

COMPOSITIO MATHEMATICA

MAKOTO ABE

**Über die Methode der Polyederentwicklung
der Kompakten und ihre Anwendungen
auf die Abbildungstheorie**

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 185-193

http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__185_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Über die Methode der Polyederentwicklung der Kompakten und ihre Anwendungen auf die Abbildungstheorie

von

Makoto Abe

Tokyo

§ 1. Von den Polyederentwicklungen der Kompakten.

Wie H. Freudenthal ¹⁾ bewiesen hat, läßt sich jedes Kompaktum in eine irreduzible auf- R_n -adische Polyederfolge entwickeln. Für die Anwendung ist es aber zweckmäßig, auch eine gleichzeitige Entwicklung von einem Kompaktum *und* einem (beliebig aber fest gewählten) Teilkompaktum desselben in eine auf- R_n -adische Polyederfolge zu betrachten. Die Möglichkeit solcher Entwicklung ist durch folgende leichte Modifikation des Hilfssatzes XII ²⁾, i. c. versichert.

HILFSSATZ. *Ein Kompaktum R sei in eine auf- R_n -adische Folge der Polyeder $\{\bar{L}_n\}$ entwickelt ^{2a)}:*

$$f_m^n \bar{L}_n = \bar{L}_m, \quad m < n, \quad R = \lim (\bar{L}_n, f_m^n)^3, \quad \lim_n f_m^n = f_m;$$

ferner seien die Abbildungen ⁴⁾ f_m^n (und daher auch f_m) irreduzibel ⁵⁾. F sei ein beliebig aber fest gewähltes Teilkompaktum von R . Dann läßt sich R auch in eine Folge $\{\bar{L}'_n\}$ mit folgenden Eigenschaften I)–IV) entwickeln.

¹⁾ H. FREUDENTHAL, Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen [Compositio Math. 4 (1937), 145–234], insbesondere Kap. IV. Wir setzen im folgenden diese Arbeit als bekannt voraus und zitieren sie als „Entwicklungen“.

²⁾ „Entwicklungen“, Kap. IV, S. 189.

^{2a)} Wir bezeichnen im folgenden mit L, K usw. die „absoluten Komplexe“ als rein kombinatorische Gebilde (also als Mengen der „Zellen“) und mit \bar{L}, \bar{K} usw. die von den Komplexen L, K usw. bestimmten „Polyeder“ als Punktfolgen. Vgl. ALEXANDROFF & HOPF, S. 128.

³⁾ Wir bezeichnen mit $\lim (R_n, f_m^n)$ den Limesraum der R_n -adischen Folge $R_m \supset f_m^n R_n$.

⁴⁾ Wir setzen im folgenden immer die Stetigkeit der in Frage kommenden Abbildungen voraus, auch wenn es nicht ausdrücklich erwähnt ist.

$$h_\mu^v \bar{L}'_{n_\nu} = \bar{L}'_{n_\mu}, \quad \mu < \nu, \quad R = \lim (\bar{L}'_{n_\nu}, h_\mu^v), \quad \lim_\nu h_\mu^v = h_\mu.$$

I) $\{L'_{n_\nu}\}$ ist eine Teilfolge von $\{L_n\}$. L'_{n_ν} ist eine Unterteilung von L_{n_ν} .

II) h_μ^v ist eine simpliziale Abbildung von L'_{n_ν} auf eine Unterteilung von L'_{n_μ} .

III) $h_\mu^v \bar{L}'_{n_\nu} = \bar{L}'_{n_\mu}$ bzw. $h_\mu R = \bar{L}'_{n_\mu}$ ist eine zulässige Abänderung⁵⁾ von $f_{n_\mu}^{n_\nu} \bar{L}'_{n_\nu} = \bar{L}'_{n_\mu}$ bzw. von $f_{n_\mu} R = \bar{L}'_{n_\mu}$ in bezug auf die Simplizialzerlegung L'_{n_μ} . Sie sind also auch irreduzibel⁵⁾ (in bezug auf L'_{n_μ}).

IV) $h_\mu F = \bar{K}_\nu$, K_ν ist ein Teilkomplex von L'_{n_ν} . In der auf- R_n -adischen Entwicklung von F ,

$$h_\mu^v \bar{K}_\nu = \bar{K}_\mu, \quad \lim (\bar{K}_\nu, h_\mu^v) = F,$$

sind h_μ^v , h_μ irreduzibel in bezug auf K_μ .

