P. TURAN

Über die Ableitung von Polynomen

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 89-95
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__89_0>

Über die Ableitung von Polynomen

von

P. Turan

Budapest

A. Markoff [1]) bewies, daß für ein Polynom n-ten Grades $f(x)$ im Intervalle $[-1, +1]$ aus

$$|f(x)| \leqq 1$$

in demselben Intervalle folgt

$$|f'(x)| \leqq n^2.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $f(x) = \varepsilon T_n(x)$, $|\varepsilon| = 1$, $T_n(\cos\vartheta) = \cos n\vartheta$. Mit anderen Worten: für jedes Polynom n-ten Grades gilt

$$\frac{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f'(x)|}{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f(x)|} \leqq n^2. \tag{1}$$

M. Riesz [2]) bewies, daß in $|z| \leqq 1$ für ein Polynom n-ten Grades $f(z)$ aus

$$|f(z)| \leqq 1$$

folgt

$$|f'(z)| \leqq n.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $f(z) = \gamma z^n$, $|\gamma| = 1$. Mit anderen Worten: für jedes Polynom n-ten Grades gilt

$$\frac{\max\limits_{|z|\leqq 1} |f'(z)|}{\max\limits_{|z|\leqq 1} |f(z)|} \leqq n. \tag{2}$$

---

[1]) A. Markoff, Über ein Problem von D. I. Mendelejeff [Abh. der Akad. der Wiss. St. Petersburg 62 (1889), 1—24].

[2]) M. Riesz, Eine trigonometrische Interpolationsformel . . . [Jahresb. d. D. M. V. 23 (1914), 354—368].

G. Szegö[3]) bewies, daß wenn l eine aus endlich vielen analytischen Bögen zusammengesetzte geschlossene Jordankurve bedeutet und B die abgeschlossene Hülle ihres Inneren (das auch in einen Schlitzbereich degenerieren darf),

$$\frac{\max\limits_{z \prec B} |f'(z)|}{\max\limits_{z \prec B} |f(z)|} \leqq C n^{\alpha} \tag{3}$$

gilt, wo C nur von l, nicht aber von n abhängt und α folgendermaßen definiert ist: In einem beliebigen Randpunkte z_0 sei $\beta\pi$ die obere Grenze der Öffnungen aller von z_0 aus laufenden Winkelgebiete, die in genügender Nähe von z_0 keine inneren Punkte von l enthalten. Dann ist $2 \geqq \beta \geqq 0$ und

$$\alpha = \limsup \beta, \tag{4}$$

wenn z_0 die Peripherie von l durchläuft. Dieser Satz enthält (wenn man auf die genauen Werte von C und die Angabe der Extrempolynome verzichtet) (1) und (2).

Wir kehren zu (1) und (2) zurück. Die Extremalpolynome haben augenscheinlich die Eigenschaft, daß alle ihre Wurzeln in ihr B fallen. Diese Tatsache erweckt die Vermutung, daß vielleicht für alle solche Polynome $\dfrac{\max\limits_{z \prec B} |f'(z)|}{\max\limits_{z \prec B} |f(z)|}$ „groß" ist, daß also für solche Polynome eine untere Abschätzung für $\dfrac{\max\limits_{z \prec B} |f'(z)|}{\max\limits_{z \prec B} |f(z)|}$ existiert. Wenn l das Intervall $[-1, +1]$ bzw. der Einheitskreis ist, werden wir dies tatsächlich beweisen. Wir formulieren also

SATZ I. Es sei $f(z)$ ein Polynom n-ten Grades mit allen Wurzeln im Einheitskreise. Dann ist

$$\frac{\max\limits_{|z| \leqq 1} |f'(z)|}{\max\limits_{|z| \leqq 1} |f(z)|} \geqq \frac{n}{2},$$

und das Gleichheitszeichen ist erreichbar.

---

[3]) G. SZEGÖ, Über einen Satz von A. Markoff [Math. Zeitschr. 23 (1925), 45—61].

