

COMPOSITIO MATHEMATICA

PHILIPP BOCK

Einige Integrale aus der Theorie der hypergeometrischen und verwandter Funktionen

Compositio Mathematica, tome 7 (1940), p. 123-134

http://www.numdam.org/item?id=CM_1940__7__123_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Einige Integrale aus der Theorie der hypergeometrischen und verwandter Funktionen

von

Philipp Bock

Brünn

Vor einiger Zeit hat Herr Artur Erdélyi in einer Abhandlung „Infinite integrals involving Whittaker's functions“¹⁾ einige Integrale berechnet, in deren Integranden Produkte von Whittakerschen Funktionen bzw. Produkte solcher Funktionen mit den Funktionen des parabolischen Zylinders, mit Besselschen Funktionen und Laguerreschen Polynomen auftreten. Einige weitere, in der Analysis oder in den Anwendungen häufig vorkommende Funktionen sind ebenfalls Sonderfälle der Whittakerschen Funktionen. Man kann daher durch Spezialisierung der Parameter in den Formeln von A. Erdélyi gewisse Integrale mit solchen Funktionen berechnen.

In folgenden Zeilen werden insbesondere Integrale angegeben, welche in ihren Integranden außer den Whittakerschen Funktionen, Besselschen Funktionen, Funktionen des parabolischen Zylinders und Laguerreschen Polynomen auch die Fehlerfunktion, die unvollständige Gammafunktion, die Batemansche Funktion k_n und die Charlierschen Polynome enthalten.

Wir wollen uns zunächst mit Integralen beschäftigen, in deren Integranden die Fehlerfunktion als Faktor auftritt. Bekanntlich läßt sich die Fehlerfunktion $\operatorname{Erfc}(x)$ in der Form

$$(1) \quad \operatorname{Erfc}(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(x^2)$$

schreiben. Setzt man in Formel I (3,1) der eingangs zitierten Arbeit für $l = -\frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{4}$, $q = 1$ und für die Whittakersche Funktion den Ausdruck (1), so erhält man

¹⁾ Journal Indian Math. Soc. (New series) 3 (1939), Nr. 5. Diese Arbeit wird im Folgenden mit I angeführt.

$$\int_0^{\infty} x^{2m} \cdot e^{-\frac{1}{2}(p-2)x^2} M_{k,m}(px^2) \operatorname{Erfc}(x) dx =$$

$$(2) \quad \frac{\Gamma(2m+1)\Gamma\left(2m+\frac{3}{2}\right)\Gamma(k-m)}{4\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}+k+m\right)} p^{m+\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+k+m, \frac{3}{2}+2m; \frac{3}{2}+k+m; 1-p\right)$$

Wenn man auf der rechten Seite die Verdopplungsformel der Gammafunktion ²⁾

$$(3) \quad \Gamma(x) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) = \Gamma(2x)\sqrt{\pi} \cdot 2^{-2x+1}$$

anwendet und weiters berücksichtigt, daß

$$(4) \quad {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} \cdot (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \cdot (1-zt)^{-\beta} dt^3$$

ist, so läßt sich (2) auch so schreiben:

$$(2) \quad \int_0^{\infty} x^{2m} \cdot e^{-\frac{1}{2}(p-2)x^2} \cdot M_{k,m}(px^2) \cdot \operatorname{Erfc}(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(4m+2)\Gamma(k-m)}{2^{4m+3}} p^{m+\frac{1}{2}} \int_0^1 t^{k+m-\frac{1}{2}} [1-(1-p)t]^{-\frac{3}{2}-2m} \cdot dt,$$

gültig für $|\arg p| < \frac{\pi}{2}$, $\Re(k) > \Re(m) > -\frac{1}{2}$, $\Re(k+m) > -\frac{1}{2}$.