Von den Bedingungen I)–IV) ist natürlich die letzte die wesentlichste. Die bei Freudenthal nicht vorausgesetzte Irreduzibilität der ursprünglichen Folge wird hier deswegen verlangt, weil wir erzielen wollen, daß das ganze Kompaktum R nach der Abänderung noch in eine auf- R_n -adischen (irreduziblen) Polyederfolge entwickelt bleibt. Der Beweis verläuft fast genau wie bei Freudenthal; wir übergehen ihn hier, um eine Wiederholung zu vermeiden.

Aus diesem Hilfssatz lassen sich folgende Folgerungen ziehen:

I. ^{5a)} Jedes Kompaktum F läßt sich in eine auf- R_n -adische Polyederfolge

$$f_m^n \bar{K}_n = \bar{K}_m, \quad \lim (\bar{K}_n, f_m^n) = F$$

derart entwickeln, daß f_m^n eine simpliziale Abbildung von K_n auf eine Unterteilung von K_m ist, und f_m^n , f_m irreduzibel sind.

Beweis. Wie bei Freudenthal⁶⁾ stellen wir uns F als Teilkomplektum des Fundamentalquaders R des Hilbertschen Raumes vor. \bar{L}_n sei der n -dimensionale Quader, der aus R durch Nullsetzen aller Koordinaten von der $(n+1)$ -ten ab entsteht. Die

⁵⁾ Es seien F ein Kompaktum, K ein Komplex. Eine Abbildung $gF \subset \bar{K}$ heißt nach Freudenthal zulässige Abänderung der Abbildung $fF \subset \bar{K}$ (in bezug auf die Simplizialzerlegung K), wenn ga für jeden Punkt a von F auf dem Trägersimplex von fa in K liegt. Wenn für jede zulässige Abänderung g von $fF \subset \bar{K}$ immer $gF = fF$ gilt, heißt die Abbildung f irreduzibel (in bezug auf die Simplizialzerlegung K).

^{5a)} Dies ist nichts anders als der Hauptsatz I von „Entwicklungen“.

⁶⁾ „Entwicklungen“, Kap. IV, S. 191.

Projektion von \bar{L}_n auf \bar{L}_m heiÙe f_m^n , dann ist die Folge $f_m^n \bar{L}_n = \bar{L}_m$ ($\lim \bar{L}_n = R$) irreduzibel, und die Behauptung folgt aus dem Hilfssatz.

II. F sei ein Kompaktum, F' ein Teilkompaktum desselben. F und F' lassen sich gleichzeitig in irreduzible auf- R_n -adische Folgen entwickeln:

$$\begin{aligned} f_m^n \bar{L}_n &= \bar{L}_m, & \lim (\bar{L}_n, f_m^n) &= F, \\ f_m^n \bar{K}_n &= \bar{K}_m, & \lim (\bar{K}_n, f_m^n) &= F'. \end{aligned}$$

Hierbei ist K_n ein Teilkomplex von L_n , f_m^n eine simpliziale Abbildung von L_n auf eine Unterteilung von L_m . f_m^n, f_m^m sind irreduzibel.

Beweis. F sei nach I in eine irreduzible auf- R_n -adische Polyederfolge entwickelt. Im Hilfssatz ersetze man nun R durch F , F durch F' . Dann ergibt sich die obige Behauptung ohne weiteres.

Nun seien F' und F'' zwei Teilkompakten von F . Ist F' einmal nach II gleichzeitig mit F irreduzibel auf- R_n -adisch entwickelt, so werden diese Eigenschaften der Entwicklung von F' offenbar nicht zerstört⁷⁾, wenn man die Abänderungsprozesse des Hilfssatzes nochmals bez. F, F'' anwendet. Es gilt also allgemein:

III. $F^{(1)}, \dots, F^{(v)}$ seien Teilkompakten von F . F läÙt sich in eine Polyederfolge $\{L_n\}$ derart entwickeln, daÙ dann $F^{(1)}, \dots, F^{(v)}$ alle gleichzeitig in Folgen der Teilpolyeder $\{\bar{K}_n^{(1)}\}, \dots, \{\bar{K}_n^{(v)}\}$ von \bar{L}_n mit den Bedingungen wie bei II irreduzibel entwickelt werden.

