M. J. DUBOURDIEU

Sur un théorème de M. S. Bernstein relatif à la transformation de Laplace-Stieltjes

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 96-111
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__96_0>

Sur un théorème de M. S. Bernstein relatif à la transformation de Laplace-Stieltjes

par

M. J. Dubourdieu

Paris

Introduction.

J'ai indiqué dans deux Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie [1]), comment s'introduit, tout naturellement, dans certaines questions de calcul des probabilités relatives à la théorie mathématique de l'assurance-accidents (et plus généralement du processus stochastique discontinu), la notion de „fonction absolument monotone".

Les fonctions de cette espèce ont été étudiées d'une manière approfondie par M. S. Bernstein dans un mémoire paru en 1928 aux Acta Mathematica. — Dans la première partie de ce mémoire l'auteur s'attache plus particulièrement à l'étude des fonctions absolument monotones croissantes, sur tout le demi-axe négatif, et démontre notamment qu'une telle fonction $f(x)$ peut être mise sous la forme de l'intégrale de Stieltjes

$$\text{(I)} \qquad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda x} d\Phi(\lambda),$$

où $\Phi(\lambda)$ est une fonction non-décroissante.

Corrélativement, on en conclut que toute fonction $f(x)$ absolument monotone décroissante sur tout l'axe des x positifs est nécessairement la „transformée de Laplace-Stieltjes" d'une fonction $\Phi(\lambda)$ non décroissante, c'est-à-dire qu'elle peut être mise sous la forme de l'intégrale de Stieltjes:

$$\text{(I)}' \qquad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi(\lambda).$$

Outre que ce dernier résultat constitue l'un des théorèmes les

---

[1]) Remarques relatives à la théorie de l'assurance-accidents [C. R. Paris **206** (1938), 303—305, 556—557].

plus simples de la transformation de Laplace-Stieltjes, il joue un rôle intéressant dans la théorie mathématique de l'assurance-accidents invoquée plus haut.

Or dans le mémoire de M. S. Bernstein, sa démonstration repose sur une étude préalable, assez complexe, relative d'une part à certaines propriétés générales des fonctions absolument monotones, et d'autre part à leur approximation par des polynomes exponentiels.

C'est pourquoi j'ai pensé qu'il y avait quelque intérêt à signaler que l'on en peut donner une démonstration directe très simple, laquelle conduit d'ailleurs à compléter ce théorème par une proposition qui m'a semblé inédite, relative à l'inversion des relations (I) et (I)' dans le domaine réel.

En vue des applications à la théorie mathématique de l'assurance-accidents, qui ont été à l'origine des résultats exposés dans le présent article, et sur lesquelles nous nous proposons de revenir par ailleurs, nous raisonnerons dans ce qui suit, sur le cas d'une fonction absolument monotone décroissante sur le demi-axe positif. Et tout d'abord nous rappellerons brièvement quelques propriétés essentielles de ces fonctions.

I

Généralités sur les fonctions absolument monotones.

Definition. *Une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle* $(0, c>0)$ *sera dite absolument monotone (décroissante) dans cet intervalle, si elle y est indéfiniment dérivable et si l'on a dans ledit intervalle, quel que soit n:*

$$(1) \quad (-1)^n f^{(n)}(x) \geqq 0, \quad \left(f^{(0)}(x) \equiv f(x), \quad f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n f(x)}{dx^n}\right).$$

Les fonctions $(-1)^n f^{(n)}(x)$ étant non négatives et non-croissantes tendent vers des valeurs finies bien déterminées lorsque x tend vers c. Ce sont les limites vers lesquelles tendent ainsi $f(x)$ et ses dérivées que l'on prendra comme valeurs de celles-ci pour $x = c$. Par contre il n'est pas exclu que lorsque x tend vers zéro la fonction ou ses dérivées puissent croître indéfiniment. On est ainsi amené à considérer la fonction comme absolument monotone dans l'intervalle semi-ouvert $0 < x \leqq c$.

On démontre aisément qu'une telle fonction est développable en série de Taylor suivant les puissance de $x - c$ avec un rayon de convergence au moins égal à c.

Autrement dit pour tout système de valeurs de x et X tel que $0 < x < X \leqq c$ on a:

$$(2) \qquad f(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(X-x)^n}{n!} f^{(n)}(X).$$

Nous ne reviendrons pas ici sur la démonstration de cette proposition classique pour laquelle nous renverrons le lecteur à l'ouvrage de M. S. Bernstein: Leçons sur les propriétés extrémales etc. (Collection des Monographies publiées sous la direction de M. E. Borel). Première Note pp. 496—497.