Aus dieser Formel erhält man leicht einige Sonderfälle. Wir wählen zunächst

$$k = 0 \text{ und } p = 1$$

und erhalten wegen

$$(5) \quad M_{0,m}(x^2) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} x I_m\left(\frac{1}{2}x^2\right)^4$$

die Gleichung

$$(6) \quad \int_0^{\infty} x^{2m+1} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot I_m\left(\frac{1}{2}x^2\right) \cdot \operatorname{Erfc}(x) dx = \frac{\Gamma\left(2m+\frac{3}{2}\right)\Gamma(-m)}{4\pi \cdot \left(m+\frac{1}{2}\right)},$$

gültig für

²⁾ E. T. WHITTAKER & G. N. WATSON, Modern Analysis [Cambridge 1937], § 12, 14.

³⁾ A. ERDÉLYI, Der Zusammenhang zwischen verschiedenen Integraldarstellungen hypergeometrischer Funktionen [Quarterly Journ. Math. (Oxford) 8 (1937), 200—213].

⁴⁾ siehe I (4,1) und (6,1).

$$0 > \Re(m) > -\frac{1}{2}.$$

Einen weiteren Sonderfall bekommen wir, wenn

$$k = \frac{1}{2} + m + r$$

ist und die Beziehung

$$(7) \quad M_{\frac{1}{2}+m+r, m}(x) = \frac{r! \Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+r+1)} x^{m+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot L_r^{(2m)}(x) \quad 5)$$

verwendet wird. Gleichung (2) geht dann über in

$$(2') \quad \int_0^\infty y^{4m+1} \cdot e^{-(p-1)y^2} \cdot L_r^{(2m)}(py^2) \cdot \operatorname{Erfc}(y) dy = \frac{\Gamma\left(2m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)}{4\sqrt{\pi} r! (2m+r+1)} \int_0^1 t^{2m+r} [1 - (1-p)t]^{-\frac{3}{2}-2m} dt,$$

gültig für $\Re(m) > -\frac{1}{2}$, $|p-1| < |1|$.

Schließlich erhält man noch aus dieser Gleichung, wenn

$$p = 1, \quad r = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = 2m$$

gesetzt wird,

$$(2'') \quad \int_0^\infty y^{2\alpha+1} \cdot \operatorname{Erfc}(y) dy = \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)}{4(\alpha+1)}.$$

Wir wenden uns der Gleichung I (3,2) zu und erhalten, wenn wir die Beziehung (2) benutzen, das Integral

$$(7) \quad \int_0^\infty x^{2m-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}(p-2)x^2} \cdot M_{k, m}(px^2) \cdot \operatorname{Erfc}(x) dx = \frac{\Gamma(4m+1) \Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma(1+k+m) \cdot 2^{4m+2}} p^{m+\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+k+m, \frac{1}{2}+2m; 1+k+m; 1-p\right)$$

gültig für $|p-1| < 1$, $\Re(m) > -\frac{1}{4}$, $\Re(m-k) < \frac{1}{2}$.

Aus dieser Gleichung ergibt sich, wenn man

$$k = 0 \quad \text{und} \quad p = 1$$

setzt und auf der rechten Seite der Gleichung den Ergänzungssatz der Gammafunktion heranzieht ²⁾, folgende Formel:

$$(7') \quad \int_0^\infty x^{2m} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot I_m\left(\frac{1}{2}x^2\right) \cdot \operatorname{Erfc}(x) dx = \frac{\Gamma\left(2m + \frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi}}{4 \cdot \Gamma(1+m) \cdot \cos m\pi},$$

gültig für $-\frac{1}{4} < \Re(m) < \frac{1}{2}$.

⁵⁾ C. V. L. CHARLIER [Arkiv för Mat. Astrom. o. Fysik 2 (1905/06), Nr. 20].

