

COMPOSITIO MATHEMATICA

RENÉ GARNIER

Sur le problème de Riemann-Hilbert

Compositio Mathematica, tome 8 (1951), p. 185-204

http://www.numdam.org/item?id=CM_1951__8__185_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur le problème de Riemann — Hilbert

par

René Garnier

Paris.

Introduction

1. Dans une Note posthume ¹⁾ Riemann s'était proposé de construire une équation différentielle linéaire admettant un groupe de monodromie donné. Pour résoudre ce problème D. Hilbert traita ²⁾ le problème préliminaire suivant, que nous appellerons *problème de Riemann — Hilbert*:

Etant données, dans le plan complexe (z) une courbe fermée sans point double, C , séparant le plan en deux régions, l'une R^+ intérieure à C , l'autre R^- extérieure à C , et une matrice carrée d'ordre n , $A(z)$, définie en tout point z de C , construire dans R^+ et R^- respectivement deux matrices analytiques $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ d'ordre n et telles que l'on ait $\Phi = A\Psi$ le long de C .

Hilbert supposait *la courbe C analytique, et les éléments $a_{jk}(z)$ de $A(z)$ pourvus, le long de C , de dérivées secondes continues*; il se limitait d'ailleurs au cas de $n = 2$, tant pour le problème préliminaire que pour le problème primitif de Riemann; sa méthode reposait sur l'introduction d'une fonction de Green et la théorie des équations de Fredholm.

Peu après ³⁾, J. Plemelj reprenait les deux problèmes par une méthode beaucoup plus simple, fondée sur les propriétés qu'il avait établies pour l'intégrale de Cauchy ⁴⁾ (et sur la théorie des équations de Fredholm); il l'exposa ⁵⁾ dans le cas de n quelconque, en supposant seulement *C pourvue d'une tangente, et les $a_{jk}(z)$ dérivables une fois le long de C* ⁶⁾.

¹⁾ Gesammelte mathematische Werke, (Nachlass), B. G. Teubner, Leipzig 1876, p. 357.

²⁾ Nachr. der K. Gesells. der W. zu Göttingen, math.-phys. Klasse, 1905, p. 322. et p. 330; reproduit dans les Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1912, p. 94 et p. 102.

³⁾ Anzeig. der K. Akad. der W., Wien, Math.-Naturw. Klasse, 43, 1906, p. 237.

⁴⁾ Monatsh. für Math. und Phys., 19. 1908, p. 205.

⁵⁾ *loc. cit.* (4), p. 211. Ultérieurement (Bull. Amer. Math. Soc., 18, 1911, p. 64; Math. Ann., 74, 1913, p. 122), G. D. Birkhoff a publié une méthode qui n'en diffère pas essentiellement.

⁶⁾ En fait, la méthode de Plemelj suppose, par exemple pour $n = 2$, que des fonctions de z , telles que $[a_{11}(z)a_{21}(\zeta) - a_{11}(\zeta)a_{21}(z)] : z - \zeta$ sont intégrables sur $C(\zeta$, point quelconque de C); cf. *loc. cit.* (4), p. 215.

Ultérieurement, G. D. Birkhoff ⁷⁾ a résolu le problème préliminaire par une méthode directe des plus remarquables; cette méthode, d'un caractère élémentaire, procède par approximations successives, à partir des propriétés classiques de l'intégrale de Cauchy, mais en imposant à C et à $A(z)$ les restrictions suivantes: *C doit être analytique et doit pouvoir être subdivisée en m arcs à l'intérieur de chacun desquels les $a_{jk}(z)$ coïncident avec des fonctions holomorphes; de plus, aux points de subdivision z_k , les $a_{jk}(z)$ doivent être bien définies et posséder sur C une infinité de dérivées successives.* Ces restrictions n'ont aucune influence sur les applications que G. D. Birkhoff a déduites de la solution du problème préliminaire: solution du problème primitif de Riemann et de son extension aux équations irrégulières; solution des „problèmes de Riemann” pour les équations linéaires aux différences finies et aux q -différences; d'ailleurs, selon Birkhoff il ne faisait guère de doute que ces restrictions n'avaient rien d'essentiel pour la validité de sa méthode ⁸⁾).

2. Le travail actuel ⁹⁾ a précisément pour but d'étendre la méthode de Birkhoff au cas où, *C restant analytique et sans singularité, les $a_{jk}(z)$ satisfont à une condition de Lipschitz* ¹⁰⁾. Afin de réaliser cette extension il suffit de démontrer pour cette nouvelle catégorie d'éléments $a_{jk}(z)$ le théorème suivant, sur lequel repose la convergence des approximations successives de Birkhoff:

Soit $\tau(z)$ une fonction, holomorphe sur C , et telle que sur C $|\tau(z)| = 1$; soient encore p un entier ≥ 0 et $g(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur de C , continue et lipschitzienne sur C ; la fonction

$$F_{jk}(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\tau^p(z) a_{jk}(z) g(z)}{z - X} dz,$$

holomorphe à l'extérieur de C , est telle que

$$(1) \quad \max. |F_{jk}(X)| \leq \eta. \max. |g(z)|,$$

(les maxima étant atteints sur C), et η étant un nombre > 0 indépendant de $g(z)$ et arbitrairement petit pour $p \geq p_0$ assez

⁷⁾ Proceed. of the Amer. Acad. of Arts and Sc., 49, 1913, p. 521.

⁸⁾ loc. cit. (7), p. 533.

⁹⁾ Un résumé en a été publié aux C. R. Ac. Sc. Paris, t. 221, 10 sept. 1945, p. 276. Cette Note établissait ce même résultat dans des conditions moins générales: les a_{jk} y étaient assujettis à avoir des dérivées lipschitziennes.

¹⁰⁾ La méthode s'étend au cas où les $a_{jk}(z)$ seraient höldériens. Nous nous sommes borné au cas lipschitzien pour simplifier l'écriture.

grand ¹¹⁾. (Ici, et dans tout ce travail, il s'agit d'intégrales au sens de Riemann).