La fonction $f(x)$ est dite absolument monotone (décroissante) sur le demi-axe des $x > 0$, si les inégalités (1) sont satisfaites quel que soit $x > 0$. On constate d'ailleurs aisément que pour une telle fonction, on a nécessairement quel que soit $x > 0$:

$$(3) \qquad (-1)^n f^{(n)}(x) > 0.$$

En effet, dans ce cas, le développement en série de Taylor (2) et plus généralement le développement

$$(4) \qquad (-1)^\nu f^{(\nu)}(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+\nu} \frac{(X-x)^n}{n!} f^{(\nu+n)}(X),$$

reste valable quel que soit $X > x$. Dès lors, tous les termes du second membre de cette dernière identité étant par hypothèse $\geqq 0$, on aperçoit que si $f^{(\nu)}(x)$ s'annulait pour $x = \alpha$, les dérivées de $f(x)$ d'ordre $\geqq \nu$ seraient identiquement nulles pour $x > \alpha$. Mais alors pour $x > \alpha$, $f^{(\nu-1)}(x)$ se réduirait à une constante K_1, telle que $(-1)^{\nu-1}K_1 \geqq 0$. Si K_1 était différent de zéro, on aurait donc pour $x > \alpha$

$$f^{(\nu-2)}(x) = K_1 x + K_2,$$

et pour des valeurs de x assez grandes, $(-1)^{\nu-2} f^{(\nu-2)}(x)$ serait < 0 contrairement aux conditions (1). — Donc K_1 devrait être nul. En raisonnant ainsi de proche en proche, on en conclurait que pour $x > \alpha$, $f(x)$ devrait se réduire à une constante; mais alors en vertu de l'identité (2) où l'on ferait $X > \alpha$, on aperçoit que $f(x)$ serait constante pour toute valeur de $x \leqq \alpha$. Laissant de côté le cas banal où $f(x)$ se réduirait ainsi quel que soit $x > 0$, à une constante, on voit donc qu'une fonction absolument monotone sur tout le demi-axe des $x > 0$, ni aucune de ses dérivées ne peuvent s'annuler pour une valeur finie de x.

L'identité (2) que l'on peut écrire

$$(5) \qquad f(x) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1-\frac{x}{X}\right)^n \frac{X^n}{n!} f^{(n)}(X),$$

peut encore être mise sous la forme suivante

$$(5)' \qquad f(x) \equiv \int_0^{+\infty} \left(1-\frac{x}{X}\right)^{\lambda X} d\Phi_X(\lambda),$$

où $\Phi_X(\lambda)$ désigne la fonction définie par l'identité:

$$(6) \qquad \Phi_X(\lambda) \equiv \begin{cases} 0 \text{ pour } \lambda = 0 \\ \sum\limits_{0 \leqq n < X\lambda} (-1)^n \dfrac{X^n}{n!} f^{(n)}(X), \text{ pour } \lambda > 0. \end{cases}$$

C'est là une fonction non-décroissante, en escaliers, qui admet pour points de discontinuité les points $\lambda = \frac{n}{X}$ (n, entier $\geqq 0$) la valeur du saut au point $\lambda = \frac{n}{X}$ étant égale à $(-1)^n \frac{X^n}{n!} f^{(n)}(X) > 0$.

Pour une fonction absolument monotone sur tout le demi-axe $x > 0$, l'identité (5) reste valable quel que soit $X > x$. Or lorsque X croît indéfiniment, $\left(1-\frac{x}{X}\right)^{\lambda X}$ tend vers $e^{-\lambda x}$, et l'on est ainsi tout naturellement amené à se demander si, dans ces conditions, la fonction $\Phi_X(\lambda)$ ne tendrait pas elle-même vers une fonction $\Phi(\lambda)$ de telle manière qu'à la limite, pour $X = \infty$, cette identité (5)' se réduise à l'identité (I)'. On aperçoit comment ces considérations très simples suggèrent le théorème de M. S. Bernstein, que nous allons maintenant établir en toute rigueur.

II

Démonstration du théorème de M. S. Bernstein.

Théorème. *Toute fonction $f(x)$ absolument monotone (décroissante) sur tout le demi-axe des $x > 0$, peut être mise sous la forme*

$$(\mathrm{I})' \qquad f(x) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi(\lambda),$$

où $\Phi(\lambda)$ est une fonction non-décroissante de λ.

1. Nous démontrerons tout d'abord cette proposition en supposant que $f(x)$ tend vers une valeur finie $f(+0)$ lorsque x tend vers zéro par valeurs positives.

Dans ce cas l'identité (5) reste valable pour $x=0$, et par suite, $\Phi_X(\lambda)$ étant définie par l'identité (6) on a:

$$\Phi_X(+\infty) = f(+0) \tag{7}$$

quel que soit $X > 0$. — Autrement dit les fonctions $\Phi_X(\lambda)$ sont bornées dans leur ensemble.

