COMPOSITIO MATHEMATICA

ISAIE MAXIMOFF

Sur les ensembles mesurables B dans l'espace transfini

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 201-213

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__201_0>

Sur les ensembles mesurables B dans l'espace transfini

par

Isaie Maximoff

Tscheboksary

---

1. Soit Ω_i le premier nombre transfini que précèdent $\aleph_i$ nombres transfinis. La suite de nombres x_α, $1 \leqq x_\alpha < \Omega_i$,

$$x = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\alpha, \ldots] \qquad (1 \leqq \alpha < \Omega_i), \tag{1}$$

sera nommée point de l'espace transfini d'ordre i. Nous désignons cet espace par $I_x^{(i)}$.

Nous dirons qu'un point quelconque

$$x^{(1)} = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_\alpha^{(1)} \ldots,\} \qquad (\alpha < \Omega_i)$$

de l'espace $I_x^{(i)}$ est égal à un autre point

$$x^{(2)} = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots, x_x^{(2)}, \ldots\} \qquad (\alpha < \Omega_i)$$

à μ près si

$$x_\alpha^{(1)} = x_\alpha^{(2)}$$

pour tout α qui satisfait à la condition

$$\mu \leqq \alpha < \Omega_i.$$

L'ensemble des points x de $I_x^{(i)}$ pour lesquels $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n étant un nombre *naturel* quelconque $(n < \Omega_0)$, sont donnés, est appelé *portion* d'ordre n de $I_x^{(i)}$.

L'ensemble des points x de $I_x^{(i)}$ pour lesquels $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ $(n < \Omega_0)$ sont donnés est appelé *arrondissement* de $I_x^{(i)}$, et nous le désignons par $(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \ldots)$ $(n < \Omega_0)$.

Appelons espace transfini à m dimensions l'ensemble de tous les systèmes $[x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}]$ où $x^{(s)}$, $1 \leqq s \leqq m$, est un point quelconque de $I_{x^{(s)}}^{(i)}$. Cet espace sera désigné par $I_{x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}}^{(i)}$ ou par $I_X^{(i)}$ où $X = [x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(m)}]$.

Appelons portion d'ordre n de l'espace $I_x^{(i)}$ l'ensemble des points $M[x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(m)}]$ de cet espace dont les coordonnées $x^{(1)}$,

$x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ appartiennent chacune aux portions d'ordre n quelconques, soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$, situées respectivement dans les espaces

$$I^{(i)}_{x^{(1)}}, I^{(i)}_{x^{(2)}}, \ldots, I^{(i)}_{x^{(m)}}.$$

Appelons arrondissement de $I^{(i)}_x$ l'ensemble de tous les points $X = [x^{(1)}x^{(2)} \ldots x^{(m)}]$ de cet espace dont les coordonnées $x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}$ appartiennent chacune aux arrondissements $A_1, A_2, \ldots, A_m$ quelconques, situés respectivement dans les espaces

$$I^{(i)}_{x^{(1)}}, I^{(i)}_{x^{(2)}}, \ldots I^{(i)}_{x^{(m)}}.$$

Il est évident que si m est un nombre naturel quelconque, l'ensemble de toutes les portions de $I^{(i)}_{x^{(1)}x^{(2)} \ldots x^{(m)}}$ est de la puissance $\aleph_i$.

Considérons une suite d'ensembles

$$(2) \qquad E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega_i)$$

formés de points de $I^{(i)}_x$.

Nous aurons à effectuer sur ces ensembles les trois opérations suivantes.

I. Somme (Ω_i). Cette opération fait correspondre à la suite (2) l'ensemble

$$(3) \qquad S = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_\alpha + \cdots \qquad (a < \Omega_i)$$

formé des points appartenant à l'un au moins des ensembles E_α.

L'ensemble S ainsi obtenu s'appelle la *somme* (Ω_i) des ensembles donnés E_α $(\alpha < \Omega_i)$.

