COMPOSITIO MATHEMATICA

K. KODAIRA

Die Kuratowskische Abbildung und der Hopfsche Erweiterungssatz

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 177-184
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__177_0>

Die Kuratowskische Abbildung und der Hopfsche Erweiterungssatz

von

K. Kodaira

Tokyo

§ 1. *Die Kuratowskische Abbildung.*

Es sei R ein metrischer Raum und N ein in einem Euklidischen Raum realisierter [1]) Nerv einer offenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von R. Dann bildet bekanntlich die Kuratowskische Abbildung [2]) den Raum R in das Polyeder $\overline{N}$ stetig ab. Eine wichtige Eigenschaft dieser Abbildung ist dabei die, daß der Bildpunkt eines Punktes p in R im Simplex $(a_{i_0} a_{i_1} \ldots a_{i_r})$ enthalten ist, wenn p den a_{i_ν} $(\nu=0, 1, \ldots, r)$ entsprechenden Elementen von $\mathfrak{U}$ und nur diesen angehört. Wir wollen nun den Begriff der Kuratowskischen Abbildung allgemeiner fassen und jede stetige Abbildung eines topologischen Raumes R in das Polyeder $\overline{N}$, wo N ein Nerv einer beliebigen (nicht notwendig offenen) Überdeckung von R ist, „Kuratowskische Abbildung" nennen, wenn sie die genannte Eigenschaft hat. Wir wollen nämlich definieren:

Definition: *Es seien R ein topologischer Raum, $\mathfrak{U}$ eine beliebige Überdeckung von R, N ein (in einem Euklidischen Raum realisierter [1]) Nerv von $\mathfrak{U}$. $\varkappa$ sei eine Abbildung von R in das Polyeder $\overline{N}$. Mit p, U, a, x seien bzw. allgemein ein Punkt von R, ein Element von $\mathfrak{U}$, ein Eckpunkt von N, ein Simplex von N bezeichnet. Ferner seien U^a das dem Eckpunkt a entsprechende Element von $\mathfrak{U}$, $\varkappa(p)$ der Bildpunkt von p in $\overline{N}$, $x(p)$ das Trägersimplex von $\varkappa(p)$. $a \prec x$ bedeute: a ist ein Eckpunkt von x. Die Abbildung $\varkappa$ heißt dann eine „Kuratowskische Abbildung von R in $\overline{N}$ bzgl. $\mathfrak{U}$," wenn sie 1. stetig ist und 2. folgende Eigenschaft besitzt:*

Aus $p \in U^a$ folgt $a \prec x(p)$.

---

[1]) Alle Komplexe, also insbesondere alle Nerven der Raumüberdeckungen, stellen wir in dieser Arbeit stets als in einem Euklidischen Raum realisiert vor. Späterhin werden wir das nicht jeweils erwähnen.

[2]) Siehe z.B. Alexandroff & Hopf, Topologie I, S. 366.

Dieser Begriff gestattet uns, eine beachtenswerte Eigenschaft des Projektionsspektrums der Kompakten auszudrücken, wie sie im folgenden Paragraphen formuliert und bewiesen wird. Als eine Anwendung davon beweisen wir in § 3 den Hopfschen Erweiterungssatz für den Fall des Kompaktums.

Bemerkung 1. Es seien F ein Kompaktum, $\mathfrak{U}$ eine *abgeschlossene* Überdeckung von F, N ein Nerv von $\mathfrak{U}$. Es ist dann leicht, eine Kuratowskische Abbildung von F in N bzgl. $\mathfrak{U}$ zu konstruieren. Denn eine offene Überdeckung $\mathfrak{V}$ von F, deren einzelnes Element V je ein Element U von $\mathfrak{U}$ umfaßt, und sonst genügend klein ist, besitzt offenbar denselben Komplex N als Nerv, und die Kuratowskische Abbildung von F in $\overline{N}$ bzgl. $\mathfrak{V}$ im gewöhnlichen Sinne hat ersichtlich die geforderten Eigenschaften bzgl. $\mathfrak{U}$.

2. Ist dabei F' ein Teilkompaktum von F, so bildet die Menge der nicht leeren Durchschnitte $U \cdot F'$ eine abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{U}'$ von F'. $\mathfrak{U}'$ hat einen Teilkomplex N' von N als einen Nerv, und die oben konstruierte Kuratowskische Abbildung von F in $\overline{N}$ bzgl. $\mathfrak{U}$ bildet F' in $\overline{N}'$ stetig ab und hat unsere Eigenschaft bzgl. $\mathfrak{U}'$. Sie bildet also zugleich eine Kuratowskische Abbildung von F' in $\overline{N}'$ bzgl. $\mathfrak{U}'$.