Bemerkung. Wenn die Folge $f_m^n \bar{K}_n = \bar{K}_m$, $\lim \bar{K}_n = F$, irreduzibel ist, so steigt die $\dim K_n$ mit n , und es gilt $\lim \dim K_n = \dim F$ ⁸⁾. Ist also $\dim F = r < \infty$, kann man für alle n $\dim K_n = r$ annehmen.

§ 2. Von den stetigen Abbildungen der Kompakten in die Sphäre.

Wir wollen nun die im letzten Paragraphen hergestellte Polyederentwicklung der Kompakten auf die Untersuchung der stetigen Abbildungen der Kompakten in die Sphäre anwenden.

Zunächst einige Vorbemerkungen:

1) F sei ein Kompaktum, F' ein Teilkompaktum von F . Die Operation τ der Randbildung bildet die Gruppe der ε_n -Zyklen $\mathfrak{Z}_{\varepsilon_n}^{\tau+1}(F) \bmod F'$ ⁹⁾ in die Gruppe der ε_n -Zyklen $\mathfrak{Z}_{\varepsilon_n}^r(F')$ homomorph ab. Dabei geht die Gruppe der ε_n -Ränder $\mathfrak{Z}_{\varepsilon_n}^{\tau+1}(F)$

⁷⁾ Dies folgt nicht direkt aus dem Hilfssatz, ist aber ähnlich zu beweisen. Übrigens brauchen wir im folgenden die Folgerung III nicht.

⁸⁾ Vgl. „Entwicklungen“, Kap. VII, S. 229.

⁹⁾ „Entwicklungen“, Kap. VI, S. 194.

mod F'^9) in die Gruppe der ε_n -Ränder $\mathfrak{S}_{\varepsilon_n}^r(F')$ über. Die Operation τ bildet also auch die Bettische ε_n -Gruppe $\mathfrak{B}_{\varepsilon_n}^{r+1}(F)$ mod F'^9) in die Bettische ε_n -Gruppe $\mathfrak{B}_{\varepsilon_n}^r(F')$ homomorph ab. Diese Homomorphismen ($n=1, 2, 3, \dots, \lim \varepsilon_n=0$) bestimmen einen Homomorphismus der Limesgruppe $\lim \mathfrak{B}_{\varepsilon_n}^{r+1}(F)$ mod $F' = \mathfrak{B}_{\varepsilon_n}^{r+1}(F)$ mod F'^{10}) in die Limesgruppe $\lim \mathfrak{B}_{\varepsilon_n}^r(F') = \mathfrak{B}^r(F')$:

$$\tau \mathfrak{B}^{r+1}(F) \text{ mod } F' \subset \mathfrak{B}^r(F').$$

Bildet nun eine Abbildung $f: F$ in Φ und zugleich F' in $\Phi' \subset \Phi$ ab, so ist die von f induzierte homomorphe Abbildung der entsprechenden Bettischen Gruppen (die wir wieder mit f bezeichnen wollen) offenbar mit τ vertauschbar, d.h. die zwei Abbildungen

$$\tau f \mathfrak{B}^{r+1}(F) \text{ mod } F' \subset \mathfrak{B}^r(\Phi') \text{ und } f \tau \mathfrak{B}^{r+1}(F) \text{ mod } F' \subset \mathfrak{B}^r(\Phi')$$

stimmen überein.

2) Ein Kompaktum F sei in eine R_n -adische Folge der Kompakten

$$F_m \supset h_m^n F_n, \lim F_n = F, \lim_n h_m^n = h_m$$

entwickelt. $f: F \subset S$ sei eine stetige Abbildung von F in die Sphäre S (oder allgemeiner in irgendeinen Retrakt S). Es gibt für alle n Abbildungen