II. Partie commune (Ω_i). Cette opération donne l'ensemble P formé des points communs à tous les ensembles de la suite (2). L'ensemble P ainsi obtenu s'appelle partie commune (Ω_i) aux ensembles de la suite (2); nous la désignons par

$$P = E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdots E_\alpha \cdots \quad (\alpha < \Omega_i).$$

Une suite d'ensembles

$$(4) \qquad E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

de points de $I^{(i)}_x$ est appelée convergente (Ω_i) si pour chaque point X de cet espace il existe une valeur $\alpha = \alpha_0$, dépendant de X, telle que X ou bien appartient nécessairement à tous les E_α, $\alpha \geqq \alpha_0$, ou bien n'appartient à aucun des E_α, $\alpha \geqq \alpha_0$.

III. Limite (Ω_i). L'ensemble E de tous les points X qui appartiennent à tous les E_α, $\alpha \geqq \alpha_0$ (α_0 dépend de X), est appelé limite (Ω_i) de la suite convergente (4) et nous écrivons:

$$E = \lim_{\alpha \to \Omega_i} E_\alpha.$$

Classe initiale. Si l'ensemble E de l'espace $I_x^{(i)}$ et son complémentaire $CE = I_x^{(i)} - E$ peuvent être représentés comme sommes (Ω_i) de portions de cet espace, E appartient à la classe initiale $K_0^{(i)}(\aleph_i)$.

La classe $K_\alpha^{(i)}(\aleph_i)$ est définie comme l'ensemble de tous les ensembles de points E qui sont limites (Ω_i) d'ensembles E_α de classes précédentes

$$E = \lim_{\alpha \to \Omega_i} E_\alpha.$$

Si un ensemble E appartient à la classe $\mathrm{K}_\alpha^{(i)}(\aleph_i)$ sans appartenir à une classe précédente, nous dirons que *l'ensemble E est de classe α.*

Le but de cette note est de démontrer que pour tout nombre α, $\alpha < \Omega_{i+1}$, il existe effectivement au moins un ensemble E qui est de classe α.

2. La notion fondamentale qui nous servira dans cette étude est celle de point-limite.

Le point x_0 de $I_x^{(i)}$ est dit limite de la suite de points

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu, \ldots \quad (\nu < \Omega_0),$$

si quel que soit l'entier n, les x_ν sont, pour ν assez grand, contenus dans la portion d'ordre n qui contient x_0, et si, en outre, les x_ν sont égaux à x_0 à Ω_0 près.

Nous dirons que le point $X_0 = [x_0^{(1)}\, x_0^{(2)} \ldots x_0^{(m)}]$ de $I_x^{(i)}$ est limite de la suite de points

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_\nu, \ldots \quad (\nu < \Omega_0)$$

où $X_\nu = [x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \ldots, x_\nu^{(m)}]$ si $x_0^{(s)}$ est limite de la suite de points

$$x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, x_3^{(s)}, \ldots, x_\nu^{(s)}, \ldots \quad (1 \leqq s \leqq m, \nu < \Omega_0).$$

Pour exprimer que X_0 est limite de la suite

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_\nu, \ldots \quad (\nu < \Omega_0),$$

nous écrivons

$$X_0 = \lim_{\nu \to \Omega_0} X_\nu.$$

Etant donné un ensemble P de points de $I_x^{(i)}$, on dit qu'un point X_0 (faisant partie ou non de P) est *point-limite pour* P si toute portion contenant X_0 contient au moins un point X_1

de P tel que X_1 est égal à X_0 à Ω_0 près, mais $X_1 \neq X_0$. Désignons par $P^{(1)}$ l'ensemble déterminé de manière suivante:

en premier lieu, tout point-limite pour P appartient à $P^{(1)}$;

en second lieu, si un point $\overline{X}$ appartient à $P^{(1)}$, alors $P^{(1)}$ contient tout point X qui appartient à l'arrondissement contenant $\overline{X}$.

Nous dirons que $P^{(1)}$ est *le dérivé de* P.