Notons que pour toute valeur de $X > 0$, et toute valeur finie de $x \geqq 0$, on a

$$0 \leqq X - Xe^{-\frac{x}{X}} < X. \tag{8}$$

Substituant $X - Xe^{-\frac{x}{X}}$ à x dans l'identité (5)' il vient donc

$$f[X-Xe^{-\frac{x}{X}}] \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi_X(\lambda), \tag{9}$$

identité qui est satisfaite quels que soient $X > 0$ et $x \geqq 0$.

Lorsque X croît indéfiniment le premier membre de cette identité tend vers $f(x)$.

D'autre part, si l'on considère une suite de valeurs de X indéfiniment croissantes, soit $X_1 < X_2 < \ldots < X_n < \ldots$, les fonctions monotones $\Phi_{X_n}(\lambda)$ étant bornées en chaque point, dans leur ensemble, on sait [2]) que de la suite des dites fonctions on peut extraire une suite partielle, soit $\Phi_1(\lambda), \Phi_2(\lambda), \ldots, \Phi_i(\lambda), \ldots$ qui converge vers une fonction monotone $\Phi(\lambda)$ en tout point de continuité de cette dernière. Celle-ci satisfait d'ailleurs évidemment, tout comme les fonctions $\Phi_i(\lambda)$ aux inégalités:

$$0 \leqq \Phi(\lambda) \leqq f(+0). \tag{10}$$

Ceci dit, on aperçoit que le théorème I sera démontré, si l'on établit que pour toute valeur de $x > 0$, on peut choisir i assez grand pour que soit satisfaite l'inégalité:

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi_i(\lambda) - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi(\lambda) \right| \leqq \varepsilon. \tag{11}$$

---

[2]) Ce théorème a été démontré par M. P. Montel pour les fonctions monotones continues, puis étendu par M. Helly au cas des fonctions monotones quelconques. Cf. Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications, par E. Borel. Tome I, fascicule III, par M. Fréchet, p. 272.

Or, A désignant un nombre positif quelconque, on a:

$$(12)\quad \left|\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi_i(\lambda) - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi(\lambda)\right| \leqq \left|\int_0^{A} e^{-\lambda x} d\Phi_i(\lambda) - \int_0^{A} e^{-\lambda x} d\Phi(\lambda)\right| + \\ + \int_A^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi_i(\lambda) + \int_A^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi(\lambda).$$

Mais d'après (7) et (10) il vient:

$$\int_A^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi_i(\lambda) < f(+0)\, e^{-Ax}, \qquad \int_A^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi(\lambda) < f(+0)\, e^{-Ax}.$$

Si donc on considère une valeur donnée de $x > 0$, on peut choisir A assez élevé pour que les deux derniers termes du second membre de (12) soient inférieurs à $\frac{\varepsilon}{4}$, quel que soit i.

D'autre part, il vient, au moyen d'une intégration par parties:

$$(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{A} e^{-\lambda x} d\Phi_i(\lambda) = e^{-Ax}\, \Phi_i(A) + x \int_0^{A} e^{-\lambda x}\, \Phi_i(\lambda)\, d\lambda, \\ \displaystyle\int_0^{A} e^{-\lambda x} d\Phi(\lambda) = e^{-Ax}\, \Phi(A) + x \int_0^{A} e^{-\lambda x}\, \Phi(\lambda)\, d\lambda. \end{cases}$$

Mais on peut choisir A assez grand pour que, x étant supposé > 0 on ait:

$$e^{-Ax} \left|\Phi_i(\lambda) - \Phi(\lambda)\right| \leqq e^{-Ax}[\Phi_i(+\infty) + \Phi(+\infty)] \leqq 2f(+0) e^{-Ax} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

De telle sorte que finalement, il suffit pour retomber sur la relation (11) d'établir que l'on peut choisir i assez élevé pour que l'on ait

$$x \left|\int_0^{A} e^{-\lambda x}\, [\Phi_i(\lambda) - \Phi(\lambda)]\, d\lambda\right| \leqq \frac{\varepsilon}{4}$$

ou, ce qui revient au même, posant

$$\varphi_i(\lambda) = e^{-\lambda x}\, [\Phi_i(\lambda) - \Phi(\lambda)],$$

d'établir que l'on a

$$(14)\qquad \lim_{i=\infty} \left|\int_0^{A} \varphi_i(\lambda)\, d\lambda\right| = 0.$$

C'est ce qui découle du théorème bien connu de M. Lebesgue d'après lequel, „si les fonctions mesurables $f_n(x)$ bornées dans leur ensemble ont une limite $f(x)$, l'intégrale de $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$" [3]).

