COMPOSITIO MATHEMATICA

S. SIDON

Über Orthogonalsysteme

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 372-375
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__372_0>

Über Orthogonalsysteme

von

S. Sidon

Budapest

1.

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich den Satz bewiesen: Gilt $\lim \alpha_k = \lim \alpha'_k = 0$ für die reellen Zahlenfolgen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ und $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k, \ldots$ und ist $\frac{n_{k+1}}{n_k} > q > 1$ mit von k unabhängigem q, so gibt es eine zur Klasse L gehörige Funktion $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ mit $a_{n_k} = \alpha_k$, $b_{n_k} = \alpha'_k$.

Die Frage, ob ein dem soeben reproduzierten entsprechender Satz für jedes bezüglich eines Intervalls $a < x < b$ normierte, gleichmäßig beschränkte Orthogonalsystem [2]) $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ gilt, d.h. ob es eine Indexfolge $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ von der Beschaffenheit gibt, daß das Gleichungssystem $\int_a^b f(x)\varphi_{n_1}(x)dx = \alpha_1, \ldots,$ $\int_a^b f(x)\varphi_{n_k}(x)dx = \alpha_k, \ldots,$ wo die α_k beliebige Konstanten mit $\lim \alpha_k = 0$ sind, stets durch eine zur Klasse L gehörige Funktion erfüllbar ist, ist unerledigt [3]). Ich erhielt in dieser Richtung den

Satz A: Ist $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ ein bezüglich des Intervalls $0 < x < 2\pi$ normiertes, aus stückweise stetigen Funktionen bestehendes Orthogonalsystem mit $0 < m < |\varphi_n(x)| < M$ im Intervalle $0 < x < 2\pi$ und von x und n unabhängigem m und M, so gibt es eine Indexfolge $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ von der Eigenschaft,

---

[1]) S. Sidon, Einige Sätze und Fragestellungen über Fourier-Koeffizienten [Math. Zeitschrift **34** (1932), 477–480]. Eingesandt am 1. Aug. 1928. Siehe auch S. Banach: Über einige Eigenschaften der lakunären trigonometrischen Reihen [Studia math. **2** (1930), 207–228].

[2]) Das Orthogonalsystem $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ nenne ich gleichmäßig beschränkt, wenn $\operatorname{Max}_{a<x<b} |\varphi_n(x)| < M$ mit von x und n unabhängigem M gilt.

[3]) Siehe hierüber Kacmarc-Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen [Warszawa-Lwow 1935], VII Kap., S. 255. Seit dem Erscheinen dieses Buches ist über das nämliche Problem meines Wissens nichts publiziert worden.

daß zu jeder reellen Nullfolge $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots$ eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(x)$ existiert, für welche $\int f(x)\varphi_{n_k}(x)dx = \alpha_k$ gilt [4]).

Beim Beweise dieses Satzes stütze ich mich auf folgende Hilfssätze:

Hilfssatz I: Das System $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ besitzt ein Teilsystem $\varphi_{n_1}(x), \ldots, \varphi_{n_k}(x), \ldots,$ für dessen Funktionen

$$|\varphi_{n_k}(x) - T_k(x)| < \varepsilon_k > 0$$

im Intervalle $0 < x < 2\pi$ mit Ausnahme einer Menge vom Maße δ_k

$$|T_k(x)| < 2M$$

überall gilt, wo $T_k(x) = \sum_{i=i_k}^{I_k} (a_{ik} \cos ix + b_{ik} \sin ix)$, mit konstanten a und b, $\lim i_k = \infty$, die Konstanten δ_k und ε_k beliebig klein vorgeschrieben werden können, $\lim \delta_k = \lim \varepsilon_k = 0$.

Beweis: Bei festem k gilt

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \cos kx dx = \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) \sin kx dx = 0.$$

Durch Kombination mit den klassischen Fejérschen Sätzen über die $(C, 1)$-Mittel der Fourier-Reihen folgt hieraus das zu beweisende Lemma.

Hilfssatz II: Ist $\varphi_{n_1}(x), \ldots, \varphi_{n_k}(x), \ldots$ ein Teilsystem des Systems φ von derselben Eigenschaft wie das gleichbezeichnete in Hilfssatz I, aber mit $i_k > 2 \sum_{l=1}^{k-1} I_l$, so gilt bei passender Wahl der δ_k und ε_k für jede Funktion $g(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \varphi_{n_k}(x)$, wo die c_k beliebige reelle Konstanten sind, $\sum_{k=1}^{K} |c_k| < \beta \operatorname*{Max}_{0<x<2\pi} |g(x)|$ mit nur von m und M abhängigem β.

Beweis: Hat $T_k(x)$ dieselbe Bedeutung, wie oben und wird $\int_0^{2\pi} g(x)T_k(x)dx = d_k$, $\prod_{k=1}^{K} [1 + \frac{\operatorname{sgn} d_k}{2M} T_k(x)] = P_K(x)$ gesetzt, so gilt bei geeigneter Wahl der δ_k und ε_k

---

[4]) Satz A ist nur mit Rücksicht auf den Beweis für das Intervall $0 < x < 2\pi$ ausgesprochen; er ist natürlich auch für ein beliebiges Intervall $a < x < b$ gültig.