Dieselbe Ersetzung der Whittakerschen Funktion durch die Fehlerfunktion führt in Formel I (4,3), wenn man noch $q = k^2$ setzt, zu folgender Gleichung:

$$(8) \quad \int_0^{\infty} x^{2m+1} \cdot e^{-(1-k^2)x^2} \cdot I_m(x^2) \cdot \operatorname{Erfc}(kx) dx = \\ \frac{\Gamma\left(2m + \frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma(-m)}{\pi\left(m + \frac{1}{2}\right)} 2^{m-2} \cdot k^{-4m-2} {}_2F_1\left(m + \frac{1}{2}, 2m + \frac{3}{2}; m + \frac{3}{2}, 1 - \frac{2}{k^2}\right),$$

gültig $\Re(k^2) > 1$ und $-\frac{1}{2} < \Re(m) < 0$.

Ebenso erhält man aus Gleichung I (5,2):

$$(9) \quad \int_0^{\infty} y \cdot e^{-\frac{1}{4}(1-2q)y^2} \cdot [D_{\mu}(y) - D_{\mu}(-y)] \cdot \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{1}{2}q} \cdot y\right) dy = \\ \frac{2^{\frac{1}{2}\mu} \cdot q^{-\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\mu\right) \cdot \sqrt{\pi}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}\mu + 1, 2; \frac{1}{2}\mu + 2; 1 - \frac{1}{q}\right)$$

gültig für $\Re(q) > \frac{1}{2}$ und $\Re(\mu) > 0$.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit den Darstellungen, welche sich aus I (6,2) und I(6,3) ergeben.

I(6,2) geht über in

$$(10) \quad \int_0^{\infty} y^{2\alpha+1} \cdot e^{-(p-1)y^2} \cdot L_r^{(\alpha)}(py^2) \cdot \operatorname{Erfc}(y) dy = \\ \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)}{4r!(\alpha+r+1)} {}_2F_1\left(\alpha+r+1, \alpha + \frac{3}{2}; \alpha+r+2; 1-p\right),$$

gültig für

$$|1-p| < 1, \quad \Re(\alpha) > -\frac{3}{2}.$$

Setzt man $p = 1$ und bedenkt, daß

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma, 0) = 1^3)$$

ist, so ergibt sich der Sonderfall

$$(10') \quad \int_0^{\infty} y^{2\alpha+1} \cdot L_r^{(\alpha)}(y^2) \cdot \operatorname{Erfc}(y) dy = \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)}{4r!(\alpha+r+1)},$$

gültig für $\Re(\alpha) > -\frac{3}{2}$.

Aus I(6,3) erhält man, für

$$l = -\frac{1}{4}, \quad n = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad r = 0$$

$$(11) \quad \int_0^\infty y^{2\alpha+1} \cdot e^{y^2} \cdot \operatorname{Erfc}(y) dy = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\alpha+1)}{4 \cos \pi(\alpha+1)},$$

gültig für $-\frac{1}{2} > \Re(\alpha) > -1$.

In diesem Abschnitt wollen wir Integrale mit dem sog. Exponentialintegral betrachten.

Es ist

$$(12) \quad Ei(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot W_{-\frac{1}{2},0}(x)$$

Dieser Wert führen wir zunächst in I (3,2) ein und erhalten

$$(13) \quad \int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(p-2q)x} \cdot M_{k,m}(px) \cdot Ei(qx) dx = \\ = \frac{\Gamma(2m+1)^2 \cdot \Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+m+\frac{3}{2}\right)} p^{m+\frac{1}{2}} \cdot q^{-2m-1} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+k+m, 1+2m; \frac{3}{2}+k+m; 1-\frac{p}{q}\right),$$

gültig für

$$|\arg p| < \frac{\pi}{2}, \quad |\arg q| < \frac{3}{2}\pi, \quad |p-q| < |q|, \quad \Re(m) > -\frac{1}{2}, \quad R\left(m-k-\frac{1}{2}\right) < 0.$$

1. Sonderfall

$$p = q = 1$$

$$(13') \quad \int_0^\infty x^{m-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot M_{k,m}(x) \cdot Ei(x) dx = \frac{\Gamma(2m+1)^2 \cdot \Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+m+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\Re(m) > -\frac{1}{2}, \quad \Re\left(m-k-\frac{1}{2}\right) < 0.$$