Le présent Mémoire établit donc ce théorème dans les conditions imposées plus haut à C et à $A(z)$; le résultat ainsi obtenu comporte, en outre, les conséquences suivantes. Dans les conditions où s'était placé G. D. Birkhoff, la fonction analytique avec laquelle $a_{jk}(z)$ coïncide le long de l'arc $z_h z_{h+1}$ de C est holomorphe à l'intérieur d'un fuseau, d'extrémités z_h, z_{h+1} , contenant cet arc; la réunion de ces fuseaux constitue un domaine annulaire ω , qui est intérieur à la région $\Omega : \varrho \leq |\tau(z)| \leq \varrho^{-1}$ (où ϱ est assez voisin de 1 pour que $\tau(z)$ soit holomorphe dans Ω), et dont les frontières sont deux courbes D_1, D_2 , l'une D_1 intérieure, l'autre D_2 extérieure à C . Birkhoff observe que dans les aires annulaires $\Omega \pm \omega$ limitées l'une par D_1 et la frontière intérieure C_1 de Ω , l'autre par D_2 et la frontière extérieure C_2 de Ω , on peut définir, par leurs composantes réelles et imaginaires des fonctions lipschitziennes $a_{jk}^*(z)$ qui se raccordent avec les $a_{jk}(z)$ sur D_1 et D_2 ¹²⁾.

Or, appliquée aux conditions de Birkhoff, la méthode actuelle ne fait plus intervenir les points singuliers z_h , ni les courbes D_1, D_2 ; elle n'exige plus la construction des $a_{jk}^*(z)$; le calcul de p_0 ne nécessite plus l'étude de $\int_{D_1} |\tau|^p ds$, étude pratiquement compliquée par la présence des z_h ; ce calcul peut s'effectuer simplement à partir des données.

3. La méthode actuelle utilise de diverses manières l'approximation trigonométrique de $A(z)$. Nous traitons d'abord directement le cas d'une courbe analytique quelconque C (nos 4, 5). Le cas où C est une circonférence et où, de plus, $A(z)$ admet une dérivée lipschitzienne, se laisse étudier par deux méthodes plus précises: l'une applique des théorèmes sur l'approximation par les suites de Fourier dus à M. C. de la Vallée Poussin; elle donne pour η une expression de la forme $Kp^{-1} \log p$ (K , indépendant de p) (Nos 6 à 8); l'autre (Nos 9 à 11), fondée sur l'approximation par les sommes de Fejér conduit à une expression remarquable (20) de la limite ¹³⁾ de

¹¹⁾ *loc. cit.* (7), p. 525. Il existe d'ailleurs un second théorème, d'énoncé analogue, mais avec échange des mots „intérieur” et extérieur (*loc. cit.* (7), p. 526). Bien entendu, ce second théorème peut être établi aussi par la méthode actuelle.

¹²⁾ *loc. cit.* (7), p. 523.

¹³⁾ L'existence de la limite a été établie par Plemelj lorsque $f(x)$ est lipschitzienne (*loc. cit.* (4), p. 208); nous l'établissons d'ailleurs directement au no 7, dans cette même hypothèse.

$$F(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p f(z)}{z - X} dz$$

lorsque X , extérieur à C , tend vers un point x de C le long d'un chemin non tangent à C (p entier ≥ 0 ; $f(z)$ fonction définie sur C et à dérivée lipschitzienne); pour $p = 0$ la formule montre aussitôt que si $f(z)$ est dérivable sur C , il en est de même de la limite de $F(X)$, ce qui généralise un résultat de J. Plemelj (no. 12). Cette démonstration fait intervenir la différence seconde de $f(z)$; au No. 14 on trouvera deux démonstrations, dues à M. Choquet et à M. Pauc, d'un théorème très général concernant cette différence.

I. C est une courbe fermée analytique quelconque.

4. Nous désignerons simplement l'élément $a_{jk}(z)$ de la matrice $A(z)$ par $a(z)$; soit s l'arc de C ($0 \leq s \leq l$; l , longueur de C); on pourra poser $a(z) = f(s)$, la fonction $f(s)$ étant prolongée hors de $(0, l)$ par la convention $f(s + l) = f(s)$. Faisons maintenant $s = \frac{l}{2\pi} \theta$; $f(s)$ deviendra une fonction $b(\theta)$, de période 2π , et l'on aura

$$a(z) = b(\theta).$$

Si la fonction $a(z)$ est bornée et lipschitzienne sur C , il en est de même de $b(\theta)$, et réciproquement; car, soient z' et z'' deux points quelconques de C , θ' et θ'' deux déterminations de θ correspondant à ces points et telles que $|\theta' - \theta''| < \pi$; le rapport

$$|\theta' - \theta''| : |z' - z''|$$

est inférieur à un nombre positif μ , indépendant de z' et z'' . Sinon, il existerait une suite (z'_n, z''_n) sur laquelle le rapport ne serait pas borné, ce qui est absurde, C étant régulière et sans point double; d'ailleurs, le rapport inverse reste $< l : 2\pi$. La fonction $b(\theta)$ satisfait donc, quels que soient θ' , θ'' à une inégalité

$$(2) \quad \left| \frac{b(\theta'') - b(\theta')}{\theta'' - \theta'} \right| < A$$

Considérons alors la $n^{\text{ième}}$ somme de Fejér, $b_n(\theta)$, de $b(\theta)$, et soit ε un nombre > 0 arbitrairement petit; nous allons établir le

LEMME. On peut choisir un entier $N(\varepsilon)$ assez grand pour que l'inégalité $n > N$ entraîne

$$(3) \quad \left| \frac{[b(\theta'') - b_n(\theta'')] - [b(\theta') - b_n(\theta')]}{\theta'' - \theta'} \right| < A\varepsilon \text{ ou } A,$$

selon que $|z' - z''| > \varepsilon$ ou $\leq \varepsilon$ (z', z'' , points de C correspondant à θ', θ'' avec $|\theta' - \theta''| < \pi$)

D'après une formule connue ¹⁴⁾ on a

$$\frac{b(\theta'') - b_n(\theta'') - b(\theta') + b_n(\theta')}{\theta'' - \theta'} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}(t) dt,$$

avec

$$\mathfrak{B}(t) = \frac{b(\theta'') - b\left(\theta'' + \frac{2t}{n}\right) - b(\theta') + b\left(\theta' + \frac{2t}{n}\right)}{\theta'' - \theta'} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2.$$