Nous appellerons *fermé* tout ensemble F de $I_x^{(i)}$ qui jouit des propriétés suivantes:

a) tout point-limite pour F est contenu dans F;

b) si un point $\overline{X}$ appartient à F, alors F contient tout point X qui appartient à l'arrondissement contenant $\overline{X}$.

Nous dirons qu'une portion *est relative* à l'ensemble E, si elle contient au moins un point de E, et qu'elle est *extérieure à* E, si elle ne contient aucun point de E.

Théorème 1. Tout ensemble fermé F est complémentaire de la somme de toutes les portions extérieures à F.

Démonstration. Soit

$$(P)\ P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

la suite de toutes les portions extérieures à F et soit $P = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_\alpha + \cdots$

Je dis que $F = I_x^{(i)} - P$ ou $F = CP$.

En effet, soit f un point quelconque de F.

Il est clair que f n'est pas contenu dans P, par suite, f est contenu dans CP. Cela veut dire que $F \subset CP$.

Soit p un point quelconque de CP.

Il est clair que p n'est pas contenu dans P. Cela veut dire que si Q_n est la portion d'ordre n contenant p, cette portion Q_n, quel que soit n, n'est identique à aucune des portions

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

La portion Q_n contient au moins un point q_n de F, quel que soit n. Soit q_n^1 un point qui est déterminé de la manière suivante:

en premier lieu, q_n^1 appartient à l'arrondissement contenant q_n;

en second lieu, q_n^1 est égal au point p à près de Ω_0.

Le point q_n^1 ainsi déterminé appartient à F, puisque F est fermé.

On doit considérer les cas suivants:

Ou bien il existe un entier ν telque $q_n^1 = p$ pour tout $n > \nu$. Dans ce cas p appartient à F puisque q_n^1 est un élément de F.

Ou bien il n'existe aucun entier ν tel que $q_n^1 = p$ pour tout

$n > \nu$. Cela veut dire que pour tout entier ν on peut trouver un entier n, $n > \nu$, tel que $q_n^1 \neq p$.

Dans ce cas p est un point-limite pour F, par suite, p appartient à l'ensemble fermé F. Donc, nous avons: $CP \subset F$ et $F \subset CP$ d'où résulte $F = CP$.

Voici une conséquence immédiate du théorème précédent: tout ensemble fermé appartient à la classe $K_1^{(i)}(\aleph_i)$.

Voici encore un exemple d'un ensemble fermé *qui est de classe* 1: soit X un point quelconque de $I_X^{(i)}$, l'arrondissement $A(X)$ contenant X est un ensemble de classe 1 et, en outre, il est fermé.

Théorème 2. Le complémentaire de la somme (Ω_i) de portions est fermé.

Démonstration. Soit p un point-limite quelconque pour CS où S est la somme de portions. La portion $Q_n(p)$ d'ordre n contenant p contient au moins un point q_n de CS tel que q_n est égal au point p à Ω_0 près et $q \neq p$. Le point q_n appartient à CS, par suite, il n'appartient pas à S, quel que soit n. Comme q_n n'appartient pas à S, la portion $Q_n(p)$ n'est pas contenu dans S, quel que soit m. Cela veut dire que p n'appartient pas à S, parsuite, p est contenu dans S. Donc, S est fermé.

Théorème 3. La partie commune (Ω_i) aux ensembles fermés est fermé.

Démonstration. Prenons une suite quelconque d'ensembles fermés

$$(F) \quad F_1, F_2, F_3, \ldots, F_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega_i).$$

D'après le théorème 1 on peut écrire:

$F_\alpha = CS_\alpha$ où S_α est la somme (Ω_i) d'ensembles fermés. Alors $F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdots F_\alpha \cdots = CS_1 \cdot CS_2 \cdot CS_3 \cdots CS_\alpha =$ $= C(S_1+S_2+S_3+ \cdots +S_\alpha+ \cdots)$. Comme $S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_\alpha + \cdots$ est aussi la somme (Ω_i) de portions, d'après le théorème 2, l'ensemble $C(S_1+S_2+S_3+ \cdots +S_\alpha+ \cdots)$ est fermé, par suite, l'ensemble $F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdots F_\alpha \cdots$ est fermé.