$$f^n F_n \subset S$$

derart, daß $fF \subset S$ und $f^n h_n F \subset S$ alle miteinander homotop sind, ebenso $f^n F_n \subset S$ und $f^m h_m^n F_n \subset S$. Zum Beweise fassen wir alle F_n und F in einem Kompaktum R zusammen, so daß die n -te „Koordinate“ $a_n = h_n a \subset F_n$ eines Punktes $a \subset F$ für wachsendes n gleichmäßig und „wirklich“ in R gegen den Punkt a konvergiert¹¹⁾. Man kann $fF \subset S$ zu einer Abbildung einer Umgebung U von F in S erweitern¹²⁾. Dieses U enthält fast alle F_n . Die so auf F_n definierte Fortsetzung von f bezeichnen wir mit $f^n F_n \subset S$. Für ein hinreichend großes n liegen a und $h_n a$ bzw. a_n und $h_m^n a_n$ sehr nahe beieinander, also auch fa und $f^n h_n a$ bzw. $f^n a_n$ und $f^m h_m^n a_n$, infolge der Stetigkeit der Fortsetzung von f . Daher sind $f^n h_n$ für fast alle n homotop mit f und also auch miteinander, ebenso $f^m h_m^n$ mit f^n , w.z.b.w.

¹⁰⁾ „Entwicklungen“, Kap. VI, S. 198.

¹¹⁾ „Entwicklungen“, Kap. I, S. 153.

¹²⁾ S^r sei in R^{r+1} eingebettet. $fF' \subset S^r$ läßt sich zu $\tilde{f}F \subset R^{r+1}$ erweitern. Für eine hinreichend kleine Umgebung U von F' ist $\tilde{f}U$ dem Mittelpunkt o der Sphäre S^r fremd. φ sei die Projektion der Punkte von $R^{r+1} - o$ auf S^r aus dem Zentrum o . Dann liefert $\varphi \tilde{f} \cdot U \subset S^r$ die gewünschte Erweiterung von f .

Deuten wir f^n, f usw. als Abbildung der Bettischen Gruppen, so bedeuten diese Homotopien, daß $f = f^n h_n$ und $f^n = f^m h_m^n$ ist:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathfrak{B}^r(S) & & \\
 & \nearrow f^m & \uparrow f^n & \nwarrow f & \\
 \mathfrak{B}^r(F_m) & \xleftarrow{h_m^n} & \mathfrak{B}^r(F_n) & \xleftarrow{h^n} & \mathfrak{B}^r(F)
 \end{array}$$

D.h. $\{f^n\}$ bildet die Folge $\{\mathfrak{B}^r(F_n)\}$ in $\mathfrak{B}^r(S)$ ab, und f ist die Limesabbildung von $\{f^n\}$.¹³⁾

SATZ 1. Erweiterungssatz¹⁴⁾. *F sei ein (r+1)-dimensionales Kompaktum, F' ein Teilkompaktum von F. f F' C S^r sei eine stetige Abbildung von F' in die r-dimensionale Sphäre S^r. Damit sich diese Abbildung zu einer Abbildung des ganzen F in die S^r erweitern läßt, ist die Bedingung fr B^{r+1}(F) mod F' co R₁¹⁵⁾ = 0 notwendig und hinreichend.*

Beweis. Hat f eine Erweiterung $\bar{f} F C S^r$, so ist $fr B^{r+1}(F) \text{ mod } F' = f r B^{r+1}(F) \text{ mod } F' = r f B^{r+1}(F) \text{ mod } F' C r B^{r+1}(S^r) \text{ mod } S^r = 0$. Daher ist die Bedingung notwendig. Um die Bedingung als auch hinreichend nachzuweisen, setzen wir einmal voraus, daß $f F' C S^r$ sich nicht auf das ganze F erweitern läßt. Nach § 1, II entwickeln wir nun F, F' irreduzibel in die Folgen

$$\bar{L}_m = h_m^n \bar{L}_n, \quad \lim \bar{L}_n = F \text{ bzw. } \bar{K}_m = h_m^n \bar{K}_n, \quad \lim \bar{K}_n = F',$$

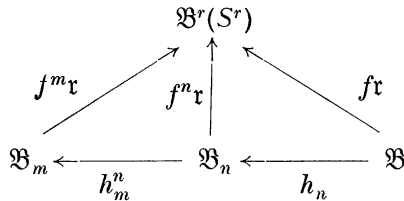
wobei $L_n \supset K_n$ und $\dim L_n = r + 1$ ist. Nach 2 können wir Abbildungen f^n für (fast) alle n definieren, so daß f und $f^n h_n$ bzw. f^n und $f^m h_m^n$ miteinander homotop sind. $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}^{r+1}(\bar{L}_n) \text{ mod } \bar{K}_n \text{ co } R_1$ bilden eine G_n -adische Folge

¹³⁾ „Entwicklungen“, Kap. I, S. 156.

