N. A. ARTEMIEFF

Stabilité au sens de Liapounoff et nombre de solutions périodiques

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 78-92
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__78_0>

Stabilité au sens de Liapounoff et nombre de solutions périodiques

par

N. A. Artemieff

Léningrad

§ 1.

Introduction et énoncé du problème.

Soit $\mathfrak{G}$ un domaine borné d'un espace à n dimensions, dont nous désignerons [1]) les coordonnées d'un point par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et soit donné dans $\mathfrak{G}$, pour $t \geqq 0$, le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

où les X_j sont des fonctions périodiques du temps t.

Pour l'examen qualitatif des solutions du système (1), il est très important de connaître le nombre possible de mouvements périodiques différents qui sont contenus dans le domaine $\mathfrak{G}$.

Dans ce travail nous établissons un critère, permettant d'évaluer dans certains cas une limite supérieure du nombre possible de mouvements périodiques de classe donnée qui sont contenus dans le domaine $\mathfrak{G}$. En outre nous donnons un moyen permettant de juger en 1ère approximation de la stabilité de la solution périodique.

En ce qui concerne les fonctions X_j nous ferons pour le moment les hypothèses suivantes:

I. $X_j, \dfrac{\partial X_j}{\partial x_k}$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, sont des fonctions réelles, uniformes et continues dans le domaine fermé $\{x_j\} \in \overline{\mathfrak{G}}$, $t \in [0, +\infty)$.

II. $X_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = X_j(t+2\pi, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

III. Les dérivées $\dfrac{\partial X_j}{\partial x_k}$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ satisfont dans le

---

[1]) Nous désignerons aussi les points de l'espace R_n par le symbole $\{x_j\}$, et quelquefois simplement par la lettre x. Nous considérerons les variables $x_1, \ldots, x_n, t$, de même que les fonctions X_j de ces variables comme réelles.

domaine $\{x_j\} \in \mathfrak{G}$, $t \in [0, +\infty)$ à une condition de Lipschitz:

$$\left| \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_{x'} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_{x} \right| \leqq L \sum_{s=1}^{n} |x'_s - x_s|$$

où L est une constante.

Supposons que les équations (1) admettent la solution périodique continue

$$x_j = \varphi_j(t) = \varphi_j(t+2\pi), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

appartenant pour toutes les valeurs de t au domaine $\mathfrak{G}$.

La recherche des solutions voisines de cette solution amène, on le sait, à l'étude des équations differéntielles du mouvement perturbé.

Posons

$$x_j = \varphi_j(t) + z_j, \quad j = 1, \ldots, n; \tag{3}$$

les équations du mouvement perturbé se mettent alors sous la forme:

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_{x_s - \varphi_s(t)} \cdot z_k + R_j(t, z_1, \ldots, z_n), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Introduisons la notion de distance dans l'espace[2]) à n dimensions E_n, et plus spécialement la distance $r(z', z)$ entre les points $\{z_k\}$ et $\{z'_k\}$ qui est égale à

$$r(z', z) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z'_k - z_k)^2}. \tag{5}$$

Pour simplifier nous désignerons simplement la distance des points $\{z_k(t)\}$ à l'origine des coordonnées par le symbole $r(t)$.

Supposons maintenant que le système fondamental des solutions des équations aux variations

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t)\bar{z}_k, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

où

$$A_{jk}(t) = \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_{x_s = \varphi_s(t)}, \quad j, k = 1, \ldots, n$$

ait comme exposants caractéristiques $\sigma_k = -\lambda_k + i\omega_k$, $k = 1, \ldots, n$, où les parties réelles négatives $-\lambda_k$ satisfont à l'inégalité

$$\lambda_k \geqq \beta > 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

---

[2]) Nous désignerons l'espace dont les points sont $\{z_j\}$ par le symbole E_n.

Soit $\bar{g}$ un domaine fermé $\subset \mathfrak{G}$. Nous appellerons solution périodique de classe $H(\beta, \bar{g})$ toute solution périodique $\{\varphi_j(t)\}$ (période 2π) du système (1) qui satisfait aux conditions:

I. $\varphi_j(t) \in \bar{g}$ pour toutes les valeurs réelles de t.

II. Les exposants caractéristiques du système (10) ont des parties réelles négatives $-\lambda_k$ qui satisfont à la condition (11).