3. Soit E un ensemble quelconque de points de $I_X^{(i)}$. En faisant correspondre à tout élément X de cet ensemble un point

$$Y = [y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}]$$

de $I_y^{(i)}$, nous obtenons une fonction

$$Y = f(X)$$

définie sur E.

Alors supposons que $E = I_X^{(i)}$.

Cette fonction est dite continue en point X_0 si, pour tout nombre naturel n, il existe un entier μ_n tel que $f(X)$ est contenu dans la portion P d'ordre n, contenant $Y_0 = f(X_0)$, lorsque X_0 est contenu dans la portion Q d'ordre μ_n contenant X_0, et qu'en outre, si $\overline{Y} = f(\overline{X})$ et si X parcourt l'arrondissement de $I_X^{(i)}$, alors Y parcourt l'arrondissement de $I_Y^{(i)}$ contenant Y_0.

Dans ce qui suit joue un rôle essentiel la suite de fonctions continues

$$t_1 = \varphi_1(t), t_2 = \varphi_2(t), \ldots, t_\alpha = \varphi_\alpha(t), \ldots \quad (\alpha < \Omega_i),$$

ayant les propriétés suivantes:

a) à toute suite de points

$$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

situés respectivement dans

$$I_{t_1}^{(i)}, I_{t_2}^{(i)}, I_{t_3}^{(i)}, \ldots, I_{t_\alpha}^{(i)}, \ldots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

correspond un point et un seul de $I_t^{(i)}$;

b) si $t' \neq t''$ il existe un nombre α, $\alpha < \Omega_i$, tel que

$$\varphi_\alpha(t') \neq \varphi_\alpha(t'').$$

Voici le procédé analogue à celui de N. Lusin [1]) qui nous donne une telle suite de fonctions. L'ensemble de tous les points

$$x = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\alpha, \ldots] \quad (\alpha < \Omega_i)$$

de $I_x^{(i)}$ pour lesquels

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\alpha,$$

α étant fixe, sont donnés est appelé groupe d'ordre α de $I_X^{(i)}$.

Maintenant à tout groupe δ d'ordre 1 de $I_t^{(i)}$ nous faisons correspondre un groupe d'ordre 1 de $I_t^{(i)}$, et réciproquement.

A tout groupe δ d'ordre 2 de $I_t^{(i)}$ nous faisons correspondre un système Γ_2 formé de deux groupes δ_1 et δ_2 d'ordre 2 respectivement situés dans $I_{t_1}^{(i)}$ et $I_{t_2}^{(i)}$ de manière que le groupe d'ordre 1 contenant δ corresponde au groupe d'ordre 1 contenant δ_1, et que *vice versa* à tout système Γ_2 analogue corresponde un groupe d'ordre 2 de $I_t^{(i)}$.

---

[1]) Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications (Paris, 1930), 115—116.

Soit n un nombre de première espèce et $n < \Omega_i$. D'une manière générale, à tout groupe δ d'ordre n de $I_t^{(i)}$ correspond un système Γ_n formé de n groupes $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ d'ordre n situés respectivement sur $I_{t_1}^{(i)}, I_{t_2}^{(i)}, \ldots, I_{t_n}^{(i)}$ de telle manière que le groupe d'ordre $n-1$ contenant δ corresponde à un groupe Γ_{n-1} formé de groupes d'ordre $n-1$ contenant respectivement $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ et que vice versa à tout système analogue Γ_n corresponde un groupe d'ordre n de $I_t^{(i)}$.