En effet les fonctions $\varphi_i(\lambda)$ sont intégrables au sens de Riemann (et par suite mesurables), et de plus elles sont bornées dans leur ensemble, en vertu de l'inégalité

$$|\varphi_i(\lambda)| \leqq e^{-\lambda x}[\Phi_i(+\infty) + \Phi(+\infty)] \leqq 2f(+0).$$

En outre la suite des fonctions $\Phi_i(\lambda)$ convergeant vers $\Phi(\lambda)$, sauf peut-être aux points de discontinuité de cette dernière, $\varphi_i(\lambda)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$, sauf peut-être en une infinité dénombrable de points. Et comme on ne change pas la valeur de l'intégrale qui figure dans la relation (14), en supposant $\varphi_i(\lambda)$ nulle sur cet ensemble dénombrable de points, on aperçoit que cette relation (14) découle immédiatement du théorème de M. Lebesgue énoncé ci-dessus.

Le théorème I est ainsi démontré, tout au moins dans le cas où $f(x)$ tend vers une valeur finie $f(+0)$ lorsque x tend vers zéro. — Pour le démontrer nous avons supposé $x > 0$. — Mais il est évident que si l'identité (I)$'$ est valable quel que soit $x > 0$, et si $f(x)$ tend vers une valeur finie $f(+0)$ lorsque x tend vers zéro, elle reste encore valable pour $x = 0$.

2. On vérifie d'ailleurs sans peine que le théorème I reste valable lorsque $f(x)$ croît indéfiniment avec $\frac{1}{x}$.

A cet effet rappelons tout d'abord que, $\Phi(\lambda)$ étant une fonction non-décroissante de λ, si l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi(\lambda) \tag{15}$$

converge pour $x = x_0$, elle converge uniformément pour toute valeur de $x \geqq x_0$. Il existe donc un nombre $\alpha \leqq x_0$, dit „abscisse de convergence de l'intégrale (15)", tel que cette intégrale diverge pour $x < \alpha_0$, et pour $x > \alpha_0$, représente une fonction analytique de x.

D'autre part si, x_0 désignant un nombre > 0, on pose $x = x_0 + y$, la fonction $\varphi(y) = f(x_0 + y)$ reste finie lorsque y tend vers zéro, et comme c'est une fonction absolument monotone de y, il existe une fonction non-décroissante $\Psi(\lambda)$ telle que l'on ait:

[3]) Cf. Lebesgue. Leçons sur l'intégration [Paris, Gauthier-Villars], p. 125.

$$\varphi(y) \equiv f[x_0+y] \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} d\Psi(\lambda).$$

Pour $x \geqq x_0$, on a donc

$$f(x) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} e^{\lambda x_0} d\Psi(\lambda),$$

et si l'on pose

$$\Phi(\lambda) \equiv \int_0^{\lambda} e^{\lambda x_0} d\Psi(\lambda),$$

on aperçoit que $\Phi(\lambda)$ est une fonction non-décroissante de λ, qui pour $x \geqq x_0$ vérifie l'identité

$$f(x) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Phi(\lambda). \tag{16}$$

Dès lors, $f(x)$ étant par hypothèse une fonction analytique de x sur le demi-axe $x > 0$, telle que $f(+0) = \infty$, il est évident que l'abscisse de convergence de l'intégrale du second membre est l'origine $x = 0$, et que cette dernière identité reste valable quel que soit $x > 0$.

3. Les raisonnements précédents prouvent simplement qu'il existe au moins une fonction non-décroissante $\Phi(\lambda)$ satisfaisant à l'identité (I)'. Nous allons établir dans ce qui suit que cette fonction est déterminée de manière unique, par la condition $\Phi(0) = 0$, étant entendu que l'on ne considère comme distinctes que deux fonctions qui diffèrent en au moins un de leurs points de continuité, convention bien naturelle puisque l'intégrale du second membre de (I)' ne change pas de valeur quand on modifie la valeur de $\Phi(\lambda)$ en un de ses points de discontinuité.

Cette propriété d'unicité découle du théorème II énoncé plus bas. — D'après celui-ci, toute fonction $\Phi(\lambda)$ satisfaisant à l'identité (I)' apparaît en effet, en chacun de ses points de continuité comme la limite pour $X = \infty$ de la fonction $\Phi_X(\lambda)$ définie par l'identité (6).

Dans le mémoire déjà cité, M. S. Bernstein démontre cette propriété d'unicité en remarquant que la définition de la fonction $f(x)$ s'étend d'elle-même au domaine complexe de la variable x au moyen de l'identité (I)', et s'appuyant sur une propriété classique de l'intégrale de Dirichlet. On en pourrait d'ailleurs aisément déduire par un raisonnement classique, tout au moins dans le cas où $f(+0)$ est fini, une démonstration par l'absurde du théorème II. Nous avons préféré dans ce qui suit, adopter une méthode directe, qui présente l'avantage de ne pas quitter le terrain des fonctions d'une variable réelle, et qui en outre nous fournira l'occasion d'énoncer un résultat (lemme I) qui joue dans la théorie du processus stochastique discontinu le même rôle que la formule de Laplace-Gauss relative à la théorie des épreuves répétées, en calcul des probabilités.

