COMPOSITIO MATHEMATICA

J. MARCINKIEWICZ
R. SALEM

Sur les sommes riemanniennes

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 376-389
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__376_0>

Sur les sommes riemanniennes

par

J. Marcinkiewicz et R. Salem

Paris

---

1. Soit $f(x)$ une fonction sommable et de période 1, et soit:

$$F_n(f, x) = F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(x + \frac{i}{n}\right).$$

M. B. Jessen a démontré que la suite $\{F_{n_\varkappa}(x)\}$ converge presque partout vers l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

dès que la suite $\{n_\varkappa\}$ est telle que pour tout $\varkappa$, $n_\varkappa$ soit un diviseur de $n_{\varkappa+1}$. [1])

M. Jessen a considéré la fonction

$$F(x) = \operatorname*{borne\ sup}_{\varkappa} |F_{n_\varkappa}(x)|$$

et a démontré que l'ensemble E dans lequel $F(x) \geqq A$ est tel que

$$|E| \leqq \frac{1}{A} \int_E |f(x)|\, dx. \tag{1.1}$$

De cette inégalité fondamentale, M. Jessen a déduit que pour tout $p > 1$ on a, si f^p est sommable,

$$\int_0^1 F^p(x)\, dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^1 |f(x)|^p\, dx. \tag{1.2}$$

Le but de cette note est de compléter, sur certains points, les résultats de M. Jessen.

Remarquons d'abord que l'inégalité (1.1) conduit également à la démonstration des inégalités:

$$\int_0^1 F^s(x) dx < \frac{A}{1-s} \left(\int_0^1 |f(x)|\, dx\right)^s \qquad (s<1), \tag{1.3}$$

---

[1]) B. Jessen [Annals of Math. 35 (1934), 248—251].

$$(1.4) \qquad \int_0^1 F(x)\,dx < B\int_0^1 |f|\log(1+f^2)\,dx + C,$$

A, B, C, étant des constantes absolues.

Nous ne donnerons pas les démonstrations qui sont basées sur les mêmes principes que la démonstration de l'inégalité (1.2).

Par contre, nous démontrerons le

THÉORÈME 1.

Pour toute fonction $\omega(x)$ positive, croissante et telle que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\omega(x)}{\log x} = 0,$$

on peut construire une fonction $f(x)$ telle que l'on ait

$$\int_0^1 |f(x)|\,\omega(|f(x)|)\,dx < \infty,$$

$$\int_0^1 F(f,x)\,dx = \infty,$$

où l'on a posé

$$F(f,x) = \text{borne}\sup_n |F_{2^n}(f,x)|.$$

Il est connu, d'autre part [2]), qu'on peut trouver des fonctions sommables $f(x)$ telles que $\limsup F_n(f,x) = \infty$ pour tout x. Cela montre que des hypothèses additionnelles sont nécessaires pour assurer la convergence presque partout de la suite $\{F_n(f,x)\}$. Dans cette direction, nous avons établi le

THÉORÈME 2.

Sous la condition

$$(1.5) \qquad \int_0^1 [f(x+t)-f(x)]^2\,dx = O(t^{\varepsilon}) \qquad (\varepsilon > 0)$$

la suite $\{F_n(f,x)\}$ converge presque partout vers l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

---

[2]) J. MARCINKIEWICZ & A. ZYGMUND, Mean values of trigonometrical polynomials [Fund. Math. **28** (1937), 131—166], spec. p. 157.

Voir aussi H. D. URSELL [Journal London Math. Soc. **12** (1937), 229—232] et BESICOWITCH [Math. Ann. **115** (1938), 613—618].

Le même procédé de démonstration que celui des deux premiers mémoires cités permet de montrer, en se basant sur les résultats bien connus de Khintchine sur l'approximation des nombres irrationnels, que $\limsup F_n(f,x) = \infty$ presque partout pour toute fonction $f(x)$ de carré non sommable et décroissant avec une certaine régularité. Nous n'insistons pas sur la démonstration qui ne présente pas de difficultés.