Von diesen Bemerkungen werden wir später Gebrauch zu machen haben.

§ 2. *Eine Eigenschaft des Projektionsspektrums.*

Satz 1. *Es seien F ein Kompaktum,*

$$(K_1, K_2, \ldots, K_m, \ldots), \quad K_m = \pi_m^{m+1}(K_{m+1})$$

ein Projektionsspektrum von F und

$$\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \ldots, \mathfrak{U}_m, \ldots$$

die entsprechende Folge von Unterteilungen von F.[3] *K_m ist also der Nerv der abgeschlossenen Überdeckung $\mathfrak{U}_m$ von F. $\varkappa_m$ sei eine Kuratowskische Abbildung von F in $\overline{K}_m$ bzgl. $\mathfrak{U}_m$. Sei ferner*

$$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots), \quad z_m \subset K_m$$

ein Projektionszyklus von F.[4] *Dann gilt die Homologierelation:*

$$\varkappa_m(Z) \simeq z_m \text{ in } \overline{K}_m. \tag{1}$$

[3]) Vgl. Alexandroff, Gestalt und Lage der abgeschlossenen Mengen [Annals of Math. (2) **30** (1928), 101—187].

[4]) Eine Folge $Z = (z_1, z_2, \ldots)$ von Zyklen z_m aus K_m heißt Projektionszyklus, wenn $z_m \sim \pi_m^{m+1}(z_{m+1})$ in K_m ist. Vgl. Alexandroff, Homologietheorie der Kompakten [Compositio Math. **4** (1937), 256—270)].

Erklärung: Zunächst erklären wir genauer, was mit (1) gemeint ist.

Die Elemente von $\mathfrak{U}_m$ bezeichnen wir allgemein mit U_m. U_m^a sei das Element, das dem Eckpunkt a von K_m entspricht.

1. Den Projektionszyklus Z kann man sich als „*in F realisiert*" denken, und zwar als einen konvergenten Zyklus. Wählt man nämlich je einen Punkt $r_m(a)$ aus U_m^a auf irgend eine Weise und erklärt eine Menge von $r_m(a)$ als Gerüst, wenn die entsprechende Menge von a es bildet, so erhält man einen Komplex $r_m(K_m)$ in F, der vielleicht nicht isomorph zu K_m, doch jedenfalls ein simpliziales Bild von K_m ist. Die Folge $r(Z) = (r_1(z_1), r_2(z_2), \ldots, r_m(z_m), \ldots)$ bildet offenbar einen konvergenten Zyklus. Zur Einführung der Bettischen Gruppe von F kann man den Projektionszyklus oder den konvergenten Zyklus mit gleichem Recht zugrundelegen. Man erhält beide Male isomorphe Gruppen: die Abbildung $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots)$ bildet die erste Gruppe auf die zweite isomorph ab.

Das Z in (1) ist also als konvergenter Zyklus $r(Z)$ in F aufzufassen.

2. Es seien F, F' zwei Kompakten, f eine stetige Abbildung von F in F', $\zeta = (\zeta_m)$ ein konvergenter Zyklus von F. Dann ist $f(\zeta) = (f(\zeta_m))$ ebenfalls ein konvergenter Zyklus von F', und die Abbildung $\zeta \to f(\zeta)$ induziert einen Homomorphismus h_f der Bettischen Gruppe von F in die von F'.

In unserm Fall bildet $\varkappa_m$ (dessen Existenz schon oben bemerkt worden ist) F in $F' = \overline{K}_m$ stetig ab, induziert also eine homomorphe Abbildung $h_{\varkappa_m}$ der Bettischen Gruppe von F in die von $\overline{K}_m$. Die Homologieklasse von $\zeta = r(Z)$ in F wird dadurch auf die Klasse $h_{\varkappa_m}(\zeta)$ von $\varkappa_m(\zeta)$ in $\overline{K}_m$ abgebildet. Die linke Seite $\varkappa_m(Z)$ von (1) bedeutet diese Klasse.