III

D'une formule d'inversion de l'intégrale de Laplace-Stieltjes.

1. Pour simplifier les notations, nous poserons dans ce qui suit, μ désignant un nombre > 0:

$$(17) \quad \pi_n(\mu x) \equiv e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^n}{n!}, \quad \psi(\lambda, \mu, x) \equiv \sum_{0 \leqq n < x\lambda} \pi_n(\mu x), \qquad (x>0)$$

$$(18) \qquad \sigma(\mu, x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{x} - \mu\right)^2 \pi_n(\mu x).$$

On s'assurera immédiatement que l'on a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n(\mu x) \equiv \mu x, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \pi_n(\mu x) \equiv \mu x\,[1+\mu x].$$

D'où l'on déduit:

$$(18)' \qquad \sigma(\mu, x) \equiv \frac{\mu}{x}.$$

Enfin nous poserons:

$$(19) \qquad \Pi_\alpha^\beta(\mu x) = \sum_{n=r}^{n=r'} \pi_n(\mu x),$$

r et r' désignant respectivement le plus petit et le plus grand des nombres entiers $n \geqq 0$, qui satisfont aux inégalités suivantes,

$$\alpha\sqrt{2\mu x} + \mu x \leqq n \leqq \mu x + \beta\sqrt{2\mu x}, \qquad (\alpha < \beta)$$

α et β étant deux nombres donnés quelconques.

2. Lemme I. *On a, α et β étant supposés indépendants de x:*

$$(20) \qquad \lim_{x=\infty} \Pi_\alpha^\beta(\mu x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-\xi^2} d\xi.$$

Nous n'insisterons pas longuement sur la démonstration de ce lemme, qui peut être calquée sur celle de la formule de Laplace-Gauß, relative à la théorie des épreuves répétées, en Calcul des probabilités.

Elle consiste tout d'abord posant

$$n = \mu x + \xi_n \sqrt{2\mu x} \tag{21}$$

et supposant que ξ_n reste borné, à rechercher une expression asymptotique de $\pi_n(\mu x)$ valable pour les grandes valeurs de x.

De la formule de Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, e^{-\varepsilon_n},$$

et de la définition (17) de $\pi_n(\mu x)$, on tire aisément la relation suivante:

$$\log \pi_n(\mu x) = -\log \sqrt{2\pi\mu x} + \xi_n \sqrt{2\mu x} - \\ - \left(\mu x + \xi_n \sqrt{2\mu x} + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \xi_n \sqrt{\frac{2}{\mu x}}\right) - \varepsilon_n.$$

Et si l'on pose

$$\log(1+u) = u - \frac{u^2}{2}[1 + \eta(u)], \qquad (\lim_{u=0} \eta(u) = 0),$$

il vient:

$$\log \pi_n(\mu x) = -\log \sqrt{2\pi\mu x} - \xi_n^2 - \frac{\xi_n}{\sqrt{2\mu x}} + \frac{\xi_n^2}{2\mu x} - \frac{\xi_n^3\sqrt{2}}{\sqrt{\mu x}} + \\ + \left(\mu x + \frac{1}{2} + \xi_n \sqrt{2\mu x}\right) \frac{\xi_n^2}{\mu x}\, \eta\left[\xi_n \sqrt{\frac{2}{\mu x}}\right] - \varepsilon_n.$$

Il en résulte que l'on a:

$$\pi_n(\mu x) \equiv \frac{e^{-\xi_n^2}}{\sqrt{2\pi\mu x}} [1 + o_n(x)],$$

$o_n(x)$ désignant une expression qui tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{x}$, pour toute valeur de n telle que ξ_n (défini par l'égalité 21) reste compris entre deux nombres fixes α et β.

De cette dernière remarque on déduit immédiatement que lorsque x croît indéfiniment, l'expression $\Pi_\alpha^\beta(\mu x)$ définie par l'identité (19) a même limite que la somme:

$$\sum_{n=r}^{n=r'} \frac{e^{-\xi_n^2}}{\sqrt{2\pi\mu x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=r}^{n=r'} e^{-\xi_n^2} [\xi_{n+1} - \xi_n],$$

et comme cette dernière tend manifestement vers l'intégrale du second membre de la relation (20), celle-ci est ainsi démontrée.