Il est intéressant de remarquer qu'il est impossible de remplacer dans la formule (1.5) l'expression

$$\int_0^1 [f(x+t)-f(x)]^2 dx \quad \text{par} \quad \int_0^1 |f(x+t)-f(x)|^p\, dx \qquad (p<2).$$

Nous le verrons sur un exemple très simple.

Enfin, il est intéressant de constater que si l'on considère au lieu des sommes $F_n(x)$ leurs moyennes arithmétiques

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_1^n F_\nu(x), \tag{1.6}$$

l'hypothèse (1.5) peut être essentiellement affaiblie. On a, en effet, le

THÉORÈME 3.

Sous l'hypothèse

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{[f(x+t)-f(x)]^2}{t\left|\log\frac{t}{2}\right|}\, dt\, dx < \infty \tag{1.7}$$

la suite $\{\Phi_n(x)\}$ *converge presque partout vers l'intégrale*

$$\int_0^1 f(x)\, dx.$$

La condition (1.7) est vérifiée si on a, par exemple,

$$\int_0^1 [f(x+t)-f(x)]^2 dx = O\left(\frac{1}{\log^2|\log t|}\right),$$

ce qui est une hypothèse essentiellement moins restrictive que (1.5).

On peut énoncer un théorème analogue pour les moyennes $\Phi_n(x)$ sous des hypothèses concernant l'intégrale

$$\int_0^1 |f(x+t)-f(x)|^p\, dx \qquad (p<2).$$

Il n'est pas exclu que l'expression $\Phi_n(x)$ converge presque partout pour toute fonction sommable, ou bien de carré sommable.

2. La démonstration du Théorème 1 est basée sur le:

LEMME 1. *Soit* $f(x)=1$ *pour* $0\leqq x\leqq 2^{-n-1}$ *et* $1-2^{-n-1}\leqq x\leqq 1$ *et* $f(x)=0$ *pour* $2^{-n-1}<x<1-2^{-n-1}$. *On peut choisir la fonction* $n(x)$ *de manière que l'on ait*

$$\int_0^1 F_{2^{n(x)}}(x)\, dx \geqq \frac{n}{2}2^{-n}.$$

Pour tout $p \leqq n$ considérons les systèmes de points

$$(M_p) \qquad \frac{1}{2^p}, \ \frac{3}{2^p}, \ \frac{5}{2^p}, \ldots, \ \frac{2^p-1}{2^p}.$$

Quand p varie ces points sont différents. Chaque point $\frac{\varkappa}{2^p}$ de M_p sera le centre d'un intervalle $I_{p,\varkappa}$ de longueur 2^{-n}. Ces intervalles sont non-empiétants puisque la distance entre deux points différents surpasse 2^{-n}.

Posons $n(x) = p$ pour $x \in I_{p,\varkappa}$. Si un point x n'est contenu dans aucun intervalle $I_{p,\varkappa}$ nous poserons $n(x) = 1$.

Soit $x \in I_{p,\varkappa}$. On a

$$F_{2^p}(x) = \frac{1}{2^p}\left\{f(x) + f\left(x+\frac{1}{2^p}\right) + \ldots + f\left(x+\frac{2^p-1}{2^p}\right)\right\}.$$

Comme $x \in I_{p,\varkappa}$ on a évidemment $x = \frac{\varkappa}{2^p} + \theta 2^{-n-1}$ où $|\theta| \leqq 1$. Il en résulte

$$f\left(x+\frac{2^p-\varkappa}{2^p}\right) = f(\theta 2^{-n-1}) = 1,$$

ce qui donne

$$F_{2^p}(x) \geqq 2^{-p}, \quad \int\limits_{I_{p,\varkappa}} F_{2^{n(x)}}(x)\,dx \geqq 2^{-p-n},$$

$$\sum_{\varkappa} \int\limits_{I_{p,\varkappa}} F_{2^{n(x)}}(x) dx \geqq \frac{1}{2} 2^{-n}, \quad \sum_{\varkappa, p} \int\limits_{I_{p,\varkappa}} F_{2^{n(x)}}(x) dx \geqq \frac{n}{2} 2^{-n}$$

et à plus forte raison

$$\int\limits_0^1 F_{2^{n(x)}}(x)\,dx \geqq \frac{n}{2} 2^{-n}.$$

Passons à la démonstration du théorème 1. On peut trouver une fonction décroissante vers zéro $\varepsilon(x)$ telle que

$$\frac{\varepsilon(x)\log x}{\omega(x)} \to \infty \text{ pour } x \to \infty.$$