2. Sonderfall.

Wir setzen in dem vorstehenden Integral (13')

$$n = k \quad \text{und} \quad m = \frac{1}{2}$$

und können dadurch die M -Funktion durch die Batemannsche Funktion ausdrücken. Es ist

$$M_{n,\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n-1} \cdot k_{2n}(x)^4.$$

Wir erhalten daher,

$$(13'') \quad \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}x} \cdot k_{2n}(x) \cdot Ei(x) dx = \frac{(-1)^{-n+1} \cdot \pi}{4n(n+1)}, \quad n \text{ ganz positiv.}$$

Ein weiterer Sonderfall ergibt sich sofort, wenn man

$$M_{0m}(x) = \sqrt{\pi x} \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} I_m\left(\frac{x}{2}\right)^4$$

schreibt, nämlich:

$$(13'') \quad \int_0^\infty x^m \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot I_m\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot Ei(x) dx = \frac{\Gamma(2m+1) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \left(m+\frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{1}{2} > \Re(m) > -\frac{1}{2}.$$

Die Ersetzung des Exponentialintegrals in I(4,3) ergibt

$$(14) \quad \int_0^\infty x^m \cdot e^{-(1-q)x} \cdot I_m(x) \cdot Ei(qx) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(2m+1) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\sqrt{\pi} \cdot q^{2m+1}} 2^m \int_0^1 t^{m-\frac{1}{2}} \left[1 - \left(1 - \frac{2}{q}\right)t\right]^{-2m-1} \cdot dt,$$

gültig für

$$\Re(q) > 1, \quad \frac{1}{2} > \Re(m) > -\frac{1}{2}.$$

Ebenso liefert I(5,2) die Beziehung

$$(15) \quad \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}(1-2q)v^2} \cdot y \cdot [D_{2\nu}(y) - D_{2\nu}(-y)] \cdot Ei\left(\frac{1}{2}qy^2\right) dy =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{(\nu+1)\sqrt{q^3}} 2^{\nu+1} \cdot \sin \nu\pi \cdot {}_2F_1\left(\nu+1, \frac{3}{2}; \nu+2, 1-\frac{1}{q}\right)$$

gültig für $\Re(q) > \frac{1}{2}$; $\Re(\nu) > -\frac{5}{4}$.

Zum Schluß dieses Abschnittes noch die Formel I(6,2):

$$(16) \quad \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{-(p-1)x} \cdot L_r^{(\alpha)}(px) \cdot Ei(x) dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\alpha+r+1)} {}_2F_1(\alpha+r+1, \alpha+1; \alpha+r+2; 1-p),$$

gültig für

$$|1-p| < 1, \quad \Re(\alpha) > -1,$$

und die Formel I(6,3). Hier setzen wir außer

$$l = -\frac{1}{2}, \quad n = 0 \quad \text{auch} \quad r = 0$$

und erhalten

$$(17) \quad \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^x \cdot Ei(x) dx = \frac{\pi \cdot \Gamma(\alpha+1)}{-\sin \pi \alpha}$$

für

$$0 > \Re(\alpha) > -1.$$

In den folgenden Zeilen wollen wir Integrale betrachten, in deren Integranden die unvollständige Gammafunktion auftritt, die sich ebenfalls durch die Whittakersche Funktion darstellen läßt. Es ist

$$(18) \quad Q(n, x) = x^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot W_{\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}}(x).$$

Wir setzen daher überall für

$$l = \frac{n-1}{2} \text{ und } n = \frac{n}{2}.$$

Wir wählen als 1. Formel dieses Abschnittes I (3,2) und finden

$$(19) \quad \int_0^\infty x^{m-n-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(p-2q)x} \cdot M_{k,m}(px) \cdot Q(n, qx) dx = \\ = q^{-2m+n-1} \cdot p^{m+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(2m+1) \cdot \Gamma(2m-n+1) \cdot \Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k+m-n\right)} \\ \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+k+m, 1+2m-n; \frac{3}{2}+k+m-n; 1-\frac{p}{q}\right),$$

gültig für

$$|p-q| < q, \Re(m) > -\frac{1}{2}, \Re\left(m-\frac{n}{2}\right) > -\frac{1}{2}, \Re\left(m-k-\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ } ^6).$$