¹⁴⁾ Dieser Satz ist im Falle des Polyeders als der Hopfsche Erweiterungssatz bekannt. Vgl. ALEXANDROFF & HOPF, Topologie I, SS. 499—509. Im Falle des Kompaktums hat K. Kodaira diesen Satz bewiesen [Compositio Math. 7 (1939), 177—184]. Der dort gebrauchte Koeffizientenbereich ist jedoch die Gruppe der reellen Zahlen mod 1 statt der der rationalen Zahlen mod 1. Unser Satz ist eine leichte Verschärfung des Satzes von Kodaira. Im wesentlichen ist aber dieser Satz schon in der Arbeit von Alexandroff-Hopf-Pontrjagin „Über den Brouwerschen Dimensionsbegriff“ [Compositio Math. 4 (1937), 237—255] enthalten, wenn er auch dort nicht explizit formuliert ist.

¹⁵⁾ Unter „co R₁“ verstehen wir „mit der Gruppe der rationalen Zahlen reduziert mod 1 als Koeffizientenbereich“. Übrigens werden wir späterhin nur diesen Koeffizientenbereich gebrauchen.

$\mathfrak{B}_m \supset h_m^n \mathfrak{B}_n$ mit der Limesgruppe $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{r+1}(F) \text{ mod } F' \text{ co } \mathfrak{R}_1$. Die Abbildungsfolge $f^n \tau \mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}^r(S^r) \text{ co } \mathfrak{R}_1$ bildet eine Abbildung¹⁶⁾ der Folge $\{\mathfrak{B}_n\}$ in $\mathfrak{B}^r(S^r) \text{ co } \mathfrak{R}_1$ mit der Limesabbildung $f \tau \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^r(S^r) \text{ co } \mathfrak{R}_1$, denn es gelten die Zusammensetzungsregeln $f^m \tau \cdot h_m^n (= f^m h_m^n \cdot \tau) = f^m \tau$ und $f^n \tau \cdot h_n (= f^n h_n \cdot \tau) = f \tau$.



Nun sind die Abbildungen $f^n h_n F' \subset S^r$ homotop mit $f F' \subset S^r$, lassen sich also ebenso wie f nicht auf das ganze F erweitern¹⁷⁾ und daher auch nicht $f^n \bar{K}_n \subset S^r$ auf das ganze \bar{L}_n . Nach dem bekannten Hopfschen Erweiterungssatz¹⁸⁾ folgt daraus

$$f^n \tau \mathfrak{B}_n \neq 0, \text{ f\"ur alle } n.$$

$h_m^n \mathfrak{B}_n$ bilden nun f\"ur ein bestimmtes m eine mit n monoton absteigende Folge der Untergruppen von \mathfrak{B}_m :

$$\mathfrak{B}_m \supset h_m^{n+1} \mathfrak{B}_{m+1} \supset \dots \supset h_m^n \mathfrak{B}_n \supset \dots$$

Da aber alle Gruppen $h_m^n \mathfrak{B}_n$ von dem Typus der direkten Summe einer endlicher Anzahl von \mathfrak{R}_1 und einer endlichen Gruppe sind¹⁹⁾, k\"onnen sie nicht eine wirklich absteigende unendliche Folge bilden. Also sind von einem gewissen $N = N(m)$ ab alle $h_m^n \mathfrak{B}_n$ gleich:

$$h_m^N \mathfrak{B}_N = h_m^{N+1} \mathfrak{B}_{N+1} = \dots$$

Offenbar kann man $N(m)$ so w\"ahlen, da\ss $N(m) > N(m-1)$ ist. $h_n^{N(n)} \mathfrak{B}_{N(n)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, bilden dann eine auf- G_n -adische Folge $h_m^{N(m)} \mathfrak{B}_{N(m)} = h_m^n \cdot h_n^{N(n)} \mathfrak{B}_{N(n)}$, die mit $\{\mathfrak{B}_n\}$ isomorph ist²⁰⁾ und als Limesgruppe wieder \mathfrak{B} hat. $h_n^{N(n)} \mathfrak{B}_{N(n)}$ ist also mit $h_n \mathfrak{B}$ gleich. Daraus ergibt sich

$$f \tau \mathfrak{B} = f^n \tau h_n \mathfrak{B} = f^n \tau h_n^{N(n)} \mathfrak{B}_{N(n)} = f^{N(n)} \tau \mathfrak{B}_{N(n)} \neq 0.$$