Satz II. Es sei $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit allen Wurzeln in $[-1, +1]$. Dann ist

$$\frac{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f'(x)|}{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f(x)|} > \frac{1}{6}\sqrt{n}.$$

Verglichen mit (1) und (2) erscheinen diese Sätze als Gegenstücke zu den Sätzen des A. Markoffschen Ideenkreises. Die Polynomklassen, welche in Satz I und II auftreten, schließen in sich z.B. diejenigen Polynomenfolgen, welche durch Orthogonalisierung in Bezug auf eine nichtnegativen L-integrable Gewichtsfunktion gewonnen sind, ferner nach dem Satze Enestrom-Kakeya alle Polynome mit einer monoton wachsenden Koeffizientenfolge etc. Satz I und II geben also allgemeine Aussagen für diese Polynomenfolgen.

Satz I ist das Bestmögliche; da z.B. für $f(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n$ $\max|f(z)| = 1$ und $\max|f'(z)| = \frac{n}{2}$ ist. Satz II ist in Bezug auf die Größenordnung in n genau, wie $f(x) = (x^2-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ zeigt; es ist für $n \geqq 4$ $\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f(x)| = 1$ und wegen

$$\frac{1}{2\left[\frac{n}{2}\right]} f''(x) = (x^2-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]-2}\left\{\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)x^2-1\right\}$$

nimmt $f'(x)$ sein absolutes Maximum asymptotisch an der Stelle $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ auf; der Maximalwert ist offenbar $\sim\sqrt{\frac{n}{e}}$. Man fragt natürlich nach der genauen Lösung des Extremalproblems; dies wurde auf meine Anregung hin durch Herrn I. Eröd bestimmt, er bewies für $n = 2$

$$\frac{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f'(x)|}{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f(x)|} \geqq 1,$$

für $n = 3$

$$\frac{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f'(x)|}{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f(x)|} \geqq \frac{3}{2},$$

für $n > 2$, n gerade

$$\frac{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f'(x)|}{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f(x)|} \geqq \frac{n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \sqrt{\frac{n}{e}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

für $n > 3$, n ungerade

$$\frac{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f'(x)|}{\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f(x)|} \geqq \frac{n^2}{(n-1)\sqrt{n+1}}\left(1-\frac{\sqrt{n+1}}{n-1}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \sqrt{\frac{n}{e}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Das Gleichheitszeichen kann in allen Fällen bei einem einzigen Polynome stehen; die Extremalpolynome sind kurz dadurch charakterisiert, daß alle Wurzeln in $+1$ und in -1 fallen. Doch verlaufen unsere Abschätzungen viel einfacher. Es ist vielleicht nicht uninteressant zu bemerken, daß es bei dem Kreise unendlich viele, wesentlich verschiedene Extremalpolynome gibt.

Es ist sehr wahrscheinlich, daß auch in den Szegöschen Bereichen

$$\frac{\max\limits_{z\prec B} |f'(z)|}{\max\limits_{z\prec B} |f(z)|} > D n^{\frac{1}{\alpha}}$$

für alle diejenigen Polynome gilt, welche ihre Wurzeln im B haben; hier habe α dieselbe Bedeutung, wie in (4) und D sei unabhängig von n. Hiermit wollen wir uns jetzt jedoch nicht beschäftigen.

Beweis von Satz I. Es sei

$$\max_{|z|\leqq 1} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

und natürlich $|z_0| = 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $z_0 = 1$ und $f(1) = 1$. Dann ist

$$|f'(1)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-z_k}\right|,$$

also

$$|f'(1) \geqq \left|\Re \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-z_k}\right| = \sum_{k=1}^{n} \Re \frac{1}{1-z_k},$$

da wegen $\Re z_k \leqq 1$ auch $\Re \frac{1}{1-z_k} \geqq 0$ gilt. Mit $|1-z_k| = r_k$ ist ferner

$$|f'(1)| \geqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k^2} \Re(1-z_k).$$

Bei festgehaltenem r_k ist $\Re(1-z_k)$ in $|z| \leqq 1$ minimal, wenn z_k in die Schnittpunkte der Kreise $|z| = 1$, $|1-z| = r_k$ fällt. Wenn einer dieser Schnittpunkte E ist und F und G die Punkte $z = 1$ bzw. $z = -1$ sind, so ist

$$\Re(1-z_k) \geqq r_k \cos EFG = \frac{r_k^2}{2},$$

also

$$|f'(1)| \geqq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}.$$

Das Gleichheitszeichen steht nur, wenn $|z_k| = 1$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ und $\sum\limits_{k=1}^{n} \Im \frac{1}{1-z_k} = 0$ [5]).