Soit $\{n_i\}$ une suite de nombres entiers tels que

$$\sum \varepsilon(2^{n_i}) < \infty.$$

Nous pouvons évidemment supposer que

$$\omega(x) \leqq \log x, \quad \varepsilon(x) \geqq \frac{1}{\log x}.$$

Considérons un système quelconque de segments non-empiétants

I_i de longueurs $\varepsilon(2^{n_i})\, 2^{-n_i}\, \omega^{-1}(2^{n_i})$ et posons $f_i = 2^{n_i}$ pour $x \in I_i$ et $f_i = 0$ en dehors de I_i.

D'après le lemme 1 il existe une fonction $n_i(x)$ telle que

$$\int_0^1 F_{2^{n_i(x)}}(f_i, x)\, dx \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2\log 2} \cdot 2^{n_i} \cdot \varepsilon(2^{n_i})\, 2^{-n_i}\, \omega^{-1}(2^{n_i}) \log \{2^{n_i} \omega(2^{n_i})\, \varepsilon^{-1}(2^{n_i})\} \geqq$$
$$\geqq \frac{1}{2}\, \varepsilon(2^{n_i})\, \omega^{-1}(2^{n_i}) \log 2^{n_i} \to \infty.$$

Posons $f = \sum f_i$. On a évidemment

$$\int_0^1 F_{2^{n_i(x)}}(f, x)\, dx \geqq \int_0^1 F_{2^{n_i(x)}}(f_i, x)\, dx \to \infty,$$

ce qui prouve que

$$\int_0^1 F(f, x)\, dx = \infty.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 f\omega(f)\, dx = \sum \int_{I_i} 2^{n_i}\, \omega(2^{n_i})\, dx = \sum 2^{n_i}\, \omega(2^{n_i})\, \varepsilon(2^{n_i})\, 2^{-n_i}\, \omega^{-1}(2^{n_i})$$
$$= \sum \varepsilon(2^{n_i}) < \infty.$$

Le théorème 1 se trouve donc établi.

Il faut remarquer que dans la démonstration de ce théorème on ne peut pas remplacer la suite $\{2^n\}$ par une suite quelconque $\{k_n\}$ par exemple $\{n!\}$.

En effet, on obtient alors au lieu du lemme 1 un lemme plus faible qui ne permet pas de conclure le résultat énoncé pour la suite $\{2^n\}$.

3. Pour démontrer le théorème 2, nous allons appliquer une méthode différente.

Soit

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu\, e^{2\pi i\nu x}$$

la série de Fourier de la fonction f. Nous pouvons toujours supposer que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0,$$

ce qui revient à dire que $c_0 = 0$.

On a immédiatement

$$F_n(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{n\nu}\, e^{2\pi i n\nu x}$$

d'où on conclut

$$\int_0^1 F_n^2(x)\,dx = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\, c_{n\nu}\,|^2$$

$$\sum_n \int_0^1 F_n^2(x)\,dx = \sum_n \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\, c_{n\nu}\,|^2 = 2 \sum_n \sum_{\nu=1}^{\infty} |\, c_{n\nu}\,|^2 =$$

$$= 2 \sum_{s=1}^{\infty} |\, c_s\,|^2 d(s)$$

où $d(s)$ désigne le nombre de diviseurs de s. D'après un théorème connu [3]) on a

$$d(s) = O\left(c^{\frac{\log n}{\log\log n}}\right) \qquad (c > 2). \tag{3.1}$$

Nous avons donc obtenu le

Lemme 2. *Soit*

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu\, e^{2\pi i \nu x}. \tag{3.2}$$

(3.3) *Si* $$\sum_3^{\infty} |\, c_\nu\,|^2\, c^{\frac{\log \nu}{\log\log \nu}} < \infty \qquad (c > 2)$$

la suite $\{F_n(x)\}$ *converge presque partout vers l'intégrale de la fonction* f.