Choisissons T tel que

$$T > \frac{6}{\pi\varepsilon};$$

il viendra

$$\begin{aligned} (4) \quad & \left| \frac{1}{\pi} \int_T^{+\infty} \mathfrak{B}(t) dt \right| < \\ & < \frac{1}{\pi} \int_T^{+\infty} \left(\left| \frac{b(\theta'') - b(\theta')}{\theta'' - \theta'} \right| + \left| \frac{b\left(\theta'' + \frac{2t}{n}\right) - b\left(\theta' + \frac{2t}{n}\right)}{\theta'' - \theta'} \right| \right) \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt \\ & < \frac{2A}{\pi} \int_T^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < \frac{A\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

et, de même,

$$(4') \quad \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-T} \mathfrak{B}(t) dt \right| < \frac{A\varepsilon}{3}.$$

Choisissons ensuite un entier N tel que pour $n > N$ on ait

$$|b(\theta_2) - b(\theta_1)| < \frac{\pi A \varepsilon^2}{3l},$$

quels que soient θ_1 et θ_2 satisfaisant à

$$|\theta_2 - \theta_1| < \frac{T}{2n}.$$

¹⁴⁾ C. de LA VALLÉE POUSSIN, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris, Gauthier-Villars, 1919, p. 81.

Il viendra, pour $n > N$ et pour $|z' - z''| > \varepsilon$, donc pour $|\theta'' - \theta'| > 2\pi\varepsilon l^{-1}$,

$$(5) \quad \left| \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{+T} \mathfrak{B}(t) dt \right| < \\ < \frac{l}{2\pi^2\varepsilon} \int_{-T}^{+T} \left(\left| b(\theta'') - b\left(\theta'' + \frac{t}{2n}\right) \right| + \left| b(\theta') - b\left(\theta' + \frac{t}{n}\right) \right| \right) \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt \\ < \frac{A\varepsilon}{3\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = \frac{A\varepsilon}{3}.$$

Le rapprochement de (4), (4'), (5) établit (3) pour $|z' - z''| > \varepsilon$. D'ailleurs, pour $|z' - z''| \leq \varepsilon$,

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}(t) dt \right| < \frac{2A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = 2A,$$

et notre lemme se trouve démontré dans tous les cas.

5. Considérons alors l'expression

$$F(x) = \lim_{x \rightarrow x} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\tau^p(z) a(z) g(z)}{z - X} dz$$

où $\tau(z)$, $g(z)$ sont définis comme au no. 2 et où X est un point extérieur à C qui tend vers le point x de C le long d'un chemin non tangent à C en x : ainsi, on peut construire deux secteurs angulaires opposés, \mathfrak{A} , dont le sommet commun est x , dont les côtés font avec la tangente à C en x deux angles égaux à $2\alpha > 0$, et à l'extérieur desquels se trouve X pour $|X - x|$ assez petit. L'existence de la limite est d'ailleurs assurée quand $a(z) g(z)$ est lipschitzien le long de C ¹⁵). Si l'on pose $a_n(z) = b_n(\theta)$, l'existence de

$$F_n(x) = \lim_{x \rightarrow x} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\tau^p(z) [a_n(z) - a_n(x) + a(x)] g(z)}{z - X} dz$$

est donc assurée aussi pour tout n , et l'on peut encore introduire

$$(6) \quad F(x) - F_n(x) = \\ = \lim_{x \rightarrow x} \frac{1}{2\pi i} \int_C \tau^p(z) \frac{a(z) - a_n(z) - a(x) + a_n(x)}{z - x} \frac{z - x}{z - X} g(z) dz.$$

¹⁵) L'existence et la continuité lipschitzienne de la fonction limite ont été établies par J. Plemelj (loc. cit. (4), p. 209), dans l'hypothèse où X tend vers x suivant un chemin normal à C en x ; mais la limite existe encore (et reste la même) si X tend vers x le long d'un chemin quelconque (non tangent à C); Cf. HURWITZ-COURANT, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, 3te Auflage, Berlin, Springer, 1929, p. 330—335. EMILE PICARD, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, avec des applications à la Physique mathématique; Paris, Gauthier-Villars, 1927, p. 68.

Or construisons un couple de secteurs angulaires \mathfrak{U}' , de même définition que \mathfrak{U} , à cela près que 2α sera remplacé par α ; \mathfrak{U}' sera donc intérieur à \mathfrak{U} . Prenons encore de part et d'autre de x sur C deux points x' et x'' , à l'intérieur de \mathfrak{U}' et tels que sur l'arc $x'ax''$, ou γ' , on ait $|z - x| < \varepsilon$ (ε , arbitrairement petit > 0) et que la longueur de cet arc soit $< 4\varepsilon$; soit enfin γ'' l'arc complémentaire de γ' par rapport à C . Sur γ' on a:

$$\left| \frac{z - x}{z - X} \right| = \frac{\sin \hat{X}}{\sin \hat{x}} < \frac{1}{\sin \alpha},$$

et l'on peut choisir X assez voisin de x pour que sur γ'' on ait

$$\frac{z - x}{z - X} < 2.$$

Or, d'après le lemme (no. 4) et μ étant défini comme plus haut, il existe un entier $N(\varepsilon)$ tel que pour $n > N$

$$\left| \frac{a(z) - a_n(z) - a(x) + a_n(x)}{z - x} \right|$$

soit respectivement inférieur à $A\mu$ ou à $A\varepsilon\mu$, selon que z est sur γ' ou sur γ'' . Ainsi, le second membre de (6) est en module inférieur à

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{A\mu}{\sin \alpha} G \cdot 4\varepsilon + 2A\varepsilon\mu Gl \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{\sin \alpha} + l \right) \mu A G \varepsilon,$$

G désignant le maximum de $|g(z)|$ sur C ; et l'on pourra choisir ε assez petit pour que le second membre soit $< \frac{\eta}{2} G$, η étant le nombre figurant dans (1).