Nous allons prouver que dans la supposition que nous avons faite, toutes les solutions du système (4), correspondant aux solutions de classe $H(\beta, \bar{g})$ du système (1) et dont les coordonnées initiales satisfont à l'inégalité $r(0) \leqq \varepsilon$, pour ε suffisamment petit, tendent asymptotiquement vers 0 quand t tend vers l'infini positif.

On en déduit immédiatement la possibilité d'évaluer une limite supérieure du nombre de mouvements périodiques différents, de classe $H(\beta, \bar{g})$ contenus dans un domaine fermé quelconque $\bar{g} \subset \mathfrak{G}$. Géométriquement parlant en effet l'énoncé précédent signifie que toutes les trajectoires, issues au moment initial d'un point intérieur à une sphère à n dimensions de rayon donné ε dont le centre se trouve au point $\{\varphi_j(0)\}$, se rapprochent asymptotiquement de ce mouvement périodique $\{\varphi_j(t)\}$ quand t tend vers l'infini positif. Désignons le volume de ce domaine $\mathfrak{G}$ par U et le volume de cette sphère par v. Il est alors évident que le nombre de solutions périodiques différentes de classe $H(\beta, \bar{g})$ ne peut pas être plus grand que $\frac{U}{v}$.

§ 2.

LEMME I.[3]) *Soit le système d'équations différentielles*

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t)\,\bar{z}_k, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{11'}$$

dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t, de période 2π, continues pour chaque valeur de t et satisfaisant à l'inégalité

$$|A_{jk}(t)| \leqq A \tag{12}$$

où A est une constante.

Si tous les exposants caractéristiques du système

$$\sigma_k = -\lambda_k + i\omega_k, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

---

[3]) Ce lemme m'a été aimablement communiqué par V. I. Kriloff, que je remercie ici bien vivement.

ont une partie réelle négative telle que $\lambda_k \geqq \beta > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, *alors une solution quelconque de ce système satisfait à l'inégalité*

$$\bar{r}(2\pi s) \leqq \bar{r}(0) n \frac{N^n - 1}{N - 1} e^{-2\pi s \beta} \tag{13}$$

où $N = \operatorname{sn}[1 + e^{2\pi(\beta + nA)}]$ *et* s *est un nombre entier positif quelconque.* ($\bar{r}$ est défini pour $\bar{z}$ comme r pour z.)

Démonstration. Supposons que l'on ait trouvé n solutions réelles indépendantes [4]) du système (10)

$$\left.\begin{array}{l} \bar{z}_{11}(t),\ \bar{z}_{12}(t),\ \ldots,\ \bar{z}_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{z}_{n1}(t),\ \bar{z}_{n2}(t),\ \ldots,\ \bar{z}_{nn}(t) \end{array}\right\} \tag{14}$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$\bar{z}_{jk}(0) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}. \tag{15}$$

Examinons la matrice B composée des coefficients de la substitution intégrale du système (14) correspondant à la période 2π,

$$B = \left\| \begin{array}{l} b_{11}, \ldots, b_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}, \ldots, b_{nn} \end{array} \right\|. \tag{16}$$

Nous désignerons la matrice composée des solutions de ce système (14) par $Z(t)$. De sorte que

$$Z(t + 2\pi) = BZ(t), \tag{17}$$

et en vertu de (15)

$$b_{jk} = \bar{z}_{jk}(2\pi), \quad (j, k = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

L'équation caractéristique, correspondant à la période 2π, sera

$$\left| \begin{array}{llll} b_{11} - \varrho, & b_{12}, & \ldots, & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}, & & \ldots, b_{nn-1}, & b_{nn} - \varrho \end{array} \right| = 0. \tag{19}$$

Les racines de l'équation (19) sont

$$\varrho_k = e^{2\pi\sigma_k}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

En raison des suppositions faites elles satisfont à l'inégalité

$$|\varrho_k| \leqq e^{-2\pi\beta}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

---

[4]) Le premier indice est le numéro des solutions, le deuxième le numéro des coordonnées.