Der Sinn von (1) ist damit vollständig geklärt. Genauer geschrieben, heißt das nämlich:

$$(1') \qquad h_{\varkappa_m}(r(Z)) \sim z_m \text{ in } \overline{K}_m.$$

3. K sei irgendein Komplex, (z_m) ein konvergenter Zyklus von Polyeder $\overline{K}$, φ die kanonische Verschiebung von $\overline{K}$ in bezug auf K. In der Folge $(\varphi(z_m))$ sind dann $\varphi(z_l)$ für hinreichend großes l alle zueinander homolog, und die Homologieklasse von (z_m) ist eben die Homologieklasse dieser $\varphi(z_l)$ in K.

Wenden wir diese Überlegung auf unser $\overline{K}_m$ an. Bezeichnen wir mit φ_m die kanonische Verschiebung von $\overline{K}_m$ in bezug auf K_m, so ist die Homologieklasse $h_{\varkappa_m}(r(Z))$ in (1′) durch $\varphi_m \varkappa_m r_l(z_l)$

für hinreichend großes l repräsentiert. (1) läuft also auf folgendes hinaus:

(1'') $$\varphi_m \varkappa_m r_l(z_l) \sim z_m \text{ in } K_m \text{ für } l \geqq l_0(m).$$

Beweis. Wir betrachten ein festes m und schreiben der Kürze halber K, $\mathfrak{U}$, $\varkappa$, φ, z statt K_m, $\mathfrak{U}_m$, $\varkappa_m$, φ_m, z_m. Die Bezeichnungen p, U, a, x, U^a, $x(p)$ benutzen wir in demselben Sinne wie in der Definition in § 1. Ferner sei mit B_a der baryzentrische Stern um a bezeichnet.

Nun sei $\varepsilon = \varepsilon(K)$ eine so kleine positive Zahl [5]), daß aus $\varrho(\bar{x}, B_a) < \varepsilon$ folgt $a \prec x$, oder, was dasselbe bedeutet, daß aus $\varrho(\bar{x}, p) < \varepsilon$ $(p \in \overline{K})$ folgt $\varphi(p) \prec x$. l_0 sei sodann so groß gewählt, daß 1. $l_0 \geqq m$ ist, und 2. für alle $l \geqq l_0$ die Durchmesser der $\varkappa$-Bilder der Elemente von $\mathfrak{U}_l < \varepsilon$ werden. Dann behaupten wir, daß für $l \geqq l_0$ die Relation (1'') stattfindet.

Bezeichnen wir die Eckpunkte von K_l allgemein mit b. U_l^b sei das b entsprechende Element von $\mathfrak{U}_l$. Es ist nach unserer Verabredung $\delta(\varkappa(U_l^b)) < \varepsilon$. $\pi = \pi_m^l$ sei die Projektion von K_l in $K = K_m$. Sie bildet K_l in K simplizial ab. $\pi(b) = a$ ist ein Eckpunkt von K.

Wir zeigen zunächst: Aus $p \in U_l^b$ folgt $\varphi\varkappa r_l(b) \prec x(p)$ und $a = \pi(b) \prec x(p)$. In der Tat liegen p und $r_l(b)$ beide in U_l^b, also gilt $\varrho(\varkappa(p), \varkappa(r_l(b))) < \varepsilon$, mithin $\varrho(\bar{x}(p), \varkappa(r_l(b))) < \varepsilon$, woraus die erste Behauptung folgt. Die zweite Behauptung ist eine unmittelbare Folge aus der Definition der Kuratowskischen Abbildung, denn aus $p \in U_l^b$ folgt ja a fortiori $p \in U^a = U_m^{\pi(b)}$.

Konstruieren wir nun das Prisma [5]) $\Pi = \Pi_\pi(K_l)$ über K_l bzgl. π. Ein Simplex von Π ist von der Gestalt: $(\pi(b_0), \pi(b_1), \ldots, \pi(b_h), b_h, \ldots, b_n)$, wobei $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ ein Simplex von K_l ist. Mit der durch $\psi\pi(b_i) = \pi(b_i)$, $\psi(b_j) = \varphi\varkappa r_l(b_j)$ definierten Eckpunktzuordnung ψ wird nach dem oben Gezeigten eine simpliziale Abbildung von Π in K geliefert, denn $U_l^{b_i}$, $U_l^{b_j}$ enthalten ja alle einen gemeinsamen Punkt p. Auf der „Basis" K_l von Π wirkt ψ wie $\varphi\varkappa r_l$, und auf der anderen „Basis" $\pi(K_l)$ wie eine identische Abbildung. Nun gilt bekanntlich [6])

$$\pi(z_l) \sim z_l \text{ in } \Pi.$$

Nach Anwendung von ψ auf der beiden Seite dieser Formel bekommt man (1''), weil $\psi\pi(z_l) = \pi(z_l) \sim z_m$, $\psi(z_l) = \varphi\varkappa r_l(z_l)$, und $\psi(\Pi) = K$.