Soit α un nombre transfini de seconde espèce tel que $\alpha < \Omega_i$. D'une manière générale, à tout groupe δ d'ordre α de $I_t^{(i)}$ correspond un système Γ_α formé de groupes

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\alpha$$

d'ordre α situés respectivement dans

$$I_{t_1}^{(i)}, I_{t_2}^{(i)}, \ldots, I_{t_\alpha}^{(i)}$$

de telle manière que chaque groupe d'ordre α', $\alpha' < \alpha$, contenant δ corresponde à un système $\Gamma_{\alpha'}$ formé de groupes d'ordre α' contenant respectivement $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\alpha$, et *vice versa.*

On voit bien que le procédé indiqué nous donne les équations

$$(L) \quad t_1 = \varphi_1(t), t_2 = \varphi_2(t), \ldots, t_\alpha = \varphi_\alpha(t), \ldots \quad (\alpha < \Omega_i),$$

$\varphi_n(t)$ étant continue sur $I_t^{(i)}$.

Donc, nous avons les fonctions cherchées $\varphi_\alpha(t)$.

4. Nous dirons que tout ensemble E de $I_X^{(i)}$ qu'on obtient à partir des portions de $I_X^{(i)}$ au moyen des deux opérations „somme (Ω_i)" et „partie commune (Ω_i)", répétées au plus $\aleph_i$ fois, *est mesurable* $B(\aleph_i)$. Nous désignons par $B^{(i)}(\aleph_i)$ la classe de tous les ensembles mesurables $B(\aleph_i)$.

Il est évident que chaque classe $K_\alpha^{(i)}(\aleph_i)$, $\alpha < \Omega_{i+1}$, ne peut contenir que des ensembles mesurables $B(\aleph_i)$; l'inverse a encore lieu: tout ensemble de points E mesurable $B(\aleph_i)$ appartient à une classe $K_\alpha^{(i)}(\aleph_i)$ déterminée. Il est aisé de démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 4. Si un ensemble de points E est de classe α, son complémentaire CE l'est aussi.

Théorème 5. La somme (Ω_i) et la partie commune (Ω_i) d'ensembles sont de classe au plus égale à la classe immédiatement supérieure aux classes de tous les ensembles composants.

Théorème 6. Soit $Y = f(X)$ une fonction continue sur $I_X^{(i)}$. Si $f(X)$ parcourt tous les points Y d'un ensemble B de classe α, X parcourt tous les points d'un ensemble A de classe α', $\alpha' \leqq \alpha$.

Pour étudier la structure des ensembles mesurables $B(\aleph_i)$ nous avons besoin des définitions suivantes:

Un ensemble E de classe α est dit *accessible supérieurement* si E est la partie commune (Ω_i) d'ensembles de classes inférieures à α. De même, un ensemble E de classe α est dit accessible inférieurement si E est la somme (Ω_i) d'ensembles de classes inférieures à α. Appelons élément de classe α, $\alpha \geqq 1$, tout ensemble de classe α qui est accessible supérieurement et qui de plus dans le cas où α est un nombre de seconde espèce n'est pas accessible inférieurement.

Si $\alpha = 0$ appelons élément de classe α toute portion.

Théorème 7. Tout ensemble de classe α est une somme (Ω_i) d'éléments de classe $\leqq \alpha$ n'ayant aucune partie commune.

Pour le démontrer supposons que le théorème est vrai pour toutes les classes inférieures à α et montrons qu'il est encore vrai pour la classe α elle-même. Soit E un ensemble quelconque de classe α. Nous avons

$$E = \lim_{n\to\Omega_i} E_n$$

où E_n est de classe $\alpha_n < \alpha$. Comme l'opération $\lim_{n\to\Omega_i} E_n$ se ramène aux sommes (Ω_i) et aux parties communes (Ω_i) par la formule

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\Omega_i} E_n = {} & (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdots E_\alpha \cdots) + \\ & + (E_2 \cdot E_3 \cdot E_4 \cdots E_\alpha \cdots) + \\ & + (E_3 \cdot E_4 \cdot E_5 \cdots E_\alpha \cdots) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (E_\alpha \cdot E_{\alpha+1} \cdot E_{\alpha+2} \cdots E_{\alpha+\beta} \cdots) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\alpha < \Omega_i,\ \beta < \Omega_i),\end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}E = {} & (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdots E_\alpha \cdots) + \\ & + (CE_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot E_4 \cdots E_\alpha \cdots) + \\ & + (CE_2 \cdot E_3 \cdot E_4 \cdot E_5 \cdots E_\alpha \cdots) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (CE_\alpha \cdot E_{\alpha+1} \cdot E_{\alpha+2} \cdot E_{\alpha+3} \cdots E_{\alpha+\beta} \cdots) + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (\alpha < \Omega_i,\ \beta < \Omega_i).\end{aligned}$$

On voit bien que les parenthèses sont des ensembles n'ayant aucune partie commune deux à deux et que la classe de chacune des parenthèses est $\leqq \alpha$.