Evaluons [5]) tout d'abord la matrice B. Pour cela formons un système d'équations majorantes par rapport au système (10)

$$\frac{dy_j}{dt} = A \sum_{k=1}^{n} y_k, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

De (10), (12), (18) et (22) on tire l'inégalité

$$|Z(t)| \leqq \| e^{2\pi A n} \|, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi, \tag{23}$$

et

$$|B| \leqq \| e^{2\pi A n} \|. \tag{23'}$$

Il résulte maintenant des formules (15) et (17) que

$$Z(2\pi s) = B^s \tag{24}$$

où s est un nombre entier positif.

De cette manière l'évaluation de $|z_{jk}(2\pi s)|$ se ramène à l'évaluation des éléments de la matrice B^s. Pour cela nous utilisons la formule d'interpolation de Newton

---

[5]) Si la matrice X est donnée, le symbole $|X|$ représente la matrice dont les éléments sont les modules des éléments correspondants de la matrice X. Soient données deux matrices $|X|$ et Y avec

$$|x_{jk}| \leqq y_{jk}, \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Nous supposerons outre cela que l'inégalité

$$|x_{\mu\nu}| < y_{\mu\nu}$$

a lieu pour un ou plusieurs éléments de ces matrices. Nous dirons alors:

$$|X| < Y.$$

Par exemple

$$|X| \text{ est } < \|\varepsilon\|$$

si l'on a

$$|x_{jk}| \leqq \varepsilon, \qquad j, k = 1, \ldots, n,$$

et parmi ces inégalités on a pour certains indices μ et ν

$$|x_{\mu\nu}| < \varepsilon.$$

L'inégalité

$$|X| \leqq \|\varepsilon\|$$

est équivalente à

$$|x_{jk}| \leqq \varepsilon, \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

La notion de l'inégalité des matrices que nous avons introduite ci-dessus, est donc différente de la notion correspondante utilisée par I. A. Lappo-Danielewsky. Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, vol. I, Chap. 1 [Académie des Sciences de l'URSS, 1934. Travaux de l'institut physico-mathématique Stekloff].

$$
\begin{aligned}
u^s = u_1^s + (u-u_1)f(u_1, u_2) + \ldots + \\
+ (u-u_1)\cdots(u-u_{n-1})f(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \\
+ (u-u_1)\cdots(u-u_n)f(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) + \ldots + \\
+ (u-u_1)\cdots(u-u_n)\cdots(u-u_{s-1})f(u_1, \ldots, u_s)
\end{aligned} \tag{25}
$$

où

$$
f(u_1, \ldots, u_k, u) = \frac{f(u_1, \ldots, u_{k-2}, u) - f(u_1, \ldots, u_{k-1})}{u - u_{k-1}}, \quad f(u) = u^s. \tag{26}
$$

On tire facilement de (26) l'égalité

$$
f(u_1, \ldots, u_j) = \Sigma_{k_1+k_2+\ldots+k_j=s-(j-1)}\, u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdots u_j^{k_j} \tag{27}
$$

où la somme porte sur toutes les combinaisons des nombres entiers $k_l \geqq 0 \quad (l = 1, \ldots, j)$ satisfaisant à l'égalité

$$
k_1 + k_2 + \ldots + k_j = s - (j-1),
$$

c'est-à-dire $f(u_1, u_2, \ldots, u_j)$ est un polynôme homogène de degré $s-(j-1)$ des arguments $u_1, \ldots, u_j$ avec des coefficients égaux à 1.

La formule (25) est une identité. Elle restera encore une identité, si nous remplacerons u par une matrice quelconque U et $u_1, \ldots, u_s$ par des nombres quelconques, parce que le deuxième membre de cette formule contiendra dans ce cas une seule matrice U, et que le produit des puissances de celle-ci est commutatif.

Remplaçons dans la formule (25) u par la matrice B et $u_1, \ldots, u_n$ par des nombres caractéristiques $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ de la matrice B, et, si $s > n$, les autres $u_{n+1}, \ldots, u_s$ par des nombres quelconques. Alors, d'après l'identité de Cayley

$$
(B-\varrho_1 I)(B-\varrho_2 I)\cdots(B-\varrho_n I) \equiv 0, \tag{28}
$$

où I est une matrice unité, la formule (25) deviendra

$$
\begin{aligned}
B^s = \varrho_1^s I + (B-\varrho_1 I)f(\varrho_1, \varrho_2) + \ldots + \\
+ (B-\varrho_1 I)\cdots(B-\varrho_n I)f(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)
\end{aligned} \tag{29}
$$

puisque les autres termes s'annulent.