Supposons $c_0 = 0$. D'après (3.3) on a

$$\sum_n \int_0^1 F_n^2(x)\,dx < \infty$$

et à plus forte raison $F_n(x) \to 0$ presque partout.

La condition (3.3) est vérifiée si l'on a par exemple

$$\sum_1^{\infty} |\, c_\nu\,|^2\, \nu^{\varepsilon} < \infty \qquad (\varepsilon > 0). \tag{3.4}$$

On a donc le

Lemme 3. *Soit*

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu\, e^{2\pi i \nu x}$$

et

$$\sum_1^{\infty} |\, c_\nu\,|^2\, \nu^{\varepsilon} < \infty \qquad (\varepsilon > 0).$$

---

[3]) Voir p. ex. E. Landau, Handbuch, § 60, p. 219.

La suite $\{F_n(x)\}$ converge presque partout vers l'intégrale de la fonction f.

Il est évident que pour la démonstration indépendante du lemme 3 il suffit de démontrer que

$$d(s) = O(s^{\varepsilon}) \qquad (\varepsilon > 0). \tag{3.5}$$

Cette dernière relation [4]) peut être établie d'une façon très simple.

En effet, soit

$$s = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{\varkappa}^{\alpha_{\varkappa}} \tag{3.6}$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_{\varkappa}$ sont des nombres premiers.

On a

$$d(s) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \cdots (1+\alpha_{\varkappa}).$$

Donnons-nous un ε et soit N un nombre fixe que nous préciserons plus loin en fonction de ε.

Désignons par q_i ceux des nombres p_i dans la formule (3.6) qui sont plus petits que N et par r_i ceux qui sont plus grands que N. On a donc

$$s = \Pi_1 \Pi_2 \quad \text{où} \quad \Pi_1 = \Pi q_i^{\beta_i}, \; \Pi_2 = \Pi r_i^{\gamma_i},$$

$$d(s) = \omega_1 \omega_2, \quad \omega_1 = (1+\beta_1)(1+\beta_2) \cdots, \quad \omega_2 = (1+\gamma_1)(1+\gamma_2) \cdots.$$

On a évidemment

$$s \geqq 2^{\beta_1+\beta_2+\cdots}.$$

Le nombre des β étant borné pour tout N fixé, il en résulte que $\omega_1 < A\, s^{\varepsilon}$, A n'étant fonction que de ε.

D'autre part,

$$\omega_2 \leqq e^{\gamma_1+\gamma_2+\cdots}, \quad s \geqq e^{\log N\,(\gamma_1+\gamma_2+\cdots)}$$

si donc $\log N > \frac{1}{\varepsilon}$ on a $\omega_2 \leqq s^{\varepsilon}$ ce qui donne le résultat en question.

Lemme 4. *Soit*

$$\int_0^1 [f(x+t) - f(x)]^2\, dx = O(t^{\alpha}) \qquad (\alpha > 0), \tag{3.7}$$

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{\nu}\, e^{2\pi i \nu x}\ ;$$

---

[4]) Connue depuis longtemps. Voir, p. ex., Pascal, Repertorium der Höheren Analysis [Leipzig u. Berlin, 1929], 1522.

on a

$$\sum_{1}^{\infty} |c_\nu|^2 \nu^{\varepsilon} < \infty \qquad (\varepsilon < \alpha).$$

Considérons l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{[f(x+t)-f(x-t)]^2}{t^p} \, dx \, dt.$$

Cette intégrale est sûrement finie d'après (3.7) pour $p < 1 + \alpha$. D'autre part, on a d'après l'égalité de Parseval

$$\int_0^1 |f(x+t) - f(x-t)|^2 \, dx = 4 \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_\nu|^2 \sin^2 2\pi\nu t$$

ce qui donne

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(x+t)-f(x-t)|^2}{t^p} \, dt \, dx = 4 \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_\nu|^2 \int_0^1 \frac{\sin^2 2\pi\nu t}{t^p} \, dt \geqq$$

$$\geqq \text{const} \cdot \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_\nu|^2 \, |\nu|^{p-1}.$$

On voit que $p - 1$ peut être aussi proche de α que l'on veut.