3. Lemme II. *On a*:

$$(22)\qquad \lim_{x=\infty} \psi(\lambda, \mu, x) = \lim_{x=\infty} \left\{ \sum_{0 \leqq n < x\lambda} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} \right\} = \begin{cases} 0 \text{ pour } \lambda < \mu \\ \frac{1}{2} \text{ pour } \lambda = \mu \\ 1 \text{ pour } \lambda > \mu. \end{cases}$$

a) *Cas* $\lambda < \mu$. De l'identité (18) découle l'inégalité

$$\sigma(\mu, x) \geqq \sum_{0 \leqq n < x\lambda} \left(\frac{n}{x} - \mu\right)^2 \pi_n(\mu x).$$

Et en remarquant que la somme du second membre est étendue à des valeurs de n pour lesquelles, en vertu de l'hypothèse $\lambda < \mu$, $\left(\frac{n}{x} - \mu\right)^2$ est supérieur à $(\lambda - \mu)^2$, il vient, compte tenu de (18)'

$$\frac{\mu}{x} \geqq (\mu \quad \lambda)^2 \sum_{0 \leqq n < x\lambda} \pi_n(\mu x) = (\mu - \lambda)^2 \psi(\lambda, \mu, x).$$

D'où, pour $\lambda < \mu$

$$(23)\qquad 0 \leqq \psi(\lambda, \mu, x) \leqq \frac{\mu}{(\lambda - \mu)^2 x}, \qquad (\lambda < \mu).$$

et par suite

$$\lim_{x=\infty} \psi(\lambda, \mu, x) = 0, \qquad \text{si } \lambda < \mu.$$

b) *Cas* $\lambda > \mu$. Dans ce cas on déduit de l'identité (18) par un raisonnement analogue, les inégalités suivantes:

$$\frac{\mu}{x} = \sigma(\mu, x) \geqq \sum_{n \geqq x\lambda} \left(\frac{n}{x} - \mu\right)^2 \pi_n(\mu x) \geqq (\lambda - \mu)^2 \sum_{n \geqq x\lambda} \pi_n(\mu x).$$

Et comme on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mu x) = \psi(\lambda, \mu, x) + \sum_{n \geqq x\lambda} \pi_n(\mu x) = 1,$$

il vient pour $\lambda > \mu$

$$(24)\qquad 1 - \frac{\mu}{(\lambda - \mu)^2 x} \leqq \psi(\lambda, \mu, x) \leqq 1.$$

D'où:

$$\lim_{x=\infty} \psi(\lambda, \mu, x) = 1, \quad \text{si } \lambda > \mu.$$

c) *Cas* $\lambda = \mu$. On a dans ce cas, β étant un nombre > 0 arbitraire

$$1 - \psi(\mu, \mu, x) = \sum_{n \geqq \mu x} \pi_n(\mu x) = \sum_{\mu x \leqq n \leqq \mu x + \beta\sqrt{2\mu x}} \pi_n(\mu x) + \sum_{n > \mu x + \beta\sqrt{2\mu x}} \pi_n(\mu x),$$

c'est-à-dire:

$$(25) \qquad 1 - \psi(\mu, \mu, x) = \Pi_0^\beta(\mu x) + \sum_{n > \mu x + \beta\sqrt{2\mu x}} \pi_n(\mu x).$$

Or on peut choisir β assez élevé, pour que quel que soit x, le dernier terme du second membre soit aussi petit qu'on le désire. C'est ce que l'on établit par le même raisonnement que ci-dessus, à partir des inégalités suivantes:

$$\frac{\mu}{x} = \sigma(\mu, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{x} - \mu\right)^2 \pi_n(\mu x) \geqq \sum_{n > \mu x + \beta\sqrt{2\mu x}} \left(\frac{n}{x} - \mu\right)^2 \pi_n(\mu x) \geqq$$

$$\geqq \beta^2 \frac{2\mu}{x} \sum_{n > \mu x + \beta\sqrt{2\mu x}} \pi_n(\mu x).$$

D'où:

$$\sum_{n > \mu x + \beta\sqrt{2\mu x}} \pi_n(\mu x) \leqq \frac{1}{2\beta^2}.$$

D'autre part, d'après le lemme I, β étant supposé fixe, on a

$$\lim_{x=\infty} \Pi_0^\beta(\mu x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\beta e^{-\xi^2} d\xi,$$

intégrale qui tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque β croît indéfiniment. — Il s'ensuit que l'on peut choisir β, puis x, assez élevés pour que le second membre de l'identité (25) diffère de $\frac{1}{2}$ d'aussi peu qu'on le désire. — On a donc bien:

$$\lim_{x=\infty} \psi(\mu, \mu, x) = \frac{1}{2}.$$

Le lemme II est ainsi démontré. — Il nous sera d'autre part utile pour la suite d'indiquer une autre borne supérieure de $\psi(\lambda, \mu, x)$. Considérons à cet effet l'expression suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \pi_n(\mu x) = e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\mu x}{e}\right)^n = e^{\left(\frac{\mu}{e} - \mu\right)x}.$$