La formule (29) et l'inégalité (21) et (23′) donnent maintenant

$$
\begin{aligned}
|B^s| \leqq |\varrho_1^s I| + |(B-I\varrho_1)f(\varrho_1, \varrho_2)| + \\
+ |(B-I\varrho_1)(B-I\varrho_2)f(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)| + \ldots \\
+ |(B-I\varrho_1)(B-I\varrho_2)\cdots(B-I\varrho_{n-1})f(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)| \leqq \\
\leqq \|e^{-2\pi s\beta}\| + \|e^{2\pi nA} + e^{-2\pi s\beta}\| \cdot |f(\varrho_1, \varrho_2)| + \\
+ \|n(e^{2\pi nA} + e^{-2\pi\beta})^2\| \cdot |f(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)| + \ldots \\
+ \|n^{n-2}(e^{2\pi nA} + e^{-2\pi\beta})^{n-1}\| \cdot |f(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n)|.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Nous avons

$$\left|f(\varrho_1, \ldots, \varrho_j)\right| \leqq \Sigma_{k_1+\ldots+k_n=s-(j-1)}\, e^{-2\pi\beta(k_1+\ldots+k_j)}. \tag{31}$$

Pour évaluer alors la matrice B^s dont nous avons besoin, il nous reste à calculer la somme qui figure dans la formule (31). Pour cela nous utiliserons la formule

$$S(m, j) = \frac{(j+1)(j+2)\cdots(j+m-1)}{m!} \tag{32}$$

qui donne le nombre de termes du polynôme homogène de degré m de j variables.

Nous tirons de (31) et (32)

$$\begin{aligned}\left|f(\varrho_1, \ldots, \varrho_j)\right| &\leqq e^{-2\pi\beta[s-(j-1)]}\, S[s-(j-1), j] = \\ &= e^{-2\pi\beta[s-(j-1)]}\, \frac{[s-(j-2)]\,[s-(j-3)]\cdots(s-1)s}{(j-1)!}.\end{aligned} \tag{33}$$

Et il résulte de (30) et (33) que

$$\begin{aligned}\left|B^s\right| \leqq \Big\| e^{-2\pi s\beta}\Big[1 &+ e^{2\pi\beta}(e^{2\pi nA} + e^{-2\pi\beta})\cdot\frac{s}{1!} + \\ &+ e^{4\pi\beta}(e^{2\pi nA} + e^{-2\pi\beta})^2\, n\cdot\frac{(s-1)s}{2!} + \ldots \\ + e^{2\pi\beta(n-1)}n^{n-2}(e^{2\pi nA} &+ e^{-2\pi\beta})^{n-1}\frac{[s-(j-2)]\,[s-(j-3)]\cdots(s-1)s}{(j-1)!}\Big]\Big\| \leqq \\ &\leqq \left\| e^{-2\pi s\beta}\frac{N^n-1}{N-1}\right\|\end{aligned} \tag{34}$$

où

$$N = sn\left[1+e^{2\pi(\beta+nA)}\right]. \tag{34'}$$

La formule (34) est valable pour $s \geqq 1$ et $n \geqq 1$.

L'inégalité (34) entre matrices est équivalente aux n^2 inégalités

$$\left|\bar{z}_{jk}(2\pi s)\right| \leqq e^{-2\pi s\beta}\frac{N^n-1}{N-1}, \qquad j, k = 1, \ldots, n. \tag{35}$$

Formons maintenant avec les solutions linéairement indépendantes $\bar{z}_{jk}(t)$ la solution arbitraire du système (10)

$$\bar{z}_j(t) = \Sigma_{k=1}^n C_k\, \bar{z}_{jk}(t), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{36}$$

En vertu de (15) on a

$$\bar{r}^2(0) = \Sigma_{j=1}^n \bar{z}_j^2(0) = \Sigma_{k=1}^n C_k^2. \tag{37}$$

En se servant de l'inégalité de Schwarz et des égalités (36) et (37) il vient

$$\bar{r}^2(2\pi s) \leqq \bar{r}^2(0)\, \Sigma_{j=1}^n\, \Sigma_{k=1}^n\, \bar{z}_{jk}^2(2\pi s).$$

En remplaçant alors dans cette inégalité le module de $\bar{z}_{jk}(2\pi s)$ par le second membre de l'inégalité (35) nous obtenons l'inégalité cherchée (13), c. q. f. d.