Le théorème 2 résulte immédiatement des lemmes 3 et 4.

Il nous reste à démontrer que les conditions de la forme

$$\int_0^1 |f(x+t) - f(x)|^p \, dx = O(t^{\varepsilon})$$

n'assurent pas en général la convergence presque partout de la suite $\{F_n(x)\}$ si $p < 2$.

En effet, considérons la fonction $f(x) = x^{-s}$ $\left(s > \frac{1}{2}\right)$. Pour tout $p < \frac{1}{s}$ on trouve facilement

$$\int_0^1 |f(x+t) - f(x)|^p \, dx = O(t^{1-ps}).$$

D'autre part, on sait [5]) que l'on a pour tout x $\lim\sup F_n(f, x) = \infty$.

4. On voit que dans la démonstration du dernier théorème des propriétés arithmétiques interviennent nécessairement. Il nous paraît que ceci correspond à une certaine réalité. Nous allons le montrer sur deux exemples.

Supposons que la fonction f soit de la forme

$$f \sim \sum c_p \, e^{2\pi i p x}$$

où les p sont des nombres premiers et $c_p \to 0$.

---

[5]) Voir les travaux cités dans la note [2]) ci-dessus.

On voit que $F_n(x)$ est presque partout égale à zéro si n n'est pas un nombre premier et à $c_p e^{2\pi i p x} + c_{-p} e^{-2\pi i p x}$ dans le cas contraire. Il en résulte que sauf pour un ensemble de mesure nulle on a uniformément $F_n(x) \to 0$.

Or, la fonction f peut être non bornée essentiellement dans aucun intervalle, ce qui rend la convergence uniforme (sauf pour un ensemble de mesure nulle) surprenante.

On obtient un autre exemple en considérant les expressions $F_p(x)$ seulement pour les indices p premiers. On trouve facilement dans ce cas

$$\sum_p \int_0^1 |F_p(x)|^2 \, dx \leqq 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^2 p(\nu)$$

où

$$f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i \nu x}, \quad c_0 = 0,$$

$p(\nu)$ désignant le nombre de nombres premiers qui divisent ν. On démontre facilement que $p(\nu) = O\left(\frac{\log \nu}{\log\log \nu}\right)$. Il en résulte que $F_p(x) \to 0$ presque partout dès que

$$\sum_{3}^{\infty} |c_\nu|^2 \frac{\log \nu}{\log\log \nu} < \infty. \tag{4.1}$$

Le raisonnement employé dans le lemme 4 montre que la condition (4.1) est sûrement vérifiée si l'on a par exemple

$$\int_0^1 |f(x+t) - f(x)|^2 \, dx = O\left(\frac{1}{\log^2 \frac{1}{t}}\right),$$

ce qui est une hypothèse beaucoup plus faible que (1.5).

Pour démontrer la relation $p(\nu) = O\left(\frac{\log \nu}{\log\log \nu}\right)$, considérons un nombre ν ayant p diviseurs premiers. On a alors

$$\nu = p_{\varkappa_1}^{\alpha_1} p_{\varkappa_2}^{\alpha_2} \cdots p_{\varkappa_p}^{\alpha_p} \quad \text{avec} \quad \alpha_i \geqq 1$$

$$\nu \geqq p_{\varkappa_1} p_{\varkappa_2} \cdots p_{\varkappa_p} \geqq p_1 p_2 \cdots p_p,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_p$ étant les p premiers nombres premiers. Donc,

$$\log \nu > \log 2 + \cdots + \log p > \int_1^p \log x \, dx \sim p \log p.$$

Ce qui entraîne la relation annoncée.