Die Bedingung des Satzes ist folglich nicht erf\"ullt. Aus der

¹⁶⁾ Siehe ¹³⁾.

¹⁷⁾ K. Kodaida, a. a. O., Hilfssatz 2.

¹⁸⁾ Siehe ¹⁴⁾.

¹⁹⁾ Vgl. z.B. Alexandroff & Hopf, Topologie I, S. 234.

²⁰⁾ D.h. Die Folge $\mathfrak{B}_m \supset h_m^n \mathfrak{B}_n$ geh\"ort zu einem „Auftypus“ in der Terminologie Freudenthals.

Bedingung folgt daher die Erweiterbarkeit der Abbildung, w.z.b.w.

KOROLLAR. *Ist die Brouwersche Dimension, $\dim F$, des Kompaktums F gleich r , so gibt es ein Teilkompaktum F' von F , so daß* 1) $\mathfrak{B}^{r-1}(F') \text{ co } \mathfrak{R}_1 \supset r \mathfrak{B}^r(F) \text{ mod } F' \text{ co } \mathfrak{R}_1 \neq 0$ *und folglich* 2) $\mathfrak{B}^r(F) \text{ mod } F' \text{ co } \mathfrak{R}_1 \neq 0$ *ist. Für $s > r$ gilt aber $\mathfrak{B}^s(S) \text{ mod } F' = 0$ und folglich $r \mathfrak{B}^s(F) \text{ mod } F' = 0$ für jedes $F' \subset F$.*

Beweis. Die letzte Behauptung erklärt sich daraus, daß F sich in eine Folge r -dimensionaler Polyeder entwickeln läßt. Es gibt nun eine wesentliche Abbildung f von F auf die r -dimensionale Vollkugel E^r . S^{r-1} sei die Randsphäre von E^r , F' das f -Urbild von S^{r-1} . $fF' \subset S^{r-1}$ läßt sich dann zu keiner Abbildung des ganzen F in die S^{r-1} erweitern. Nach dem soeben bewiesenen Satz ist $f r \mathfrak{B}^r(F) \text{ mod } F' \text{ co } \mathfrak{R}_1 \neq 0$, also $r \mathfrak{B}^r(F) \text{ mod } F' \text{ co } \mathfrak{R}_1 \neq 0$ w.z.b.w.

Bemerkung. In der Sprache der konvergenten Zyklen läßt sich die Beziehung $r \mathfrak{B}^r(F) \text{ mod } F' \neq 0$ so deuten: Es gibt einen $(r-1)$ -dimensionalen konvergenten Zyklus in F' , der in F , aber nicht in F' berandet, d.h. einen $r-1$ -dimensionalen berandenden wesentlich-konvergenten Zyklus in F ; $\mathfrak{B}^r(F) \text{ mod } F' \neq 0$ bedeutet andererseits: Es gibt einen r -dimensionalen nicht berandenden konvergenten Relativzyklus in $F \text{ mod } F'$. Es gibt dagegen keinen solchen Zyklus höherer Dimensionen. Dies ist der Hauptinhalt der Arbeit von Alexandroff-Hopf-Pontrjagin: „Über den Brouwerschen Dimensionsbegriff“. ²¹⁾ Das oben Gesagte ist mit der dortigen Schreibweise so ausgedrückt:

$$1) \dim F = \Delta_{\mathfrak{R}_1}^c(F) \text{ und } 2) \dim F = \Delta_{\mathfrak{R}_1}^c(F).$$