---

[5]) Vgl. ALEXANDROFF & HOPF, Topologie I, S. 350, Fußnote 2.

[6]) Vgl. ALEXANDROFF & HOPF, Topologie I, S. 198.

§ 3. *Der Hopfsche Erweiterungssatz.*

SATZ 2. *Es seien $F = F^{n+1}$ ein $(n+1)$-dimensionales Kompaktum, F' ein Teilkompaktum von F, $\mathfrak{R}$ die additive Gruppe der reellen Zahlen mod 1, f eine stetige Abbildung von F' in die n-dimensionale Sphäre S^n. f läßt sich dann zu einer stetigen Abbildung von F in S^n erweitern, wenn es folgender Bedingung genügt:*

(2) *Aus $Z^n \subset F'$, $Z^n \sim 0$ in F folgt $f(Z^n) \sim 0$ in S^n.*

Dabei ist Z^n ein n-dimensionaler Zyklus; der Koeffizientenbereich soll $\mathfrak{R}$ sein.

Für den Fall, wo F ein Polyeder ist, ist der Satz bekannt. [7]) Hier beweisen wir ihn allgemein unter wesentlichem Gebrauch des Satzes 1.

Es seien (K_m^{n+1}) ein Projektionsspektrum von F^{n+1}, $\mathfrak{U}_m$ die K_m^{n+1} entsprechende abgeschlossene Überdeckung von F. Die Menge $\mathfrak{U}'_m$ von $U_m \cdot F'$ $(\neq 0)$ bildet dann eine Überdeckung von F' und hat einen Teilkomplex K'_m von K_m^{n+1} als einen Nerv. Wie am Ende von § 1 bemerkt wurde, kann man sodann eine Kuratowskische Abbildung von F in $\overline{K}_m^{n+1}$ bzgl. $\mathfrak{U}_m$ derart bilden, daß sie zugleich eine Kuratowskische Abbildung von F' in $\overline{K}'_m$ bzgl. $\mathfrak{U}'_m$ wird. Ferner realisieren [8]) wir K_m^{n+1} in F so, daß das Bild $r_m(K'_m)$ von K'_m in F' liegt (was ja möglich ist). Dann bildet die Abbildung fr_m die Eckpunkte von K'_m auf Punkte der Sphäre S^n ab. Denkt man sich S^n als die Einheitssphäre im $(n+1)$-dimensionalen Euklidischen Raum R^{n+1}, so erhält man durch lineare Interpolation ein stückweise lineares Bild von $\overline{K}'_m$ in R^{n+1}, das wir einfach mit $fr_m(\overline{K}'_m)$ bezeichnen wollen. Wählt man m groß, so nähert sich dieses Bild dem Bild von F' in S^n, enthält also sicher nicht den Mittelpunkt o von S^n. Projizieren wir also die Punkte von $fr_m(\overline{K}'_m)$ von o aus auf die Sphäre S^n (wir bezeichnen diese Projektion mit P), so erhalten wir ein stetiges Bild $Pfr_m(\overline{K}'_m)$ von $\overline{K}'_m$ in S_n.

Hilfssatz 1. *$\varepsilon > 0$ sei beliebig gegeben. Für hinreichend großes m gilt*

$$\varrho(f(p),\ Pfr_m\varkappa_m(p)) < \varepsilon \text{ für } p \in F'.$$

Die Abbildung $Pfr_m\varkappa_m$ ist also homotop zu f.

Beweis. m sei so groß gewählt, daß 1. der Durchmesser des

---

[7]) ALEXANDROFF & HOPF, Topologie I, S. 500.

Vgl. auch H. FREUDENTHAL, Bettische Gruppe mod 1 und Hopfsche Gruppe [Compositio Math. 4 (1937), 235—238].