D'autre part, $\tau(z)$, $a_n(z)$ et $g(z)$ étant holomorphes dans l'aire comprise entre C et C_1 (No 2), on a

$$\begin{aligned} |F_n(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\tau^p(z)[a_n(z) - a_n(x) + a(x)]g(z)}{z - X} dz \right| \\ &< \frac{3Bl_1}{2\pi d} Gq^p, \end{aligned}$$

en désignant par B une borne supérieure de $|a(z)|$ et de $|a_n(z)|$ sur C , par l_1 la longueur de C_1 et par d la distance (C, C_1) ; et l'on pourra choisir p assez grand pour que le dernier membre soit

$$< \frac{\eta}{2} G.$$

En définitive, on pourra donc choisir p assez grand pour vérifier l'inégalité (1) de Birkhoff.

II. C est une circonférence; emploi des sommes de Fourier.

6. Comme il a été dit au No 3, nous supposons maintenant que le contour analytique C est une circonférence et nous appliquerons les théorèmes III et V de C. de la Vallée Poussin sur l'approximation par les sommes de Fourier ¹⁶⁾. Ces théorèmes ont pour but de limiter le reste de la série de Fourier d'une fonction dérivable $f(x)$; nous allons montrer d'abord que *les limitations fournies par ces théorèmes restent valables pour le reste de la série conjuguée*. Surmontons d'un trait toutes les notations qui se rapportent à la conjuguée de la série de Fourier de $f(x)$. Nous pourrions énoncer d'abord le

THÉORÈME III. Si $f(x)$, de période 2π , admet une dérivée d'ordre r , intégrable et de module $< M_r$, on a pour le reste \bar{R}_n de la série de Fourier conjuguée de celle de $f(x)$:

$$|\bar{R}_n(x)| < (B_1 \log n + C_1) \frac{M_r}{n^r},$$

B_1 et C_1 étant des constantes numériques indépendantes de $f(x)$.

En effet, soit σ_k la somme de Fourier d'ordre k de $f^{(r)}(x)$; suivant que r est pair ($= 2q$) ou impair ($= 2q + 1$), on a respectivement:

$$\bar{R}_n = (-1)^q \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\bar{\sigma}_k - \bar{\sigma}_{k-1}}{k^r} \text{ ou } \bar{R}_n = (-1)^q \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{k^r}$$

On retombe donc, avec intervention de parités, sur les deux cas envisagés par C. de la Vallée Poussin ¹⁷⁾ pour l'évaluation de R_n .

Nous n'utiliserons ce théorème que pour $r = 1$ et $r = 2$.

THÉORÈME V. Si $f(x)$, de période 2π , admet une dérivée première ¹⁸⁾ dont le module de continuité est $\omega_1(\delta)$, on a

$$|\bar{R}_n| < |B_2 \log n + C_2| \frac{\omega_1\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n},$$

B_2 et C_2 étant des constantes numériques indépendantes de $f(x)$.

En effet, d'après le théorème III, la série conjuguée de la série de Fourier de $f(x)$ est convergente; soit $\bar{f}(x)$ sa somme; avec les

¹⁶⁾ *loc. cit.* (14), p. 23 et 27.

¹⁷⁾ *loc. cit.* (14), p. 23 et 24.

¹⁸⁾ Le théorème s'étend au cas d'une dérivée d'ordre quelconque.

notations de C. de la Vallée Poussin ¹⁹⁾, on a $\bar{f} = \overline{f - F} + \bar{F}$. Or d'après le théorème III (pour $r = 1$) le reste de $\overline{f - F}$ est en module $< (B_1 \log n + C_1) \frac{2\omega_1(\delta)}{n}$. On verrait de même (théorème III pour $r = 2$) que le reste de \bar{F} est inférieur en module à

$$(B_1 \log n + C_1) \frac{1}{n^2} \frac{\omega_1(\delta)}{\delta},$$

et la démonstration s'achève exactement comme pour le théorème V de C. de la Vallée Poussin.

7. Cela étant, nous allons évaluer l'expression

$$I_p(x) = \lim_{X \rightarrow x} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p a(z)}{z - X} dz$$

où p est un entier ≥ 0 , où $a(z)$ est définie sur $C(|z| = 1)$ et lip-schitzienne, et où X tend vers x comme au no. 5. Posons sur $C : z = e^{i\theta}$, $a(z) = b(\theta)$; $R[b(\theta)]$ et $R[ib(\theta)]$ sont deux fonctions périodiques, continues, à variation bornée, donc développables en séries de Fourier uniformément convergentes pour tout θ .

Il en est de même de $b(\theta)$ et l'on peut écrire $b(\theta) = \sum_0^\infty s_\nu$, avec

$$(7) \quad s_\nu = a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta,$$

$$\begin{aligned} I_p(x) &= \lim_{X \rightarrow x} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p \sum_{\nu=0}^\infty s_\nu}{z - X} dz \\ &= \lim_{X \rightarrow x} \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^\infty \int_C \frac{z^p [a_\nu(z^\nu + z^{-\nu}) - ib_\nu(z^\nu - z^{-\nu})]}{2(z - X)} dz \\ &= \lim_{X \rightarrow x} \left[- \sum_{\nu=p+1}^\infty \frac{a_\nu + ib_\nu}{2} X^{p-\nu} \right] \end{aligned}$$

Or pour $X = x$ cette dernière série est convergente et a pour somme $-\frac{x^p}{2} [R_p(x) + i\bar{R}_p(x)]$, R_p et \bar{R}_p désignant les restes de la série de Fourier de $b(\theta)$ et de sa conjuguée; d'après le théorème d'Abel (applicable, puisque le chemin décrit par X n'est pas tangent à C), on a donc ²⁰⁾

¹⁹⁾ *loc. cit.* (14), p. 28.

²⁰⁾ Voir la note (15) page 6.

$$(8) \quad I_p(x) = -\frac{x^p}{2} [R_p(x) + i\bar{R}_p(x)];$$

ainsi, la limite est continue (et lipschitzienne) sur C .