5. LEMME 5. *Soit*

$$\sigma(n) = \sum_{d/n} \frac{1}{d}$$

où la sommation est étendue à tous les diviseurs d du nombre n. On a

$$\sigma(n) = O(\log\log n).$$

Soit

$$n = \prod_{p/n} p^{\alpha} \qquad (p \text{ premiers}).$$

On a

$$\sigma(n) = \prod_{p/n}\left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{\alpha}}\right) < \prod_{p/n}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{2}{p^2}\right),$$

$$\log \sigma(n) \leqq \sum_{p/n}\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p^2}\right) < \sum_{p/n} \frac{1}{p} + A_1,$$

A_1 étant une constante absolue.

Le nombre m de nombres premiers à considérer dans la somme est tel que

$$n > 2^m,$$

$$m < \frac{\log n}{\log 2}.$$

Donc

$$\log \sigma < \sum_{i=1}^{i=\left[\frac{\log n}{\log 2}\right]} \frac{1}{p_i} + A_1,$$

où les p_i désignent les nombres premiers consécutifs.

D'autre part, on sait [6]) que $\frac{p_m}{m \log m} \to 1$, on a donc

$$p_m < A_2\, m \log m,$$

A_2 étant une constante absolue. Il en résulte

$$p_m < A_2 \frac{\log n}{\log 2}(\log\log n - \log\log 2)$$

ou bien

$$p_m < A_3 \log n \log\log n, \ \log \sigma < \sum_{p < A_3 \log n \log\log n} \frac{1}{p} + A_1.$$

---

[6]) Voir p. ex. LANDAU, Handbuch § 57, p. 213.

Or, on sait que [7])

$$\sum_{p \leqq x} \frac{1}{p} < \log \log x + A_4,$$

où A_4 est une constante absolue. Il vient donc

$$\log \sigma \leqq \log \log (A_3 \log n \log \log n) + A_1 + A_4$$
$$\sigma = O(\log \log n).$$

Supposons

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2\pi i \nu x} \qquad (c_0 = 0).$$

On a alors

$$\sum \frac{1}{n} \int_0^1 F_n^2(x)\, dx = 2 \sum \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_{n\nu}|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} |c_\nu|^2 \sigma(\nu),$$

où $\sigma(\nu)$ désigne la même fonction que dans le lemme 5, donc $\sigma(\nu) = O(\log \log \nu)$.

Nous avons donc obtenu le

Lemme 6. *Si*

$$f(x) \sim \sum c_\nu e^{2\pi i \nu x},$$

$$\sum_{\nu=3}^{\infty} |c_\nu|^2 \log \log \nu < \infty, \tag{5.1}$$

on a presque partout, $\Phi_n(x)$ étant définie par (1.6),

$$\Phi_n(x) \to \int_0^1 f(x)\, dx. \tag{5.2}$$

En effet, sous la condition (5.1) nous avons démontré (en posant $c_0 = 0$) que

$$\sum \frac{1}{n} \int_0^1 F_n^2(x)\, dx < \infty.$$

Il en résulte en particulier pour presque tout x

$$\sum \frac{1}{n} F_n^2(x) < \infty,$$

donc aussi, à plus forte raison, par un raisonnement bien connu:

$$\frac{1}{n} \sum_1^n F_\nu^2(x) \to 0.$$

[7]) Voir p. ex. Landau, Handbuch, § 28, p. 100.

La dernière formule entraîne évidemment $\Phi_n(x) \to 0$. D'autre part, on a

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(x+t)-f(x-t)|^2}{t\left|\log \frac{t}{2}\right|} dx\, dt = 8 \sum_1^{\nu} |c_\nu|^2 \int_0^1 \frac{\sin^2 2\pi\nu t}{t\left|\log \frac{t}{2}\right|} dt$$

$$> \text{const} \cdot \sum_1^{\infty} |c_\nu|^2 \log\log(\nu+2),$$

ce qui complète la démonstration du théorème 3.

Le théorème 3 peut être généralisé pour $p < 2$. Nous allons le démontrer seulement pour $p = 1$.

Théorème 4. *Soit*

$$\int_0^1 |f(x+t) - f(x)|\, dx = O\left(\frac{1}{|\log t|^s}\right) \qquad (s > 1)$$

La suite $\Phi_n(x)$ converge presque partout. En particulier, ceci est vrai si la fonction f est croissante dans l'intervalle $(0,1)$ *et telle que*

$$\int_0^1 |f(x)|^p\, dx < \infty$$

pour un certain $p > 1$.