Si la classe d'une parenthèse est inférieure à α, cette parenthèse est, d'après l'hypothèse faite, une somme (Ω_i) d'éléments de classe $< \alpha$ sans parties communes deux à deux. Si une parenthèse est un ensemble accessible inférieurement de classe α, elle est une somme (Ω_i) d'ensembles de classe $< \alpha$ et, par suite, une somme (Ω_i) d'éléments de classe $< \alpha$.

Or, si une parenthèse est de classe α et n'est pas un ensemble accessible inférieurement de cette classe, c'est un élément de classe α. Donc, E est une somme (Ω_i) d'éléments de classe $\leqq \alpha$ sans partie commune deux à deux.

Comme chaque ensemble E de classe $K_0^{(i)}(\aleph_i)$ est une somme (Ω_i) de portions, le théorème est vrai pour $\alpha = 0$, et, par suite, dans tous les cas.

Théorème 8. Si E est un ensemble plan situé dans $I_{tx}^{(i)}$ et si nous transformons l'espace $I_{tx}^{(i)}$ en un espace $I_{\tau x}^{(i)}$ au moyen des équations $t = \varphi(\tau)$, $x = x$, la fonction φ étant continue dans $I_\tau^{(i)}$, la transformée E' de E est un ensemble dont la classe ne dépasse pas la classe de E.

Pour le démontrer nous construisons une fonction

$$[t, y] = \Phi[\tau, x],$$

déterminée par la formule:

$$\Phi[\tau, x] = [\varphi(\tau), x].$$

Il est évident que la fonction Φ est continue sur $I_{\tau x}^{(i)}$. Si le point $[t, y]$ parcourt l'ensemble E, le point correspondant $[\tau, x]$ parcourt l'ensemble E' qui d'après le théorème 6 est de classe inférieure ou égale à la classe de E.

5. Prenons dans l'espace $I_{xy}^{(i)}$ à deux dimensions un ensemble E de classe α. Nous dirons que l'ensemble de tous les points $[x_0, y]$ de cet espace où x_0 est un point donné de $I_x^{(i)}$, est une droite parallèle à l'axe OY. Nous la désignons par l'équation $x = x_0$.

Désignons par l'équation $y = x$ l'ensemble de tous les points $[x, y]$ de $I_{xy}^{(i)}$ satisfaisant à l'équation $y = x$. Nous l'appelons une diagonale de $I_{xy}^{(i)}$.

Si nous coupons l'ensemble E par la droite $x = x_0$ nous obtenons un ensemble linéaire, et il importe de reconnaître la nature de cet ensemble e.

On peut sans peine démontrer les théorèmes suivants:

Théorème 9. Tout ensemble à deux dimensions de classe α est coupé par chaque droite $x = x_0$ suivant un ensemble linéaire de classe $\leqq \alpha$.

THÉORÈME 10. Tout élément E à deux dimensions de classe α est coupé par chaque droite $x = x_0$ suivant un ensemble e qui ou bien est de classe $< \alpha$, ou bien est un ensemble de classe α accessible inférieurement et supérieurement en même temps, ou bien un élément de classe α.

Ceci étant établi, nous posons la définition suivante: nous dirons qu'un élément de classe α situé dans $I^{(i)}_{x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(m)}\,x}$ est *universel* si l'on obtient tous les éléments à m dimensions possibles de classe α en coupant l'ensemble E par l'ensemble

$$I^{(i)}_{x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(m)}\,x_0}$$

de tous les points $[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}x_0]$.