8. Considérons maintenant l'intégrale

$$F(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p a(z) g(z)}{z - X} dz;$$

nous supposons que 1°) la fonction $a(z)$, définie sur C , non seulement est lipschitzienne, mais possède sur C une dérivée lipschitzienne; 2°) la fonction

$$(9) \quad g(z) = \sum_0^{\infty} H_n z^n$$

est holomorphe à l'intérieur de C , continue et lipschitzienne sur C ²¹); le long de C (9) est la série de Fourier d'une fonction continue à variation bornée, donc converge uniformément; on sait d'ailleurs que

$$(10) \quad |H_n| \leq M_1,$$

M_1 étant le maximum de $|g(z)|$ pour $|z| \leq 1$. Or, en vertu de la convergence uniforme de (9) sur C , on a, (X tendant vers x comme plus haut, et $F(x)$ désignant la limite de $F(X)$):

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{X \rightarrow x} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p a(z) \sum_{n=0}^{\infty} H_n z^n}{z - X} dz \\ &= \lim_{X \rightarrow x} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} H_n \int_C \frac{z^{p+n} a(z)}{z - X} dz, \end{aligned}$$

soit, d'après (8):

$$(11) \quad F(x) = -\frac{x^p}{2} \sum_{n=0}^{\infty} H_n [R_{p+n}(x) + i\bar{R}_{p+n}(x)].$$

Pour justifier la seconde interversion des limites, il suffit de montrer que, X tendant vers x , l'expression

²¹) Donc aussi $a(z)g(z)$ et, par suite, la limite $F(x)$ définie plus bas. Cette propriété est importante pour l'application aux approximations successives de G. D. Birkhoff: elle montre, par récurrence, que toutes les fonctions P_m, Q_m , [loc. cit. (7), p. 527] sont lipschitziennes sur C ; l'hypothèse qu'on vient de faire sur $g(z)$ sera donc toujours vérifiée dans ces approximations.

$$J_n = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=n}^{\infty} H_{\nu} \int_C \frac{z^{\nu+\nu} a(z)}{z-X} dz$$

reste arbitrairement petite en module pour n assez grand. Or $\varrho_n(z)$ désignant le reste de la série (9), uniformément convergente sur C , on a

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p a(z) \varrho_n(z)}{z-X} dz \\ &= \frac{x^p a(x)}{2\pi i} \int_C \frac{\varrho_n(z) dz}{z-X} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p a(z) - x^p a(x)}{z-x} \frac{z-x}{z-X} \varrho_n(z) dz. \end{aligned}$$

Mais la première intégrale du dernier membre est nulle. Pour évaluer la seconde, on écrira

$$\frac{z^p a(z) - x^p a(x)}{z-x} = \frac{z^p - x^p}{z-x} a(z) + x^p \frac{a(z) - a(x)}{z-x},$$

et l'on décomposera C , comme au no. 5, en deux arcs γ' et γ'' ; sur ces arcs, on évaluera $|z-x| : |z-X|$ comme au no. 5, et, en remarquant que $a(z)$ est bornée et lipschitzienne, et que $|\varrho_n(z)|$ est uniformément petit sur C pour n assez grand, on en déduira sans peine la propriété annoncée.

Or, d'après le théorème V de C de la Vallée Poussin et d'après son conjugué, on a

$$(12) \quad |R_{p+n}(x)| \text{ et } |\bar{R}_{p+n}(x)| < M_2 \frac{B_3 \log(p+n) + C_3}{(p+n)^2},$$

M_2 étant la borne supérieure de $|b'(\theta'') - b'(\theta')| : |\theta'' - \theta'|$, et B_3, C_3 étant des constantes numériques. Il vient alors, d'après (11), (10) et (12) (et pour $p > 0$)

$$|F(x)| < M_1 M_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_3 \log(p+n) + C_3}{(p+n)^2} < M_1 M_2 \frac{B_4 \log p + C_4}{p},$$

B_4 et C_4 étant de nouvelles constantes numériques, et ceci établit l'inégalité (1) de Birkhoff avec $\eta = K \frac{\log p}{p}$ [K , indépendant de p et de $g(x)$].

III. C est une circonférence; emploi des sommes de Fejér.

9. Les notations étant les mêmes qu'au no. 7, mais la dérivée $a'(z)$ étant supposée lipschitzienne comme au no. 8, nous désig-

nerons la $n^{\text{ème}}$ somme de Fejér de $a(z) = b(\theta)$ par $a_n(z) = b_n(\theta)$, soit

$$a_n(z) = s_0(z) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) s_1(z) + \dots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) s_{n-1}(z),$$

la notation $s(z)$ signifiant que la somme (7) a été calculée pour tel que $z = e^{i\theta}$. Posons encore

$$I_{p,n}(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p a_n(z)}{z - X} dz,$$

et

$$I_{p,n}(x) = \lim_{X \rightarrow x} I_{p,n}(X),$$

X tendant toujours vers x comme au no. 5; soit enfin

$$\bar{s}_p = -a_p \sin p\theta + b_p \cos p\theta,$$

$\bar{s}_p(x)$ désignant la somme précédente, calculée en θ tel que $e^{i\theta} = x$; il viendra, par un calcul analogue à celui du no. 7:

$$I_{p,n}(x) = -\frac{x^p}{2} \left\{ \left(1 - \frac{p+1}{n}\right) [s_{p+1}(x) + i\bar{s}_{p+1}(x)] + \dots \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) [s_{n-1}(x) + i\bar{s}_{n-1}(x)] \right\}.$$

Faisant encore

$$s_0(x) + \dots + s_p(x) = S_p, \bar{s}_0(x) + \dots + \bar{s}_p(x) = \bar{S}_p,$$

on trouvera

$$I_{p,n}(x) = -\frac{x^p}{2} A,$$

avec

$$A = -\left(1 - \frac{p+1}{n}\right) (S_p + i\bar{S}_p) + \frac{1}{n} (S_{p+1} + i\bar{S}_{p+1} + \dots + S_{n-1} + i\bar{S}_{n-1}).$$