Lemme 7 — *Soit*

$$\int_0^1 |f(x+t) - f(x)|\, dx = O\left(\frac{1}{\log^s \frac{1}{t}}\right).$$

Pour tout n il existe un polynome, d'ordre n au plus, P_n, tel que

$$\int_0^1 |f(x) - P_n(x)|\, dx = O\left(\frac{1}{\log^s n}\right).$$

Ce lemme est connu depuis longtemps. Pour la commodité du lecteur, nous allons reproduire sa démonstration. On voit facilement que

$$(5.3) \qquad \frac{1}{2} + \sum_1^n \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \cos 2\pi\nu t = \frac{\sin^2 (n+1)\pi t}{2(n+1)\sin^2 \pi t} = K_n(t).$$

Il en résulte que l'expression P_n

$$P_n = 2\int_0^1 f(x+t)\, K_n(t)\, dt$$

est un polynome d'ordre n au plus. Considérons la différence

$$\int_0^1 |f(x)-P_n(x)|\,dx \leqq 2\int_0^1\int_0^1 |f(x+t)-f(x)|\,K_n(t)\,dxdt \leqq$$
$$\leqq A\int_0^1 \frac{n\,dt}{(1+n^2t^2)\left|\log\frac{t}{2}\right|^s} = O\left(\frac{1}{\log^s n}\right).$$

Ceci établi, supposons $\int_0^1 f\,dx = 0$ et considérons la série

$$\Sigma \frac{1}{n}\int_0^1 |F_n(x)|\,dx. \tag{5.4}$$

On a

$$F_n(f, x) = F_n(\overline{f - P_{n-1}}, x).$$

En tenant compte du lemme 7 on conclut

$$\int_0^1 |F_n(f)|\,dx \leqq \int_0^1 |f-P_{n-1}|\,dx = O\left(\frac{1}{\log n}\right),$$

ce qui démontre la convergence de la série (5.4).
Il en résulte en particulier, presque partout

$$\Sigma\frac{|F_n(x)|}{n} < \infty,$$

et à plus forte raison, presque partout

$$\frac{1}{n}\sum_1^n |F(x)| \to 0,$$

c'est-à-dire:

$$\Phi_n(x) \to 0.$$

Il nous reste à démontrer qu'une fonction croissante et satisfaisant à la condition

$$\int_0^1 |f(x)|^p\,dx < \infty \qquad (p>1)$$

satisfait aussi à la condition

$$\int_0^1 |f(x+t)-f(x)|\,dx = O\left(\frac{1}{\left(\log\frac{1}{t}\right)^s}\right).$$

On a

$$\int_0^1 |f(x+t)-f(x)|\,dx =$$
$$= \int_0^{1-t} |f(x+t)-f(x)|\,dx + \int_{1-t}^1 |f(x+t)-f(x)|\,dx = A+B.$$

Or, on a

$$|f(x+t)-f(x)| = f(x+t)-f(x) \text{ pour } 0 \leqq x \leqq 1-t.$$

Ce qui donne

$$A = \int_0^{1-t} f(x+t)\,dx - \int_0^{-} f(x)\,dx = \int_t^1 f(x)\,dx - \int_0^{1-t} f(x)\,dx$$

$$= \int_{1-t}^1 f(x)\,dx - \int_0^t f(x)\,dx; \quad A \leqq 2t^{\frac{p-1}{p}} \left\{\int_0^1 f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}},$$

$$A = O(t^{\frac{p-1}{p}}).$$

D'autre part, évidemment,

$$B = O(t^{\frac{p-1}{p}}).$$

On a donc

$$\int_0^1 |f(x+t)-f(x)|\,dx = O(t^{\frac{p-1}{p}}),$$

ce qui entraine

$$\int_0^1 |f(x+t)-f(x)|\,dx = O\left(\frac{1}{\left(\log\frac{1}{t}\right)^s}\right).$$

(Reçu le 21 juin 1939.)