Beweis von Satz II. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\max\limits_{-1\leqq x\leqq +1} |f(x)| = 1$; $f(a) = 1$, $-1 \leqq a \leqq +1$.

Fall I. $a = 1$.

Dann ist

$$|f'(1)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x_k} \geqq \frac{n}{2} > \frac{\sqrt{n}}{6}.$$

Analoges gilt, wenn $a = -1$ ist.

Fall II. $-1 < a < +1$. Dann ist $f'(a) = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n \geqq 4$. Wir legen um a das Intervalle $\left[a - \frac{2}{\sqrt{n}}, a\right]$, $\left[a, a + \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ und betrachten dasjenige, welches ganz in $[-1, +1]$ fällt; das sei etwa $\left[a, a + \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$. Wir können annehmen daß in $\left[a, a + \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ überall $f(x) \geqq \frac{2}{3}$ ist; gäbe es hier nämlich ein ξ_1 mit $f(\xi_1) < \frac{2}{3}$, so wäre

$$\frac{\sqrt{n}}{6} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{\sqrt{n}}} < \frac{f(a) - f(\xi_1)}{a - \xi_1} = f'(\xi_2) \tag{5}$$

mit $a < \xi_2 < \xi_1 < a + \frac{2}{\sqrt{n}}$ also wäre nichts zu beweisen. Wir

---

[5]) Der Beweis gibt offenbar auch, daß aus $|z_\nu| \leqq 1$ $(y=1, 2, \ldots, n)$ auf der ganzen Peripherie des Kreises $|z| = 1$ $|f'(z)| \geqq \frac{n}{2} |f(z)|$ folgt, also auch $\int\limits_{|z|=1} |f'(z)|^p d\varphi \geqq \left(\frac{n}{2}\right)^p \int\limits_{|z|=1} |f(z)|^p d\varphi$ für $p > 0$. Für Polynome mit monoton wachsenden Koeffizienten und $p = 1$ hat mir Herr S. Sidon den Satz ohne Beweis mitgeteilt.

können schließlich annehmen, daß es in $\left[a, a+\frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ wenigstens ein ξ_3 gibt mit $|f''(\xi_3)| \leqq \frac{n}{12}$. Wenn nämlich im $\left[a, a+\frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ durchwegs $|f''(x)| > \frac{n}{12}$ wäre, so wäre

$$(6)\qquad \left|f'\left(a+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right| = \left|\int_a^{a+\frac{2}{\sqrt{n}}} f''(t)dt\right| = \int_a^{a+\frac{2}{\sqrt{n}}} |f''(t)|dt > \frac{2}{\sqrt{n}}\cdot\frac{n}{12} = \frac{\sqrt{n}}{6},$$

also wäre nichts zu beweisen.

Aus $\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-x_k}$ gewinnen wir durch Differenzieren

$$f'(x)^2 - f(x)f''(x) = f(x)^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-x_k)^2},$$

also gilt nach (5) und wegen $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x-x_k)^2} \geqq \frac{n}{4}$ in $\left[a, a+\frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ überall

$$(7)\qquad f'(x)^2 - f(x)f''(x) \geqq \frac{n}{9}.$$

Dann ist aber für $x = \xi_3$

$$f'(\xi_3)^2 > \frac{n}{9} - |f(\xi_3)|\,|f''(\xi_3)| > \frac{n}{9} - \frac{n}{12} = \frac{n}{36}, \qquad \text{q.e.d.}$$