Mais, pour $p > 0$

$$a_p + ib_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} b(u) e^{pu} du,$$

d'où, θ se rapportant désormais au point x :

$$s_p(x) + i\bar{s}_p(x) = (a_p + ib_p) e^{-pi\theta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} b(\theta + t) e^{pit} dt,$$

et pour $\nu = 0$ on divisera le dernier membre par 2. Ainsi:

$$S_\nu + i\bar{S}_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} b(\theta + t) \frac{e^{(\nu+\frac{1}{2})it} - \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} dt \quad (\nu \geq 0),$$

puis

$$S_{p+1} + i\bar{S}_{p+1} + \dots + S_{n-1} + i\bar{S}_{n-1} = \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\theta + t) \left[\frac{e^{(p+1)it} - e^{nit}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} + i(n-p-1) \cot \frac{t}{2} \right] dt,$$

et

$$A = \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2\pi} b(\theta + t) \left[i(n-p-1) \frac{e^{(p+\frac{1}{2})it} - \cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{e^{(p+1)it} - e^{nit}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} + i(n-p-1) \cot \frac{t}{2} \right] dt,$$

soit encore

$$A = \frac{1}{4n\pi} \int_0^{2\pi} b(\theta + t) [(n-p)e^{(p+1)it} - (n-p-1)e^{pit} - e^{nit}] \frac{dt}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

et, en utilisant la transformation ²²⁾ de C. de la Vallée Poussin:

$$(18) \quad A = \frac{1}{n\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b(\theta + t) [(n-p)e^{(p+1)it} - (n-p-1)e^{pit} - e^{nit}] \frac{dt}{t^2}.$$

10. Afin d'obtenir la valeur de $I_p(x)$ (no. 7), nous calculerons d'abord $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{p,n}(x)$, et pour cela nous allons transformer l'expression de A. Soit d'abord $p > 0$, et posons

$$h(t) = \frac{1}{n\pi} (p+1)(n-p)b\left(\theta + \frac{t}{p+1}\right), \\ k(t) = -\frac{1}{n\pi} p(n-p-1)b\left(\theta + \frac{t}{p}\right), \\ l(t) = -\frac{1}{\pi} b\left(\theta + \frac{t}{n}\right);$$

on peut écrire

$$(14) \quad n\pi A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right),$$

²²⁾ loc. cit. (14), p. 31.

l'intégrand étant le même que dans (13); remplaçant successivement t par $t: p+1$, $t: p$ et $t: n$ dans les trois intégrales dont la somme constitue d'après (13) chacune des deux intégrales (14), nous aurons

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [A_1(\varepsilon) + A_2(\varepsilon)],$$

avec

$$A_1(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{-n\varepsilon} [h(t) + k(t) + l(t)] \frac{e^{it}}{t^2} dt + \int_{n\varepsilon}^{+\infty},$$

$$A_2(\varepsilon) = \int_{-n\varepsilon}^{-(p+1)\varepsilon} h(t) \frac{e^{it}}{t^2} dt + \int_{(p+1)\varepsilon}^{n\varepsilon} \\ + \int_{-n\varepsilon}^{-p\varepsilon} k(t) \frac{e^{it}}{t^2} dt + \int_{p\varepsilon}^{n\varepsilon}$$

(ici et plus loin chaque intégrand non écrit est identique au précédent). Or, $b(\theta)$ vérifiant par hypothèse une relation

$$(15) \quad |b'(\theta_2) - b'(\theta_1)| < M_2 |\theta_2 - \theta_1|,$$

on trouve en intégrant $\int_0^t b'(\theta + u) du$:

$$(16) \quad b(\theta + t) = b(\theta) + tb'(\theta) + \frac{\lambda M_2}{2} t^2$$

($|\lambda| < 1$), et cette formule, jointe à l'identité

$$(p+1)(n-p) \int_{(p+1)\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{dt}{t^2} - p(n-p-1) \int_{p\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{dt}{t^2} = 0,$$

montre que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_2(\varepsilon) = 0$. On en déduit, pour $p > 0$

$$(17)_p \quad I_{p,n}(x) = -\frac{x^p}{2n\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(p+1)(n-p) b\left(\theta + \frac{t}{p+1}\right) - \right. \\ \left. - p(n-p-1) b\left(\theta + \frac{t}{p}\right) - n b\left(\theta + \frac{t}{n}\right) \right] \frac{e^{it}}{t^2} dt,$$

et, à l'aide de (16), on pourra vérifier que le second membre a bien un sens. D'autre part, pour $p = 0$ on trouve par un calcul analogue $A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(\varepsilon)$, avec

$$A(\varepsilon) = A_3(\varepsilon) + A_4(\varepsilon),$$

$$A_3(\varepsilon) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \left[b(\theta+t)(ne^{it} - n+1) - nb\left(\theta + \frac{t}{n}\right)e^{it} \right] \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{n\pi} \int_{\varepsilon}^{+\infty} ,$$

$$A_4(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{-\infty} b\left(\theta + \frac{t}{n}\right)e^{it} \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon}^{n\varepsilon} .$$

Or, dans le voisinage de $t = 0$ la partie principale de l'intégrand relatif à $A_3(\varepsilon)$ est $(1-n)t^{-2}b(\theta)$ [d'après (16); — on a négligé les termes en t^{-1} , car leurs contributions se détruisent dans la somme des deux intégrales qui constitue $A_3(\varepsilon)$]. Ceci nous conduit à écrire

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{n\pi} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \left[b(\theta+t)(ne^{it} - n+1) + (n-1)b(\theta) - \right. \\ \left. - nb\left(\theta + \frac{t}{n}\right)e^{it} \right] \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{n\pi} \int_{\varepsilon}^{+\infty} + A_4(\varepsilon) + \frac{2(1-n)}{n\pi\varepsilon} b(\theta) .$$

On vérifie aisément que la somme des deux derniers termes tend vers 0 avec ε , et l'on trouve ainsi

$$(17)_0 \quad I_{n,0}(x) = -\frac{1}{2n\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[b(\theta+t)(ne^{it} - n+1) + \right. \\ \left. + (n-1)b(\theta) - nb\left(\theta + \frac{t}{n}\right)e^{it} \right] \frac{dt}{t^2} .$$

Les intégrales $(17)_p$ et $(17)_0$ étant uniformément convergentes, quel que soit n , on peut écrire