[8]) Vgl. § 2, Satz 1, Erklärung 1.

f-Bildes eines jeden Elementes U_m von $\mathfrak{U}_m < \frac{\varepsilon}{3}$, also insb.

$$\varrho(f(p), fr_m(a)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{wenn } p \in U_m^a$$

wird, 2. der Durchmesser des fr_m-Bildes jedes Simplexes von $\overline{K}'_m < \frac{\varepsilon}{3}$, also insb.

$$\varrho(fr_m(a), fr_m\varkappa_m(p)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird und 3. durch die Projektion P jeder Punkt von $fr_m(\overline{K}'_m)$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ verschoben wird, also insb.

$$\varrho(fr_m\varkappa_m(p), Pfr_m\varkappa_m(p)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

wird. Für ein solches m gilt offenbar die behauptete Ungleichung.

Hilfssatz 2. *Es seien F ein Kompaktum, F' ein Teilkompaktum von F, g eine stetige Abbildung von F in S^n, und f eine ebensolche Abbildung von F' in S^n. Wenn für jeden $p \in F'$ gilt*

$$\varrho(g(p), f(p)) < 1 \ (= \textit{Radius von } S^n),$$

so läßt sich f zu einer stetigen Abbildung von F in S^n erweitern.

Insb. ist also jede Abbildung „erweiterbar", wenn sie zu einer „erweiterbaren" Abbildung homotop ist.

Beweis. Es sei $E = E^{n+1}$ die Einheitskugel um o in R^{n+1}. (S^n bildet also den Rand von E.) Die Abbildung f von F' in S^n läßt sich offenbar zu einer stetigen Abbildung f^{I} von F in E erweitern [9]). Da für $p \in F'$

$$\varrho(g(p), f^{\mathrm{I}}(p)) < 1$$

ist, gilt diese Ungleichung auch für p mit $\varrho(p, F') \leqq \eta$, wenn $\eta > 0$ hinreichend klein ist. Ein solches η sei fest gewählt. Dann definieren wir eine stetige Funktion $\varrho(p)$ von $p \in F$ durch die Festsetzung:

$$\varrho(p) = \begin{cases} \varrho(p, F') \\ \eta \end{cases} \quad \text{für} \quad \varrho(p, F') \begin{matrix} \leqq \eta, \\ > \eta. \end{matrix}$$

Nun sei $f^{\mathrm{II}}(p)$ der Punkt auf der Strecke $\overline{g(p)f^{\mathrm{I}}(p)}$, so daß

$$\varrho(g(p), f^{\mathrm{II}}(p)) : \varrho(f^{\mathrm{II}}(p), f^{\mathrm{I}}(p)) = \eta - \varrho(p) : \varrho(p).$$

$f^{\mathrm{II}}(p)$ ist also eine Punkt in E, hängt stetig von p ab, stimmt mit $f^{\mathrm{I}}(p) = f(p)$ überein, wenn $p \in F'$, und fällt mit $g(p)$ zusammen, wenn $\varrho(p, F') > \eta$ ist. Ferner ist überall

$$\varrho(f^{\mathrm{II}}(p), g(p)) < 1,$$

denn für $\varrho(p, F') > \eta$ ist die linke Seite Null und für $\varrho(p, F') \leqq \eta$ gilt sogar $\varrho(f^{\mathrm{I}}(p), g(p)) < 1$. Da $g(F) \subset S^n$, folgt hieraus

[9]) Vgl. ALEXANDROFF & HOPF, Topologie I, S. 73.

$f^{\text{II}}(F) \subset E - o$. Die Abbildung Pf^{II} bildet dann ersichtlich die gewünschte Erweiterung von f.

Durch diese zwei (von § 2 unabhängigen) Hilfssätze reduziert sich unsere Erweiterungsaufgabe auf die für die Abbildung $Pfr_m\varkappa_m$ im Hilfssatz 1. Diese soll nun mit Zuhilfenahme des Satzes 1 durch folgenden, letzten Hilfssatz erledigt werden.