Weiters betrachten wir I(4,3) und erhalten

⁶⁾ Setzt man in (19)

$$q = 1, n = 1$$

und bedenkt ferner, daß

$$Q(1, x) = e^{-x} \text{ und } {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha; z) = (1-z)^{-\beta}$$

ist, so erhält man

$$\int_0^\infty x^{m-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}px} \cdot M_{k,m}(px) dx = \frac{\Gamma(2m+1) \cdot \Gamma(2m) \cdot \Gamma\left(k-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+k+m\right)} p^{-2m+n+\frac{1}{2}}$$

$$|p| < 2, \Re(m) > 0, \Re\left(m-k-\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x^m \cdot e^{-(1-q)x} \cdot I_m(x) \cdot Q(n, qx) dx = \\
 (20) \quad &= \frac{\Gamma(2m+n+1) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - m - n\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1-n) \cdot \left(m + \frac{1}{2}\right)} 2^m \cdot q^{-2m-1} \\
 &\quad \cdot {}_2F_1\left(m + \frac{1}{2}, 2m+n+1; m + \frac{3}{2}; 1 - \frac{2}{q}\right)
 \end{aligned}$$

gültig für

$$\Re(q) > 1, \Re(m) > -\frac{1}{2}, \Re\left(m + \frac{n}{2}\right) > -\frac{1}{2}, \Re(m+n) < \frac{1}{2}.$$

Ebenso läßt sich I(5,3) folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4}(1-2q)y^2} \cdot [D_\mu(y) + D_\mu(-y)] \cdot Q\left(n, \frac{1}{2}qy^2\right) dy = \\
 (21) \quad &= \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - n + 1\right)}{(\mu+1) \cdot \Gamma(1-n)} 2^{\frac{1}{2}\mu + \frac{3}{2}} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\mu\pi\right) \\
 &\quad \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\mu + \frac{3}{2}; 1 - \frac{1}{q}\right),
 \end{aligned}$$

gültig für

$$\Re(q) > \frac{1}{2}, \Re\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{n}{2} + 1\right) > \Re\left(\frac{n}{2}\right) > -\frac{1}{4}.$$

In I(6,2) benützen wir für die hypergeometrische Funktion ihre Integraldarstellung (4) und schreiben

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^{(1-p)x} \cdot L_r^{(\alpha)}(px) \cdot \dot{Q}(nx) dx = \\
 (22) \quad &\frac{\Gamma(\alpha+n+1) \cdot \Gamma(r-n+1)}{r! \Gamma(1-n)} \int_0^1 t^{\alpha+r} \cdot [1 - (1-p)t]^{-\alpha-n-1} dt,
 \end{aligned}$$

gültig für

$$\Re(p) > 0, \Re(\alpha) > -1, \Re(\alpha+n) > -1.$$

Zum Schlusse dieses Abschnittes rechnen wir Formel I(6,3) unter der Voraussetzung

$$r = 0.$$

Es ist dann

$$(23) \quad \int_0^\infty x^\alpha \cdot e^x \cdot Q(nx) dx = \frac{\pi \cdot \Gamma(\alpha+1)}{-\Gamma(1-n) \cdot \sin \pi(\alpha+n)},$$

gültig für

$$-1 < \Re(\alpha+n) < 0.$$

In den folgenden Zeilen werden wir uns mit den sog. Charlierschen Polynomen ⁵⁾ beschäftigen, welche in der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei der Poissonschen Verteilung auftreten und ebenfalls durch die Whittakersche Funktion dargestellt werden können. Man zeigt leicht, daß

$$(24) \quad p_s(r, x) = \frac{r!}{(r-s)!} \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot x^{-\frac{r+s+1}{2}} \cdot M_{\frac{r+s+1}{2}, \frac{r-s}{2}}(x)$$

ist.