On a

$$e^{\left(\frac{\mu}{e}-\mu\right)x} > \sum_{0\leqq n<x\lambda} e^{-n}\pi_n(\mu x) > e^{-x\lambda} \sum_{0\leqq n<x\lambda} \pi_n(\mu x) = e^{-x\lambda}\psi(\lambda, \mu, x).$$

D'où

$$\psi(\lambda, \mu, x) < e^{\left(\lambda-\mu+\frac{\mu}{e}\right)x}. \tag{26}$$

4. Théorème II. *La fonction absolument monotone $f(x)$ étant mise sous la forme* (I)′ *on a quel que soit* $\lambda > 0$, *et en supposant* $\Phi(0) = 0$,

$$\lim_{x=\infty}\left\{\sum_{0\leqq n<x\lambda} (-1)^n \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x)\right\} = \frac{\Phi(\lambda-0)+\Phi(\lambda+0)}{2}. \tag{27}$$

On notera que l'énoncé du lemme I n'est qu'un cas particulier de l'énoncé précédent, à savoir celui où $f(x)$ se réduit à l'exponentielle $e^{-\mu x}$. Pour cette dernière il est évident, en effet, que la relation (I)′ est satisfaite par la fonction $\Phi(\lambda)$ identique à zéro pour $\lambda < \mu$ et à l'unité pour $\lambda > \mu$.

a) Nous allons tout d'abord établir la relation (27) en supposant $\Phi(\lambda)$ continue au point λ.

L'intégrale qui figure au second membre de la relation (I)′ convergeant uniformément pour toute valeur de $x > \varepsilon > 0$, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut lui appliquer la règle habituelle de dérivation sous le signe $\int$. D'où

$$(-1)^n \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) \equiv \int_0^{+\infty} e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^n}{n!} d\Phi(\mu),$$

et par suite [4])

$$\Phi_x(\lambda) \equiv \sum_{0\leqq n<x\lambda} (-1)^n \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) \equiv \int_0^{+\infty} \psi(\lambda, \mu, x) d\Phi(\mu).$$

Il s'agit de démontrer que, λ étant point de continuité de $\Phi(\lambda)$, on peut choisir x assez grand pour que, η étant un nombre > 0 quelconque, on ait:

---

[4]) Si l'on effectuait sans autre précaution le passage à la limite $x = \infty$ sous le signe $\int$ au second membre de cette relation, on aurait, d'après le lemme II

$$\lim_{x=\infty} \Phi_x(\lambda) = \Phi(\lambda) - \Phi(0) = \Phi(\lambda).$$

C'est en somme la légitimité de ce passage à la limite lorsque λ est point de continuité de $\Phi(\lambda)$ qu'il s'agit d'établir.

$$(28) \qquad K = \left| \int_0^{\lambda} d\Phi(\mu) - \int_0^{+\infty} \psi(\lambda, \mu, x) d\Phi(\mu) \right| \leqq \eta.$$

Pour cela, on remarque que, ε et A étant tels que $0 < \varepsilon < \lambda$, et $A > \lambda + \varepsilon$, il vient:

$$K \leqq \int_0^{\lambda-\varepsilon} \{1-\psi(\lambda, \mu, x)\} d\Phi(\mu) + \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} \{1-\psi(\lambda, \mu, x)\} d\Phi(\mu) +$$

$$(29) \quad + \int_{\lambda}^{\lambda+\varepsilon} \psi(\lambda, \mu, x) d\Phi(\mu) + \int_{\lambda+\varepsilon}^{A} \psi(\lambda, \mu, x) d\Phi(\mu) +$$

$$+ \int_A^{+\infty} \psi(\lambda, \mu, x) d\Phi(\mu).$$

Considérons tout d'abord le dernier terme. En vertu de l'inégalité (26) il vient, en remarquant que $\mu \geqq A$ entraîne $1 - \frac{1}{e} - \frac{\lambda}{\mu} \geqq 1 - \frac{1}{e} - \frac{\lambda}{A}$:

$$\int_A^{\infty} \psi(\lambda, \mu, x) d\Phi(\mu) \leqq \int_A^{+\infty} e^{-\mu x\left(1 - \frac{1}{e} - \frac{\lambda}{\mu}\right)} d\Phi(\mu) \leqq \int_A^{+\infty} e^{-\mu x\left(1 - \frac{1}{e} - \frac{\lambda}{A}\right)} d\Phi(\mu).$$

Or λ étant fixé, on peut choisir A assez élevé pour que l'on ait

$$1 - \frac{1}{e} - \frac{\lambda}{A} \geqq 1 - \frac{2}{e} > 0,$$

et par suite pour $x > x_0 > 0$

$$\int_A^{+\infty} \psi(\lambda, \mu, x) d\Phi(\mu) \leqq \int_A^{+\infty} e^{-\mu\left(1-\frac{2}{e}\right)x_0} d\Phi(\mu).$$