§ 3.

Soient donnés 2 systèmes quelconques (1) et (2) d'équations différentielles de forme normale avec le même nombre de fonctions inconnues dépendant d'une variable que nous désignerons encore par t. *Nous appellerons „solutions correspondantes" les solutions des systèmes* (1) *et* (2) *satisfaisant pour une valeur quelconque* $t = t_0$ *aux mêmes conditions initiales.*

Examinons également le système d'équations différentielles (4)

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t)\, z_k + R_j\,(t, z_1, \ldots, z_n), \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad (4)$$

et aussi les équations aux variations

$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t)\, \bar{z}_k\,, \qquad j = 1 \ldots, n. \qquad (10)$$

Nous allons démontrer le lemme suivant:

LEMME II. *Les solutions*[6]) *du système* (4) *diffèrent des „solutions correspondantes" du système* (10) *dans l'intervalle* $0 \leqq t \leqq 2\pi s$, *pour* $r(0)$ *suffisamment petit, de* $Cr(0)$ *au plus, c'est-à-dire*

$$\left| z_j(t) - \bar{z}_j(t) \right| \leqq Cr(0)\,, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad (38)$$

où

$$C = 2\pi n^3 L\eta s\, e^{(A + nL\eta)2\pi sn}\, \frac{N^n - 1}{N - 1}\, e^{-2\pi s\beta}\,,$$

η étant la limite inférieure de la distance entre les frontières des domaines $\bar{\mathfrak{g}}$ et $\mathfrak{G}$.

En utilisant le symbole de la distance tiré de l'inégalité (38) nous pouvons établir l'inégalité suivante

$$\left.\begin{aligned} r(t) &\leqq \bar{r}(t) + n^{\frac{1}{2}} C\, \bar{r}(0) \\ r(t) &\geqq \bar{r}(t) - n^{\frac{1}{2}} C\, \bar{r}(0) \end{aligned}\right\} 0 \leqq t \leqq 2\pi s. \qquad (38')$$

Démonstration. Pour démontrer ce lemme nous emploierons la méthode des approximations successives.

---

[6]) **Quand nous parlons des solutions des systèmes (4) et (10) nous sous-entendons toujours les solutions différentes de zéro. L'existence de telles solutions sera bien évidente après la démonstration du lemme II.**

Considérons le domaine $\bar{g} \subset \mathfrak{G}$. Soient γ et Γ les frontières respectives de g et $\mathfrak{G}$. Désignons par η la borne inférieure de la distance entre deux points quelconques appartenant respectivement à γ et Γ; c'est-à-dire posons

$$\eta = \inf r[\{x_\gamma\}, \{x_\Gamma\}]$$

où r est la distance entre les points $\{x_\gamma\}$ et $\{x_\Gamma\}$, et $\{x_\gamma\}$ et $\{x_\Gamma\}$ deux points de γ et Γ.

Soit alors $\{\varphi_j(t)\}$ une solution périodique quelconque de classe $H(\beta, \bar{g})$ du système (1).

Supposons que le système (4) corresponde à l'une de ces solutions périodiques.

Soient les points $\{z_j(t)\}$ et $\{z_j'(t)\}$ vérifiant les inégalités

$$r(z, 0) \text{ et } r(z', 0) \leqq \varepsilon \leqq \eta. \tag{39}$$

Montrons que dans ce cas les fonctions $R_j(t, z_1, \ldots, z_n)$ satisfont à la condition de Lipschitz

$$|R_j(t, z_1', \ldots, z_n') - R_j(t, z_1, \ldots, z_n)| \leqq \mu \sum_{k=1}^n |z_k' - z_k|, \quad j = 1, \ldots, n \tag{39'}$$