Wir führen diese Ersetzung in I(3,1) durch und erhalten

$$(25) \quad \int_0^\infty x^{r+n-\frac{1}{2}} \cdot e^{-(\lambda-\frac{1}{2}q)x} \cdot p_s(r, \lambda x) \cdot W_{l,n}(qx) \cdot dx = \\ = \frac{r! \Gamma(r-s+2n+1) \cdot \Gamma\left(s-l-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-l-n\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}+r-l+n\right)} p^{-s} \cdot q^{s-r-n-\frac{1}{2}} \\ \cdot F_1\left(r+1, r-s+2n+1; \frac{3}{2}+r-l+n; 1-\frac{\lambda}{q}\right),$$

gültig für

$$|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}, \quad |\arg q| < \frac{3}{2}\pi, \quad |\lambda - q| < |q|, \quad r - s > -1,$$

$$\Re(r-s+2n) > -1, \quad \Re(-s+n+l) < \frac{1}{2}.$$

Sonderfall:

$$l = -\frac{1}{2}, \quad n = 0$$

und weiters

$$(25') \quad Ei(qx) = e^{-\frac{1}{2}qx} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot q^{-\frac{1}{2}} \cdot W_{-\frac{1}{2}, 0}(qx).$$

Die Formel I(3,1) geht dann über in

$$(26) \quad \int_0^\infty x^r \cdot e^{-(\lambda-q)x} \cdot p_s(r, \lambda x) \cdot Ei(qx) dx = \\ = \frac{(r-s)! s! q^{s-r-1}}{(r+1) \cdot \lambda^s} {}_2F_1\left(r+1, r-s+1; r+2; 1-\frac{\lambda}{q}\right),$$

gültig für

$$|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2}, \quad |\arg q| < \frac{3}{2}\pi, \quad |\lambda - q| < |q|, \quad r - s > -1.$$

Dieselbe Betrachtung führt in I(4,4) zu der Integraldarstellung

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} x^{r+n} \cdot e^{(1-\lambda)x} \cdot k_n(x) \cdot p_s(r, \lambda x) dx = \\
 (27) \quad & = \frac{\sqrt{\pi} r! \Gamma(r-s+2n+1) \cdot \Gamma\left(s-n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+r+n\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)} \lambda^{-s} \cdot 2^{-r+s-n-1} \\
 & \quad \cdot {}_2F_1\left(r+1, r-s+2n+1; r+\frac{3}{2}+n; 1-\frac{\lambda}{2}\right),
 \end{aligned}$$

gültig für

$$\left|1-\frac{1}{2}\lambda\right| < 1, \Re(r-s+2n) > -1, \Re(n-s) < \frac{1}{2} \text{ und } r-s > -1.$$

Aus der letzten Formel erhält man den nicht uninteressanten Sonderfall, wenn man

$$n = \frac{1}{2} + N \quad (N=0, 1, 2 \dots)$$

schreibt und berücksichtigt, daß

$$\Gamma(-N) = \infty$$

ist. Man findet dann leicht die Formel:

$$(27') \quad \int_0^{\infty} x^{r+N+\frac{1}{2}} \cdot e^{(1-\lambda)x} \cdot k_{N+\frac{1}{2}}(x) \cdot p_s(r, \lambda x) dx = 0,$$

gültig für

$$\left|1-\frac{1}{2}\lambda\right| < 1, \Re(r-s+2N) > -2, \Re(N-s) < 0, r-s < \frac{1}{2}.$$