THÉORÈME 11. Il y a des éléments universels de classe 1 à $m+1$ dimensions.

Pour le voir, prenons une suite

$$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

formée de toutes les portions de $I^{(i)}_{x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(m)}}$. Soit $\delta = (a_1 a_2 \ldots a_k)$, $k < \Omega_0$, une portion d'ordre k dans $I^{(i)}_x$. Faisons correspondre à δ l'ensemble E_δ des points $[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}x]$ de $I^{(i)}_{x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(m)}\,x}$ dont les coordonnées x appartiennent à δ et dont les $[x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}]$ appartiennent à la somme des k portions $\pi_{a_1} + \pi_{a_2} + \cdots + \pi_{a_k}$. Il est clair que E_δ est une somme (Ω_i) de portions à $m+1$ dimensions.

Cela posé prenons la somme S de tous les ensembles E_δ ainsi définis. Comme l'ensemble de tous les ensembles E_δ a la puissance $\aleph_i$, l'ensemble S est un ensemble de classe 1 inférieurement.

Je dis que son complémentaire $E = CS$ est un élément universel de classe 1.

Pour le voir prenons un élément quelconque à m dimensions de classe 1. Soit e cet ensemble. Le complémentaire Ce de e est une somme (Ω_i).

$$\pi_{a_1} + \pi_{a_2} + \pi_{a_3} + \cdots + \pi_{a_\nu} + \cdots \quad (n < \Omega_i)$$

de portions de $I^{(i)}_{x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(m)}}$. Si nous prenons le point

$$x_0 = [a_1 a_2 a_3 \ldots a_\nu, \ldots], \ \nu < \Omega_i,$$

de $I^{(i)}_x$, on voit bien que l'ensemble $I^{(i)}_{x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(m)}\,x_0}$ coupe S précisément suivant l'ensemble Ce, par suite, E précisement suivant l'ensemble e. Donc, on obtient tous les éléments à n dimensions de classe 1 en coupant E par $I^{(i)}_{x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(m)}\,x_0}$.

D'autre part, il y a des éléments à m dimensions *de classe* 1 qui ne sont pas des ensembles de classe $K_0^{(i)}(\aleph_i)$. De cela il résulte que E est un élément universel de classe 1.

THÉORÈME 12. Il y a des éléments universels de toute classe β, $\beta < \Omega_{i+1}$.

Démonstration. Nous supposons que cette existence est déjà démontrée pour toutes les classes inférieures à β, et nous allons démontrer qu'elle a encore lieu pour la classe β elle-même, $\beta < \Omega_{i+1}$.

Soit

$$(1) \qquad E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\alpha, \ldots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

une suite d'éléments universels de toutes les classes précédentes [sauf $K_0^{(i)}(\aleph_i)$] à deux dimensions, chacun de ces éléments étant répété dans la suite (1) une infinité $\aleph_i$ de fois. Nous supposons que l'élément universel E_α est situé dans l'espace $I_{t_\alpha x}^{(i)}$.

Alors désignons par E_α^1 le transformé de E_α au moyen des équations

$$t_\alpha = \varphi_\alpha(t), \; x = x$$

où les $\varphi_\alpha(t)$ sont les fonctions continues déterminées précédemment [voir 3]. D'après le théorème 8 l'ensemble E_α^1 est d'une classe qui ne dépasse pas la classe de E_α. Donc, la réunion S des ensembles E'_α est un ensemble, ou bien de classe $< \beta$, ou bien accessible inférieurement de classe β.

Nous allons démontrer que S a la propriété suivante: quelque soit l'ensemble e à m dimensions supposé ou bien de classe $< \beta$, ou bien accessible inférieurement de classe β, il existe un point τ_0 tel que la droite $\tau = \tau_0$ parallèle à l'axe OX dans $I_{tx}^{(i)}$ coupe S précisément selon cet ensemble e.