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} I_{p,n}(x) = -\frac{x^p}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(p+1)b\left(\theta + \frac{t}{p+1}\right) + \right. \\ \quad \left. - pb\left(\theta + \frac{t}{p}\right) - b(\theta) \right] \frac{e^{it}}{t^2} dt \quad (p > 0), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} I_{0,n}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [b(\theta+t) - b(\theta)] \frac{e^{it} - 1}{t^2} dt. \end{array} \right.$$

11. Or il est facile de voir que, pour $p \geq 0$, et X tendant toujours vers x comme au no. 5:

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{X \rightarrow x} I_{p,n}(X) = \lim_{X \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} I_{p,n}(X)$$

La valeur du premier membre est donnée par (18), et le second n'est autre que $I_p(x)$, puisque $a_n(z)$ converge uniformément vers

$a(z)$ le long de C . Or pour établir (19) il suffit de montrer que, X tendant vers x ,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C z^p \frac{a(z) - a_n(z)}{z - X} dz \right|$$

reste arbitrairement petit pour n assez grand, ou encore qu'il en est de même de

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p [a(z) - a_n(z) - a(x) + a_n(x)]}{z - X} dz;$$

mais c'est précisément l'un des résultats démontrés au no. 5. On a donc en définitive:

$$(20) \quad \begin{cases} I_p(x) = -\frac{x^p}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(p+1) b\left(\theta + \frac{t}{p+1}\right) - pb\left(\theta + \frac{t}{p}\right) - b(\theta) \right] \frac{e^{it}}{t^2} dt, & (p > 0), \\ I_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [b(\theta + t) - b(\theta)] \frac{e^{it} - 1}{t^2} dt. \end{cases}$$

En utilisant la transformation inverse de celle qui a été rappelée plus haut ²³⁾ on pourrait remplacer ces intégrales par d'autres, prises entre 0 et 2π .

12. Nous allons évaluer les intégrales (20). Supposons d'abord $p > 0$ et posons

$$\mathfrak{F}(t) = (p+1) b\left(\theta + \frac{t}{p+1}\right) - pb\left(\theta + \frac{t}{p}\right) - b(\theta);$$

nous subdiviserons $(-\infty, +\infty)$ en intervalles d'étendue $2p(p+1)\pi$, et pour

$$2kp(p+1)\pi \leq t < 2(k+1)p(p+1)\pi$$

nous poserons

$$t = 2p(p+1)\pi(v+k),$$

v variant de 0 à 1. D'après (16) il existe M_1 tel que

$$(21) \quad |b(\theta + h) - b(\theta)| < M_1 |h|,$$

²³⁾ Voir la note (14) page 5.

et l'on trouvera pour $k \geq 0$: $|\mathfrak{F}(t)| < 4pM_1\pi v$, d'où, pour $k \geq 1$,

$$\left| \int_{2kp(p+1)\pi}^{2(k+1)p(p+1)\pi} \mathfrak{F}(t) \frac{e^{it}}{t^2} dt \right| < \frac{2M_1}{p+1} \int_0^1 \frac{v dv}{(v+k)^2} < \frac{M_1}{p+1} \frac{1}{k^2};$$

pour $k \leq -1$, on obtiendrait une limitation analogue. Pour $k = 0$, le même changement de variable donnera

$$\left| \int_1^{2p(p+1)\pi} \mathfrak{F}(t) \frac{e^{it}}{t^2} dt \right| < \frac{2M_1}{p+1} \int_{\frac{1}{2p(p+1)\pi}}^1 \frac{dv}{v} = \frac{2M_1}{p+1} \log [2p(p+1)\pi],$$

et l'on procédera de même pour l'intervalle $[-2p(p+1)\pi, -1]$. On a enfin, d'après (16) et avec $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$:

$$\left| \int_{-1}^{+1} \mathfrak{F}(t) \frac{e^{it}}{t^2} dt \right| < \frac{M_2}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{|\lambda_1|}{p+1} + \frac{|\lambda_2|}{p} \right) dt < \frac{2M_2}{p},$$

d'où finalement:

$$|I_p(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{F}(t) \frac{e^{it}}{t^2} dt \right| < \frac{2M_1}{p+1} \left\{ \frac{\pi^2}{6} + 2 \log [p(p+1)\pi] \right\} + \frac{2M_2}{p},$$

expression qui, pour p assez grand est $< 9 M_1 p^{-1} \log p$: pour $g(z) \equiv 1$ la méthode des nos 6—8 aurait conduit à une limitation du type précédent.

En ce qui concerne $(20)_2$ on subdivise $(-\infty, +\infty)$ par les points $t = 2k\pi$, et pour $2k\pi \leq t < 2(k+1)\pi$ (sauf pour $|t| < 2\pi$) on posera $t = 2\pi(k+v)$; on obtiendra ainsi, d'après (21)

$$|I_0(x)| < \frac{M_1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{M_1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|e^{it} - 1|}{t} dt = DM_1,$$

D étant une certaine constante numérique ($< 2 + \frac{\pi}{6} < 3$).

On notera que, lorsque C est une circonférence, les limitations obtenues pour $I_0(x)$ et $I_p(x)$ sont indépendantes du module maximum de $a(x)$; il devait bien en être ainsi, *a priori*, car l'addition d'une constante quelconque à $a(z)$ change ce module, mais ne modifie pas $I_p(X)$ ($p \geq 0$), ni, par conséquent, $I_p(x)$.

IV. Remarques complémentaires.

13. La formule $(20)_2$ montre que si $b(\theta)$ — ou $a(z)$ — possède une dérivée lipschitzienne, $I_0(x)$ admet une dérivée continue, et ceci complète un résultat de J. Plemelj ²⁴).

²⁴) Voir la note (15), page 6.