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi} P_K(x)\, T_l(x)\, dx = 0 \text{ für } l > K,$$

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} P_K(x)\, T_l(x)\, dx = \int_0^{2\pi} P_{K-1}(x)\, T_l(x)\, dx \text{ für } l < K,$$

$$(3) \qquad \int_0^{2\pi} P_K(x)\, dx = 2\pi,$$

$$(4) \qquad \int_0^{2\pi} P_K(x)\, T_K(x)\, dx = \frac{\operatorname{sgn} d_K}{2M} C_K m^2,$$

$$(5) \qquad \left| \sum_{k=1}^{K} |c_k| - \sum_{k=1}^{K} |d_k| \right| < \gamma \operatorname*{Max}_{0<x<2\pi} |g(x)|$$

mit $C_k > C > 0$ und absolut konstantem C und γ.

Wenn $l > K$, so ist die Ordnung von $P_K(x)$ kleiner, als der Exponent sämtlicher nichtverschwindender Glieder von $T_l(x)$. Daraus folgt 1. Analog ergeben sich auch 2 und 3. Also ist

$$\int_0^{2\pi} P_K(x)\, T_K(x)\, dx = \frac{\operatorname{sgn} d_K}{2M} \int_0^{2\pi} P_{K-1}(x)\, T_K^2(x)\, dx = \frac{\operatorname{sgn} d_K}{2M} C_K m^2$$

mit $C_K > C > 0$, womit auch 4 bewiesen ist. Daher gilt

$$\sum_{k=1}^{K} |d_k|\, C_k = \left| \frac{2M}{m^2} \int_0^{2\pi} g(x)\, P_K(x)\, dx \right| < \frac{4M\pi}{m^2} \operatorname*{Max}_{0<x<2\pi} |g(x)|.$$

Hieraus folgt Hilfssatz II durch Kombination mit 5.

Hilfssatz III: Ist $\psi_1(x), \dots, \psi_k(x), \dots$ ein bezüglich des Intervalls $a < x < b$ normiertes Orthogonalsystem und gilt für jede Funktion $g(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k \psi_k(x)$ mit konstanten c_k, $\sum_{k=1}^{K} |c_k| < \beta \operatorname*{Max}_{a<x<b} |g(x)|$ mit von $g(x)$ unabhängigem β, so gibt es zu jeder reellen Nullfolge $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots$ eine Funktion $f(x)$ der Klasse L, mit

$$\int_a^b f(x) \psi_k(x)\, dx = \alpha_k \text{ für } k = 1, 2, \dots$$ [5])

Satz A ergibt sich durch Kombination der Hilfssätze II und III.

2.

In meiner Arbeit „Über unvollständige Orthogonalsysteme“ [6]) habe ich die Frage nach der Existenz von Teilsystemen eines

---

[5]) Banach loc. cit. [1]).

[6]) Compositio Math. 4 (1937), 372—379.

jeden normierten, gleichmäßig beschränkten vollständigen Orthogonalsystems mit beliebigen charakteristischen Exponenten > 2 aufgeworfen. Dieses Problem habe ich bisher selbst für die klassischen Systeme (trigonometrisches, Walshsches System) nicht erledigen können. Die hiedurch nahegelegte Frage nach der Existenz normierter, gleichmäßig beschränkter Orthogonalsysteme überhaupt, bei denen der charakteristische Exponent der Teilsysteme das Intervall $2 < p < \infty$ durchläuft, ist in bejahendem Sinne zu beantworten. Ein solches System entsteht z.B. durch Normierung aus $\varphi_{11}(x), \ldots, \varphi_{nk}(x) = = \cos 2^{(2k+1)2^n} x + \frac{\cos (2k+1)2^n x}{[(2k+1)2^n]^{r_n}}, \ldots,$ wo die Folge der r_n mit der Gesamtheit der rationalen Zahlen des Intervalls $0 < r < \frac{1}{2}$ identisch ist. Das in der Note „Nachtrag zu meiner Arbeit: Über unvollständige Orthogonalsysteme" [7]) zur Konstruktion eines speziellen, eine noch weitere Bedingung erfüllenden, gleichmäßig beschränkten normierten Orthogonalsystems vom charakteristischem Exponenten 4 an erster Stelle angegebene Verfahren kann für einen beliebigen Exponenten > 2 verallgemeinert werden. Mit Hilfe der so gebildeten Systeme läßt sich auch ein normiertes, gleichmäßig beschränktes Orthogonalsystem konstruieren, bei dem der charakteristische Exponent der Teilsysteme das Intervall $2 < p < \infty$ durchläuft.

[7]) Compositio Math. 5 (1938), 433—434.

(Eingegangen den 17. Juni 1939.)