En effet, nous avons

$$e = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots + e_\alpha + \cdots \quad (\alpha < \Omega_i)$$

où e_α est un élément de classe $< \beta$. D'après la définition même de la suite (1) il existe un point $t_{\alpha_k}^0$ tel que la droite $t_{\alpha_k} = t_{\alpha_k}^0$ parallèle à l'axe OX dans $I_{t_{\alpha_k}x}^{(i)}$ coupe E_{α_k} précisément selon e_k. Puisque, dans la suite (1) chaque terme étant considéré comme un ensemble géométrique est répété une infinité $\aleph_i$ de fois, nous pouvons supposer la suite de nombres

$$(2) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots \quad (\nu < \Omega_i)$$

croissante, donc sans nombres égaux. Dans ces conditions, d'après la propriété supposée des fonctions

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \Omega_i),$$

il existe un point τ_0 tel que $t^0_{\alpha_k} = \varphi_{\alpha_k}(\tau_0)$, quel que soit k, et tel que pour les autres τ^0_α définis par les égalités $t^0_\alpha = \varphi_\alpha(\tau_0)$ les droites $t_\alpha = t^0_\alpha$ parallèles à l'axe OX dans $I^{(i)}_{t_\alpha x}$ ne coupent pas les éléments universels correspondants. Le point τ_0 étant défini de cette manière on voit bien que la droite $t = \tau_0$ parallèle à l'axe OX dans $I^{(i)}_{tx}$ coupe S précisément selon l'ensemble e.

Soit E le complémentaire de S. Nous allons démontrer que l'ensemble plan E ainsi défini est effectivement un élément de classe β et, par suite, qu'il existe des ensembles de toute classe.

Pour le voir nous menons la diagonale $x = t$ dans $I^{(i)}_{tx}$ et nous désignons par η l'ensemble des points de cette diagonale qui n'appartiennent pas à E. Nous dirons que le point x de $I^{(i)}_x$ est projection du point $[t, x]$ de $I^{(i)}_{tx}$ sur l'axe OX. Soit e la projection de η sur l'axe OX. Nous commençons par la démonstration du fait que e ne peut être obtenu en coupant E par une droite $t = t_0$ parallèle à l'axe OX.

En effet, soit t_0 un point de $I^{(i)}_t$ tel que la droite $t = t_0$ coupe E selon e. Considérons le point M de la diagonale située sur la droite $t = t_0$. Nous allons démontrer que l'existence de ce point M implique contradiction.

Deux cas seulement sont possibles.

Ou bien le point M appartient à E. Dans ce cas, la projection N de M appartient à e. D'autre part, e est la projection de l'ensemble η formé des points du complémentaire CE qui appartiennent à la diagonale. Donc, M appartient à CE, ce qui est contradictoire.

Ou bien le point M appartient à CE. Dans ce cas, la projection N de M appartient à e. Or, l'ensemble e est la projection des points de E situés sur la droite $t = t_0$. Donc, M appartient à E, et nous tombons à nouveau dans une contradiction.

Cela posé, prenons l'ensemble plan E tel qu'on obtient sûrement tous les ensembles linéaires possibles de classe $< \beta$ en coupant E par les parallèles $t = t_0$ à l'axe OX. Si l'ensemble E était lui-même de classe $< \beta$, la partie commune à E et à la diagonale $x = t$ le serait aussi. Dans ces conditions l'ensemble η serait de classe $< \beta$ ainsi que sa projection e sur l'axe OX.

Donc, l'ensemble e devrait être obtenu en coupant E par une droite $t = t_0$ ce qui est impossible.

Voici la conclusion à laquelle nous sommes ainsi amenés par ce raisonnement:

Toute classe

$$K_{\beta}^{(i)}(\aleph_i) \qquad (\beta < \Omega_{i+1})$$

contient au moins un ensemble qui n'appartient à aucune classe précédente,

$$K_{\beta_1}^{(i)}(\aleph_i) \qquad (\beta_1 < \beta).$$

(Reçu le 14 novembre 1938.
Reçu avec des modifications le 22 mars 1939.)