Die beiden folgenden Formeln stellen Integrale dar, in denen Produkte der parabolischen Zylinderfunktion und der Charlier'schen Polynome auftreten. Und zwar wird aus I(5,4)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} x^{2r+1} \cdot e^{\frac{1}{2}(1-2\lambda)x^2} \cdot D_{-\nu}(x) \cdot p_s\left(r, \frac{1}{2}\lambda x^2\right) dx = \\
 (28) \quad & = \frac{r! \Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+s\right) \cdot \Gamma\left(r-s+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right) \cdot \Gamma\left(r+\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}\right)} 2^{r-\frac{\nu}{2}} \cdot \lambda^{-s} \\
 & \quad \cdot {}_2F_1\left(r+1, r-s+\frac{3}{2}; r+\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}; 1-\lambda\right),
 \end{aligned}$$

gültig für

$$|1-\lambda| < 1, \Re\left(s+\frac{1}{2}\nu\right) > 0, r-s > -1.$$

In ähnlicher Weise bestimmen wir I(5,5) in der Form

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty y^{2r} \cdot e^{-\frac{1}{2}(1-2\lambda)y^2} \cdot p_s\left(r, \frac{1}{2}\lambda y^2\right) \cdot D_{-\nu}(y) dy = \\
 (29) \quad &= \frac{r! \Gamma\left(r-s+\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(s+\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(r+\frac{1}{2}\nu+1\right)} 2^{r-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}} \cdot \lambda^{-s} \\
 &\quad \cdot {}_2F_1\left(r+1, r-s+\frac{1}{2}; r+1+\frac{1}{2}\nu; 1-\lambda\right),
 \end{aligned}$$

gültig für

$$|1 - \lambda| < 1, \Re(2s + \nu + 1) > 0, r - s > -\frac{1}{2}.$$

Als vorletztes Beispiel wählen wir die Formel I(3,2), in der die *W*-funktion durch die unvollständige Gammafunktion und die *M*-funktion durch das Charliersche Polynom ersetzt wurden. Dabei ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x^{r-n} \cdot e^{-(\lambda-q)x} \cdot p_s(r, \lambda x) \cdot Q(n, qx) dx = \\
 (30) \quad &= \frac{r! \Gamma(r-s-n+1) \cdot s!}{\Gamma(r-n+2)} \lambda^{-s} \cdot q^{-r+s+n-1} \\
 &\quad \cdot {}_2F_1\left(r+1, r-s-n+1; r-n+2; 1-\frac{\lambda}{q}\right),
 \end{aligned}$$

gültig für

$$|\lambda - q| < q, \Re(r-s-n) > -1 \text{ und } (r-s) > -1,$$

und als letztes Beispiel berechnen wir I(6,4), in dessen Integranden ein Produkt aus Charlierschen und Laguerreschen Polynomen erscheint. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x^{\beta+r} \cdot e^{-\lambda x} \cdot L_\sigma^{(\beta)}(x) \cdot p_s(r, \lambda x) dx = \\
 (31) \quad &= \frac{(-)^\sigma \cdot r! \Gamma(r-s+\beta+1) \cdot \Gamma(-\beta+s-\sigma)}{\sigma!(r-\sigma)! \Gamma(-\beta-\sigma)} \lambda^{-s} \\
 &\quad \cdot {}_2F_1(r+1, r-s+\beta+1; r+1-\sigma; 1-\lambda),
 \end{aligned}$$

gültig für

$$|1 - \lambda| < 1, \Re(\beta+r-s) > -1, \Re(\beta-s+\sigma) < 0.$$

Setzt man in vorstehender Integraldarstellung

$$\sigma = 0 \text{ und } \lambda = 1,$$

so erhält man den Sonderfall

$$(31') \quad \int_0^{\infty} x^{\beta+r} \cdot e^{-x} \cdot p_s(r, x) dx = \frac{\Gamma(r-s+\beta+1)\Gamma(s-\beta)}{\Gamma(-\beta)}$$

für

$$\Re(\beta+r-s) > -1 \text{ und } \Re(\beta-s) < 0.$$

Zum Schlusse möchte ich Herrn Dr. A. Erdélyi für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine wertvollen Ratschläge meinen herzlichsten Dank aussprechen.

(Eingegangen den 31. März 1939.)