Mais par hypothèse l'intégrale:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\mu\left(1-\frac{2}{e}\right)x_0} d\Phi(\mu) = f\left[\left(1 - \frac{2}{e}\right)x_0\right]$$

converge. On peut donc choisir A assez grand pour que, quel que soit $x > x_0 > 0$, on ait:

$$(30) \qquad \int_A^{+\infty} \psi(\lambda, \mu, x) d\Phi(\mu) \leqq \frac{\eta}{5}.$$

D'autre part λ étant point de continuité de $\Phi(\lambda)$, on peut choisir ε, non nul, assez petit pour que soient satisfaites les inégalités suivantes:

$$(31) \quad \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} \{1-\psi(\lambda, \mu, x)d\Phi(\mu) \leqq 2 \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda} d\Phi(\mu) = 2\,[\Phi(\lambda)-\Phi(\lambda-\varepsilon)] \leqq \frac{\eta}{5},$$

$$(32) \quad \int_{\lambda}^{\lambda+\varepsilon} \psi(\lambda, \mu, x)d\Phi(\mu) \leqq \int_{\lambda}^{\lambda+\varepsilon} d\Phi(\mu) = \Phi(\lambda+\varepsilon) - \Phi(\lambda) \leqq \frac{\mu}{5},$$

qui découlent de ce que, $\psi(\lambda, \mu, x)$ est $\leqq 1$. — En outre, d'après les inégalités (23) et (24), il vient:

$$\int_{0}^{\lambda-\varepsilon} \{1-\psi(\lambda, \mu, x)\} d\Phi(\mu) \leqq \int_{0}^{\lambda-\varepsilon} \frac{\mu}{(\lambda-\mu)^2 x} d\Phi(\mu) = \frac{1}{x} \int_{0}^{\lambda-\varepsilon} \frac{\mu}{(\lambda-\mu)^2} d\Phi(\mu),$$

$$\int_{\lambda+\varepsilon}^{A} \psi(\lambda, \mu, x) d\Phi(\mu) \leqq \int_{\lambda+\varepsilon}^{A} \frac{\mu}{(\mu-\lambda)^2 x} d\Phi(\mu) = \frac{1}{x} \int_{\lambda+\varepsilon}^{A} \frac{\mu}{(\mu-\lambda)^2} d\Phi(\mu).$$

De sorte que ε étant choisi non nul, comme il a été dit plus haut, il existe une valeur de x assez élevée, pour que l'on ait:

$$(33) \quad \int_{0}^{\lambda-\varepsilon} \{1-\psi(\lambda, \mu, x)\} d\Phi(\mu) \leqq \frac{\eta}{5}, \quad (34) \quad \int_{\lambda+\varepsilon}^{A} \psi(\lambda, \mu, x) d\Phi(\mu) \leqq \frac{\eta}{5}.$$

En additionnant membre à membre les 5 inégalités (30) à (34) on retombe sur l'inégalité (28) et le théorème II est ainsi démontré dans le cas où $\Phi(\lambda)$ est continue au point λ considéré.

b) Considérons maintenant un point de discontinuité de $\Phi(\lambda)$, soit $\lambda = \alpha$. La fonction $\Theta(\lambda)$ définie par les identités suivantes:

$$\Theta(\lambda) \equiv \begin{cases} \Phi(\lambda) & \text{pour } \lambda < \alpha, \\ \Phi(\alpha-0) & \text{pour } \lambda = \alpha, \\ \Phi(\lambda) - s & \text{pour } \lambda > \alpha, \end{cases}$$

où s désigne le saut $\Phi(\alpha+0) - \Phi(\alpha-0)$ de $\Phi(\lambda)$ au point $\lambda = \alpha$, est continue en ce dernier point. — Et sa transformée de Laplace-Stieltjes

$$\varphi(x) \equiv \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} d\Theta(\lambda)$$

est liée à celle de $\Phi(\lambda)$ par l'identité:

$$\varphi(x) \equiv f(x) - s e^{-\alpha x}.$$

Il vient donc

$$\sum_{0 \leqq n < \alpha x} (-1)^n \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) = \sum_{0 \leqq n < \alpha x} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(x) + s\,\psi(\alpha, \alpha, x).$$

Or $\Theta(\lambda)$ étant continue au point $\lambda = \alpha$, nous venons de voir que lorsque x croît indéfiniment, le premier terme du second membre a pour limite $\Theta(\alpha)$. — Et comme d'après le lemme II, le second tend vers $\frac{1}{2}s$, il vient finalement

$$\lim_{x=\infty}\left\{\sum_{0\leqq n<\alpha x}(-1)^n\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x)\right\}=\Phi(\alpha-0)+\frac{1}{2}s=\frac{\Phi(\alpha-0)+\Phi(\alpha+0)}{2}$$

conformément au théorème II qui est ainsi démontré.

(Reçu le 3 février 1939.)