En effet, posons

$$J(\theta) = I_0(e^{i\theta}),$$

$$\Delta_2 b = b(\theta + t + h) - b(\theta + t) - b(\theta + h) + b(\theta),$$

il viendra, avec $\varepsilon > 0$:

$$(22) \quad \frac{J(\theta + h) - J(\theta)}{h} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\Delta_2 b}{h} \frac{e^{it} - 1}{t^2} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \\ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\Delta_2 b}{ht} \frac{e^{it} - 1}{t} dt.$$

Or, d'après (15)

$$(23) \quad |\Delta_2 b| = \left| \int_0^h [b'(\theta + t + u) - b'(\theta + u)] du \right| < M_2 |th|;$$

on peut donc choisir ε assez petit pour que la dernière intégrale de (22) soit, en module, arbitrairement petite; cela fait, on pourra prendre $|h|$ assez petit pour que les deux autres intégrales de (22), qui sont uniformément convergentes, aient une somme arbitrairement voisine de

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} [b'(\theta + t) - b'(\theta)] \frac{e^{it} - 1}{t^2} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{+\infty};$$

on en déduit aussitôt:

$$J'(\theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [b'(\theta + t) - b'(\theta)] \frac{e^{it} - 1}{t^2} dt.$$

En subdivisant cette intégrale comme dans (22), et en procédant comme tout à l'heure, on établira la continuité de $J'(\theta)$. Mais $J'(\theta) = iI'_0(x) e^{i\theta}$; on peut donc écrire:

$$I'_0(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} [b'(\theta + t) - b'(\theta)] \frac{e^{i(t-\theta)} - e^{-i\theta}}{t^2} dt.$$

Enfin, en appliquant (20)₂ à $b_1(\theta) = e^{i\theta} b(\theta)$, on verrait que $I_p(x)$ possède aussi une dérivée continue, qu'on peut obtenir d'ailleurs à partir de (20)₁.

14. D'après J. Plemelj²⁵⁾ on a, avec les notations du No. 7,

$$(24) \quad I_0(x) = -\frac{1}{2} a(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a(z)}{z - x} dz.$$

²⁵⁾ loc. cit. (4), p. 207.

l'intégrale surlignée étant considérée comme une valeur principale au sens de Cauchy. Il est aisé de montrer que cette formule équivaut à (8), pour $p = 0$. On a, en effet,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a(z)}{z-x} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a(z) - a(x)}{z-x} dz + \frac{a(x)}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{z-x};$$

mais la première intégrale de second membre est une intégrale au sens habituel, et la seconde est égale à πi . Le second membre de (24) est donc égal à

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{a(z) - a(x)}{z-x} dz,$$

ou, en vertu de la convergence uniforme de Σs_n (no. 7) sur C , à

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_1^\infty \int_C \frac{a_n(z^n + z^{-n} - x^n - x^{-n}) - ib_n(z^n - z^{-n} - x^n + x^{-n})}{2(z-x)} dz.$$

Le calcul du résidu pour $x = 0$ est immédiat, et l'on retrouve bien

$$I_0(x) = -\frac{1}{2} \sum_1^\infty (a_n + ib_n) x^{-n},$$

c'est à dire l'expression (8) pour $p = 0$. On vérifierait de même (8) pour p quelconque.

15. Il résulte de (23) que si $b'(\theta)$ est lipschitzienne, $|t^{-1}h^{-1}\Delta_2 b|$ est borné. Mais *on peut établir la réciproque*, comme me l'ont communiqué, en même temps (juillet 1945), et indépendamment l'un de l'autre, M. G. Choquet et M. Pauc. Voici la démonstration de Choquet.

Remarquons que la condition

$$\left| \frac{f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)}{hk} \right| \leq M$$

peut s'écrire

$$(25) \quad \left| \frac{f(y+h) - f(y)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq M |y-x|$$

Ceci entraîne que, pour tout h , $\varphi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est une fonction continue à pentes bornées par M . Les $\varphi_h(x)$ forment donc une famille également continue. Soit $\varphi(x)$ une fonction limite pour h tendant vers 0 d'une sous-famille des $\varphi_h(x)$; on a: soit $\varphi(x)$

continue, soit $\varphi(x) = +\infty$, soit $\varphi(x) = -\infty$. Mais ces deux dernières hypothèses ne sont pas réalisées, car, par exemple, une fonction continue ne peut avoir en tout point un nombre dérivé à droite égal à $+\infty$. L'intégrale $\int \varphi(x)dx$ est égale à $f(x)$, à une constante près; donc $f(x)$ a bien une dérivée²⁸) continue, $\varphi(x)$. Et $\varphi(x)$, qui est limite uniforme de fonctions à pentes $\leq M$ est elle même à pente $\leq M$.

La démonstration de Pauc part aussi de (25) et procède ainsi: Soit $x_1 = x + h_1, \dots, x_n = x + h_n, \dots$, une suite convergeant vers x et donnant naissance au nombre dérivé (fini ou infini) $d_r(x)$, c'est à dire telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n}$$

existe et est égale à $d_r(x)$. Comme conséquence de (25) nous pouvons affirmer que le quotient

$$\frac{f(y + h_n) - f(y)}{h_n}$$

convergera vers $+\infty$ (respect. $-\infty$) si $d_r(x) = +\infty$ (respect. $-\infty$), ou bien qu'il admettra des limites finies distantes au plus de $M |y - x|$ de $d_r(x)$ si ce dernier nombre est fini; si donc, pour une seule valeur de x il existe un nombre dérivé égal à $+\infty$ (respect. $-\infty$), il en est de même *partout*. Cette éventualité étant à exclure, nous déduirons de (25) que *l'ensemble $\Delta(x)$ des nombres dérivés de $f(x)$ en un point quelconque x de l'intervalle est borné.*

En outre, la considération des suites associées $x + h_1, \dots, x + h_n, \dots$ et $y + h_1, \dots, y + h_n, \dots$ nous montre qu'à tout élément de $\Delta(x)$ se laisse associer *au moins* un élément de $\Delta(y)$ distant de lui au plus de $M |y - x|$. Les valeurs x et y jouant un rôle symétrique, nous en déduisons que la distance de $\Delta(x)$ à $\Delta(y)$ au sens de Hausdorff est $M |y - x|$. $\Delta(x)$ est une fonction lipschitzienne, donc continue, de x et il en est de même du dérivé supérieur, égal à la borne supérieure de $\Delta(x)$, et du dérivé inférieur. f est une fonction à dérivés extrêmes lipschitziens, donc une fonction continue admettant partout une dérivée $f'(x)$ finie lipschitzienne.

(Reçu le 14 Janvier 1950).

²⁸) Cf. J. DIEUDONNÉ, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. (3), 61, 1944, p. 232.