L. FEJES

Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 474-476

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__474_0>

Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe

von

L. Fejes

Budapest

In einer vorherigen Arbeit [1]) habe ich gezeigt, daß eine beliebige geschlossene konvexe Kurve in einen „n-Eckring" mit der relativen Größe $\frac{T_n - t_n}{T_n} < \frac{6\pi}{n^2}$ eingeschlossen werden kann. Die genaue Abschätzung $\frac{T_n - t_n}{T_n} \leqq \sin^2 \frac{\pi}{n}$ habe ich dagegen nur für $n \leqq 6$ bewiesen.

Es sei hier gezeigt, daß sich mit Hilfe eines von Herrn E. Sas herrührenden Satzes bzw. Beweisganges [2]) für $n \geqq 5$ unmittelbar die Abschätzung

$$\frac{T_n - t_n}{T_n} < \sin^2 \frac{\pi}{n-2} \tag{1}$$

ergibt.

Der Satz des Herrn E. Sas lautet: Es läßt sich in eine jede geschlossene konvexe Kurve mit dem Flächeninhalt T ein n-Eck einbeschreiben mit dem Flächeninhalt $t_n \geqq \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} T$. Wir übertragen zunächst den Beweis mit einer kleinen Änderung auf umbeschriebene n-Ecke und beweisen, daß einer geschlossenen konvexen Kurve mit dem Flächeninhalt T für $n \geqq 5$ ein n-Eck mit dem Flächeninhalt

$$T_n < \frac{n-2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n-2} T \tag{2}$$

umbeschrieben werden kann [3]).

[1]) L. Fejes, Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen [Comp. Math. 6 (1939), 456—467].

[2]) E. Sas, Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen [Comp. Math. 6 (1939), 468—470].

[3]) Die Abschätzung $T_n \leqq \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} T$, welche bedeuten würde, daß die extremalen Kurven die Ellipsen sind, ist im Gegensatz zu der entsprechenden Aufgabe für einbeschriebene n-Ecke im allgemeinen nicht richtig. Ein Quadrat läßt sich z.B. nicht in ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $T_3 < 2T$ einschließen.

Stellen wir zum Beweis die Kurve mit E. Sas dar durch die Gleichungen

$$x = \cos t, \quad y = e(t) \sin t, \tag{3}$$

wobei $e(t)$ außer in den Punkten $t = 0$, $t = \pi$ eine stetige, eindeutige, positive, nach 2π periodische Funktion mit beschränkter Schwankung von t bedeutet. Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Kurve durch die Punkte $x = -1$, $x = +1$, $y = 0$ läuft und völlig zwischen den Geraden $x = -1$, $x = +1$ liegt, was durch passende Wahl des Koordinatensystems leicht erreicht werden kann. Wir zeichnen nun in den zu $t = t$, $t + \frac{2\pi}{n}$, $t + 2\frac{2\pi}{n}$, ..., $t + (n-1)\frac{2\pi}{n}$ gehörigen Punkten der Kurve die n Tangenten bzw. beliebige Stützgeraden und betrachten von dem so erhaltenen n-Eck denjenigen Teil, welcher zwischen den Geraden $x = 1$, $x = +1$ liegt. Dieser ist ein der Kurve umbeschriebenes Polygon $\mathfrak{P}_{n+2}$ mit höchstens $n+2$ Seiten, dessen Flächeninhalt

$$T_{n+2}(t) < 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e\left(t + i\frac{2\pi}{n}\right) \sin^2\left(t + i\frac{2\pi}{n}\right) \tag{4}$$

ausfällt. Um dies einzusehen, betrachten wir den Kreis $x = \cos t$, $y = \sin t$ und zugleich das umbeschriebene reguläre n-Eck mit den Berührungspunkten $t = t$, $t + \frac{2\pi}{n}$, $t + 2\frac{2\pi}{n}$, ..., $t + (n-1)\frac{2\pi}{n}$ und ersetzen jede Seite d_i durch eine Strecke s_i, welche die Kurve (3) im Punkt $t + i\frac{2\pi}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ berührt, während die x-Koordinaten der Endpunkte von d_i und s_i übereinstimmen. Zu jedem Eckpunkt des regulären n-Eckes gehört demnach je ein Endpunkt von zwei aufeinanderfolgenden Strecken; verbinden wir sie! Dadurch erhalten wir ein Polygon $\mathfrak{P}_{2n}$ mit höchstens $2n$ Ecken, welches $\mathfrak{P}_{n+2}$ enthält. (Es sei bemerkt, daß je zwei Seiten von $\mathfrak{P}_{2n}$ — und zwar diejenigen, welche die Kurve (3) auf verschiedenen Seiten der x-Achse berühren — auch gemeinsame Punkte besitzen können.) Das Inhaltsmaß von $\mathfrak{P}_{2n}$ ist aber eben die rechte Seite von (4), womit die Ungleichung (4) bewiesen ist.

Bildet man den Mittelwert von (4), so erhält man:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_{n+2}(t)\,dt < \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \int_0^{2\pi} e(t) \sin^2 t\,dt = \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\, T.$$

Es gibt daher unter den soeben konstruierten Polygonen

$\{\mathfrak{P}_{n+2}\}$ wenigstens ein Polygon mit dem Flächeninhalt $T_{n+2} < \frac{n}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} T$, woraus sich nach Ersetzung von $n+2$ durch n für $n \geqq 5$ unmittelbar (2) ergibt.

Es gilt nunmehr:

$$\frac{t_n}{T_n} > \frac{\frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{n-2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n-2}} > \frac{\frac{n-2}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n-2}}{\frac{n-2}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n-2}} = \cos^2 \frac{\pi}{n-2}.$$

Dies ist aber eben die Ungleichung (1).

(Eingegangen den 6. September 1939.)