. HADAMARD.

[11] Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées [Mémoires présentées par divers savants à l'Académie des Sciences 33 (1908)].

G. JULIA.

[12] Sur une équation aux dérivées fonctionnelles liée à la représentation conforme [Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (3) 39, 1—28 (1922)].

Eingegangen den 23. März 1950.