SATZ 2. Homotopiesatz ²²⁾. *F sei ein r -dimensionales Kompaktum. Zwei Abbildungen $f_0 F \subset S^r$ und $f_1 F \subset S^r$ von F in die r -dimensionale Sphäre S^r gehören dann und nur dann zur selben Abbildungsklasse, wenn sie denselben Homomorphismus von $\mathfrak{B}^r(F) \text{ co } \mathfrak{R}_1$ in $\mathfrak{B}^r(S^r) \text{ co } \mathfrak{R}_1 \cong \mathfrak{R}_1$ induzieren. (Den von f induzierten Homomorphismus können wir als Charakter mod 1 der Gruppe $\mathfrak{B}^r(F) \text{ co } \mathfrak{R}_1$ betrachten. Wir werden ihn im folgenden mit χ_f bezeichnen.)*

Beweis. Die Notwendigkeit der genannten Bedingung ist klar. Nun sei diese erfüllt. Man setze $F \times [0 \leq t \leq 1] = \Phi$ ²³⁾.

²¹⁾ Siehe ¹⁴⁾.

²²⁾ Im Falle eines Polyeders, ALEXANDROFF & HOPF, Topologie I, Kap. XIII, § 2, Satz I.

²³⁾ Das topologische Produkt von F und der Strecke $0 \leq t \leq 1$.

Φ ist dann ein $(r+1)$ -dimensionales Kompaktum. Die topologische Abbildung $x \rightarrow x \times t$ (für x aus F) bezeichnen wir mit g_t ; $g_t F = F \times t = F_t$. Wir definieren ferner eine Abbildung $f(F_0 + F_1) \subset S^r$, indem wir $f(x \times 0) = f_0 x$, $f(x \times 1) = f_1 x$ für x aus F setzen. ($f g_0 = f_0$, $f g_1 = f_1$.) $F_0 + F_1$ ist ein Teilkompaktum von Φ . Läßt sich dieses f auf das ganze Φ erweitern, so wird der Satz bewiesen sein. ζ sei nun ein beliebiges Element aus $\mathfrak{B}^{r+1}(\Phi) \bmod (F_0 + F_1) \text{ co } \mathfrak{R}_1$. Offenbar ist $\mathfrak{B}^r(F_0 + F_1) = \mathfrak{B}^r(F_0) \dot{+} \mathfrak{B}^r(F_1) = g_0 \mathfrak{B}^r(F) \dot{+} g_1 \mathfrak{B}^r(F)$; $r\zeta$ läßt sich daher in der Form $r\zeta = g_0 \zeta' - g_1 \zeta''$ darstellen, wobei ζ' , ζ'' Elemente aus $\mathfrak{B}^r(F)$ sind. Bezeichnen wir die Projektion $x \times t \rightarrow x \times 0$ mit $\varphi\Phi = F_0$, so daß $\varphi g_t = g_0$, und bilden wir $\varphi r\zeta$! Es ist einerseits

$$\varphi r\zeta = r\varphi\zeta = 0,$$

$$\text{andererseits } \varphi r\zeta = \varphi(g_0 \zeta' - g_1 \zeta'') = g_0 \zeta' - g_0 \zeta'',$$

also $g_0 \zeta' - g_0 \zeta'' = 0$ und $\zeta' = \zeta''$, $r\zeta = g_0 \zeta' - g_1 \zeta'$. Aus der Bedingung des Satzes folgt nun $f_0 \zeta' = f_1 \zeta'$, folglich $fr\zeta = f(g_0 \zeta' - g_1 \zeta') = f_0 \zeta' - f_1 \zeta' = 0$, d.h. $fr\mathfrak{B}^r(\Phi) \bmod (F_0 + F_1) \text{ co } \mathfrak{R}_1 = 0$. Die Bedingung der Erweiterbarkeit von f ist also erfüllt, w.z.b.w.

Von jetzt an schreiben wir kurz $\mathfrak{B}(F)$ statt $\mathfrak{B}^r(F) \text{ co } \mathfrak{R}_1$.

LEMMA. \bar{K} sei ein r -dimensionales Polyeder. Für jeden Charakter $\chi \mathfrak{B}(K) \subset \mathfrak{R}_1$ gibt es eine Abbildung $f\bar{K} \subset S^r$, so daß $\chi = \chi_f$ ist.