Als Anwendung beweisen wir folgenden schönen Satz von P. Erdös [6]). Das Polynom $f(x)$ vom n-ten Grade besitze lauter in $[-1, +1]$ liegende Wurzeln. Dann kann ein Wurzelintervall $[x_m, x_{m+1}]$, in welchem $f(x)$ beständig konvex oder konkav bleibt, nicht „zu groß" sein, d.h.

$$|x_{m+1} - x_m| \leqq \frac{16}{\sqrt{n}}.$$

Herr I. Eröd ersetzte 16 durch die genaue Konstante und findet — grob ausgedrückt —

$$|x_{m+1} - x_m| < \sqrt{\frac{2}{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}\right),$$

wo die Konstante $\sqrt{2}$ das bestmöglichste ist. Die Extremalpolynome haben $(n-2)$ Wurzeln, möglichst gleich verteilt in $+1$ bzw. -1, und zwei Wurzeln im Inneren von $[-1, +1]$ und zwar so, daß dort gleichzeitig $f''(z)$ Wurzeln hat.

---

[6]) Nicht publiziert.

Bevor wir diesen Satz beweisen, bemerken wir, daß anstatt Satz II der folgende schärfere Satz bewiesen wurde: Es sei $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades, welches alle seine Wurzeln im $[-1, +1]$ habe, und a eine Stelle im $(-1, +1)$ mit $f'(a) = 0$. Wenn das Intervall $\left[a, a + \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ ganz in $[-1, +1]$ fällt, so ist schon

$$\max_{a \leqq x \leqq a + \frac{2}{\sqrt{n}}} |f'(x)| > \frac{\sqrt{n}}{6} |f(a)|, \tag{7}$$

und Analoges gilt auch, wenn $\left[a - \frac{2}{\sqrt{n}}, a\right]$ in $[-1, +1]$ fällt.

Es sei $[x_m, x_{m+1}]$ ein Wurzelintervall $(x_m < x_{m+1})$, in welchem ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(x) \geqq 0$ und $f''(x) \leqq 0$ sei; $f(x)$ habe im $[x_m\, x_{m+1}]$ ein Maximum an der Zwischenstelle $x = b$. Wir beweisen unsere Behauptung dadurch, daß wir $b - x_m \leqq \frac{8}{\sqrt{n}}$ und $x_{m+1} - b \leqq \frac{8}{\sqrt{n}}$ zeigen. Wir können voraussetzen, daß beide der Intervalle $\left[b - \frac{2}{\sqrt{n}}, b\right]\left[b, b + \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ in $[-1, +1]$ fallen; wenn im Gegenteil z.B. $\left[b, b + \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ nicht ganz im $[-1, +1]$ läge, so wäre sogar $x_{m+1} - b \leqq 1 - b \leqq \frac{2}{\sqrt{n}}$. Wir beweisen ferner nur $x_{m+1} - b \leqq \frac{8}{\sqrt{n}}$; die Behauptung $b - x_m \leqq \frac{8}{\sqrt{n}}$ folgt ebenso. Wir können voraussetzen, daß $\left[b, b + \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ ganz in $[b, x_{m+1}]$ liegt. Im Intervalle $[b, x_{m+1}]$ ist aber nach Voraussetzung $f'(x) < 0$, existiert nach Satz II in $\left[b, b + \frac{2}{\sqrt{n}}\right]$ ein ξ_4 mit $f'(\xi_4) < -\frac{\sqrt{n}}{6} f(b)$ und wegen der Konvexität fällt $f'(x)$ monoton bis $x = x_{m+1}$. Es ist in $[\xi_4, x_{m+1}]$ also $f'(x) < -\frac{\sqrt{n}}{6} f(b)$, also

$$f(b) > f(\xi_4) \geqq f\left(b + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = f\left(b + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) - f(x_{m+1}) = -\int_{b + \frac{2}{\sqrt{n}}}^{x_{m+1}} f'(x)\,dx$$

$$> \left(x_{m+1} - b - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)\frac{\sqrt{n}}{6} f(b)$$

und somit

$$\frac{6}{\sqrt{n}} > x_{m+1} - b - \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad \text{q.e.d.}$$

(Eingegangen den 24. April 1939.)