Hilfssatz 3. *Für genügend großes m läßt sich die Abbildung* Pfr_m *von* $\overline{K}'_m$ *in* S^n *zu einer stetigen Abbildung von* $\overline{K}^{n+1}_m$ *in* S^n *erweitern.* (*Man setzt dabei natürlich voraus, daß die Bedingung* (2) *für f erfüllt ist.*)

Beweis. Nehmen wir einmal an, daß unser Hilfssatz falsch sei! Nach dem bekannten Erweiterungssatz für die Polyeder muß es dann unendlich viele m geben, so daß für $\overline{K}^{n+1}_m$ die Bedingung (2) *nicht* erfüllt ist. Für diese m existieren also die n-dimensionalen Zyklen z^n_m bzgl. $\mathfrak{R}$, so daß

$$z^n_m \in K'_m, \quad z^n_m \sim 0 \text{ in } K^{n+1}_m$$

und

$$Pfr_m(z^n_m) \nsim 0 \text{ in } S^n.$$

Da die Zyklen in K'_m, die ~ 0 in K^{n+1}_m sind, eine Gruppe bilden, kann man durch eine passende Wahl von einem solchen z^n_m noch erreichen:

$$Pfr_m(z^n_m) \sim \lambda_m S^n \text{ in } S^n, \quad \frac{1}{4} \leqq \lambda_m \leqq \frac{3}{4},$$

worin S^n (in etwas übertragenem Sinne) den Grundzyklus der Sphäre S^n bedeuten soll.

Wählen wir nun eine Teilfolge $z^n_{m_j}(j = 1, 2, 3, \ldots)$ von z^n_m, so daß die Folge $\pi^{m_j}_m\ (z^n_{m_j})$ für alle m konvergiert. (Dies ist möglich, weil der Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}$ kompakt ist.) Setzt man

$$\hat{z}^n_m = \lim_{j \to \infty} \pi^{m_j}_m\ (z^n_{m_j}),$$

so gilt

$$\hat{z}^n_m \in K'_m, \quad \hat{z}^n_m \sim 0 \text{ in } \overline{K}^{n+1}_m, \quad \pi^{m+1}_m(\hat{z}^n_{m+1}) = \hat{z}^n_m.$$

Also ist

$$Z^n = (\hat{z}^n_m)$$

ein Projektionszyklus von F', der ~ 0 in F ist. Nach unserer Voraussetzung gilt daher

$$f(Z^n) \sim 0 \text{ in } S^n,$$

mithin

$$Pfr_m\varkappa_m(Z^n) \sim 0 \text{ in } S^n,$$

weil f und $Pfr_m\varkappa_m$ zueinander homotop sind.

Nach dem Satz 1 ist aber $\varkappa_m(Z^n) \sim \hat{z}^n_m$ in $\overline{K}^{n+1}_m$, also

$$Pfr_m(\hat{z}^n_m) \sim 0 \text{ in } S^n.$$

Andererseits gilt für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$

$$r_{m_j}(z^n_{m_j}) \underset{\varepsilon}{\sim} r_m \pi^{m_j}_m(z^n_{m_j}) \text{ in } F',$$

wenn m genügend groß gewählt ist. Indem man dieses ε hinreichend klein nimmt, bekommt man

$$fr_{m_j}(z^n_{m_j}) \sim fr_m \pi^{m_j}_m(z^n_{m_j}) \text{ in } R^{n+1} - o,$$

also weiter

$$P\,f\,r_{m_j}(z^n_{m_j}) \sim P\,f\,r_m\,\pi^{m_j}_m(z^n_{m_j}) \text{ in } S^n,$$

oder

$$\lambda_{m_j} S^n \sim P\,f\,r_m\,\pi^{m_j}_m\,(z^n_{m_j}) \text{ in } S^n.$$

Läßt man hier $j \to \infty$ rücken, so erhält man

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_{m_j} S^n \sim P\,f\,r_m(\hat{z}^n_m) \sim 0 \text{ in } S^n,$$

also

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_{m_j} \equiv 0 \pmod 1$$

was unserer Konstruktion von λ_{m_j} widerspricht [10]). Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Beweis des Satzes 2 ist jetzt ganz klar. Es sei g die Erweiterung der Abbildung $P\,f\,r_m$, wie sie nach dem Hilfssatz 3 existiert. Nach dem Hilfssatz 1 ist nun für genügend großes m

$$\varrho(g\varkappa_m(p), f(p)) < 1, \text{ wenn } p \in F'.$$

Nach dem Hilfssatz 2 läßt sich also f zu einer stetigen Abbildung von F in S^n erweitern.

(Eingegangen den 17. Oktober 1938.)

---

[10]) Denn wir konstruierten λ_{m_j} so, daß $\frac{1}{4} \leqq \lambda_{m_j} \leqq \frac{3}{4}$ gilt.