Beweis. Der Charakter χ der Gruppe $\mathfrak{B}(K) \cong \mathfrak{B}^r(K) \text{ co } \mathfrak{R}_1$ läßt sich zum Charakter χ der Gruppe der algebraischen Komplexe $\mathfrak{B}^r(K) \text{ co } \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{R}_1 x_\alpha$ erweitern, wo $|x_1|, \dots, |x_\alpha|$ die r -dimensionalen Simplexe in K sind. χ wird durch die Homomorphismen $\chi(\mathfrak{R}_1 x_i) \subset \mathfrak{R}_1$, $i=1, 2, \dots, \alpha$, vollständig bestimmt; diese letzten Homomorphismen sind aber von dem Typus $\chi(tx_i) = n_i t$, wobei n_i ganz-rational und t ein beliebiges Element aus \mathfrak{R}_1 ist. Man kann in üblicher Weise²⁴⁾ eine Abbildung $f\bar{K} \subset S^r$ derart konstruieren, daß $f(\bar{x}_i)$ ein fest gewähltes Simplex genau n_i -mal bedeckt. Für diese f ist $\chi_f = \chi$, w.z.b.w.

SATZ 3. F sei ein r -dimensionales Kompaktum. Für jeden Charakter $\chi \mathfrak{B}(F) \subset \mathfrak{R}_1$ gibt es eine Abbildung $fF \subset S^r$, so daß $\chi_f = \chi$ ist.

Beweis. F sei in eine auf- R_n -adische Folge der r -dimensionalen Polyeder entwickelt:

$$\bar{K}_m = h_m^n \bar{K}_n, \quad F = \lim \bar{K}_n, \quad \dim \bar{K}_n = r.$$

X^n bzw. X sei die Charakterengruppe mod 1 von $\mathfrak{B}(K_n)$ bzw.

²⁴⁾ ALEXANDROFF & HOPF, Topologie I, Kap. XIII, § 1, Nr. 7, Hilfssatz.

$\mathfrak{B}(F)$. $\mathfrak{B}(F)$ ist der G_n -adische Limes der Folge $\mathfrak{B}(K_m) \supset h_m^u \mathfrak{B}(K_n$. Nach einem der algebraischen Dualitätssätze (Vierter Dualitätssatz, „Entwicklungen“, Kap. II) ist X der G_n -ale Limes der Folge $X^m h_m^n \subset X^n$. Folglich gibt es für jedes χ aus X ein χ^n , so daß

$$\chi = \chi^n h_n, \chi^n \subset X^n, h_n \mathfrak{B}(F) \subset \mathfrak{B}(K_n).$$

Nach dem Lemma gibt es $f^n \bar{K}_n \subset S^n$ mit $\chi^n = \chi_{f^n}$. $f = f^n h_n$, $fF \subset S^r$ liefert die gewünschte Abbildung, weil $\chi_f = \chi_{f^n} h_n = \chi^n h_n = \chi$, ist, w.z.b.w.

Nach den Sätzen 2–3 entspricht jeder Abbildungsklasse von F in S^r *eindeutig und restlos* ein einzelnes Element der Charakterengruppe X von $\mathfrak{B}(F)$. Definiert man die Addition zweier Abbildungsklassen entsprechend der Addition in X , so entsteht die zu $\mathfrak{B}(F)$ duale Abbildungsklassengruppe von F ²⁵⁾.

Dieselben Betrachtungen führen auch im Falle der stetigen Abbildungen von F in die Kreislinie S^1 zu den analogen Resultaten. Der Ausgangspunkt ist wieder der Erweiterungssatz für die Abbildungen des Polyeders in S^1 ²⁶⁾, der sich viel leichter beweisen läßt, als der Hopfsche Erweiterungssatz. Es gelten die Sätze, die den Sätzen 1, 2, 3 entsprechen, und schließlich ist die Abbildungsklassengruppe von F in S^1 dual zur 1-dimensionalen Bettischen Gruppe von F .

(Eingegangen den 17. März 1939.)

²⁵⁾ H. FREUDENTHAL, Bettische Gruppe mod 1 und Hopfsche Gruppe [Compositio Math. 4 (1937), 235–238].

²⁶⁾ ALEXANDROFF & HOPF, Topologie I, Kap. XIII, Nr. 2, Satz III.