où

$$\mu = nL\varepsilon .$$

De fait, en calculant les expressions

$$R_j(t, z_1', \ldots, z_n') =$$
$$= X_j(t, \varphi_1 + z_1', \ldots, \varphi_n + z_n') - X_j(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_\varphi \cdot z_k',$$
$$R_j(t, z_1, \ldots, z_n) =$$
$$= X_j(t, \varphi_1 + z_1, \ldots, \varphi_n + z_n) - X_j(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_\varphi \cdot z_k,$$

et en appliquant la formule des accroissements finis nous obtenons

$$R_j(t, z_1', \ldots, z_n') - R_j(t, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_{\varphi + z^*} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_\varphi \right) \cdot (z_k' - z_k),$$

où $z_1^*, \ldots, z_n^*$ désignent les coordonnées du point $\{z_k^*\}$ vérifiant l'inégalité

$$|z_k^*| \leqq \max(|z_k'|, |z_k|), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{40}$$

D'après (39) et (40) le point $\{z_k^*\}$ appartient au domaine $\mathfrak{G}$ et ainsi on peut appliquer la condition de Lipschitz à la différence

$$\frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_{\varphi + z^*} - \frac{\partial X_j}{\partial x_k}\bigg|_\varphi ;$$

on obtient alors

$$\left| R_j(t, z_1', \ldots, z_n') - R_j(t, z_1, \ldots, z_n)\right| \leqq L \sum_{k=1}^n \left|z_k^*\right| \cdot \sum_{k=1}^n \left|z_k' - z_k\right| .$$

D'où en vertu de (40)

$$\left|R_j(t, z_1', \ldots, z_n') - R_j(t, z_1, \ldots, z_n)\right| \leqq$$
$$\leqq L \cdot \max\left\{\sum_{k=1}^n \left|z_k'\right|, \sum_{k=1}^n \left|z_k\right|\right\} \cdot \sum_{k=1}^n \left|z_k' - z_k\right| . \quad (40')$$

Puis en vertu de (39)

$$\max\left\{\sum_{k=1}^n \left| z_k' \right| , \sum_{k=1}^n \left| z_k \right|\right\} \leqq n\varepsilon$$

de sorte que nous retombons sur l'inégalité (39').

Si ε tend vers 0, le coefficient μ de la condition de Lipschitz tend aussi vers 0. Ceci nous servira plus tard.

Prenons maintenant comme approximation de numéro 0 de la solution du système (4), la solution „correspondante" du système de l'équation aux variations, c'est-à-dire $\{\bar{z}_j(t)\}$ qui satisfait aux équations:

$$\bar{z}_j(t) = \bar{z}_j(0) + \int_0^t \sum_{k=1}^n A_{jk}(t)\, \bar{z}_k(t)\, dt, \qquad j = 1, \ldots, n . \quad (41)$$

La 1ère approximation $\{z_j^1\}$ sera déterminée par l'égalité

$$z_j^1(t) = \bar{z}_j(0) + \int_0^t \sum_{k=1}^n A_{jk}(t)\, \bar{z}_k(t) dt + \int_0^t R_j(t, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)\, dt . \quad (42)$$

Toutes les approximations suivantes (les numéros des approximations correspondent aux indices du haut) sont alors obtenues à l'aide de la formule de récurrence

$$z_j^{m+1}(t) = z_j^m(0) + \int_0^t \sum_{k=1}^n A_{jk}(t)\, z_k^m(t)\, dt + \int_0^t R_j(t, z_1^m, \ldots, z_n) \quad (42')$$

L'évalution suivante de l'approximation de numéro 0 résulte de la formule (33):

$$\left| \bar{z}_j(t)\right| \leqq r(0)\, \Theta(s), \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi s, \quad j = 1, \ldots, n , \quad (43)$$

où on a posé pour simplifier

$$\Theta(s) = n \frac{N^n - 1}{N - 1} e^{-2\pi\beta s}. \quad (43')$$

Appliquons la condition de Lipschitz (39') (avec la constante de Lipschitz $\mu = nL\eta$) et admettons qu'elle soit encore valable pour les points $\{z_j\}$ et $\{z_j'\}$ qui vérifient dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 2\pi s$ l'inégalité

$$r\left[z(t), 0\right], \; r\left[z'(t), 0\right] \leqq \bar{r}(0)\, n^{\frac{1}{2}}\, e^{2\pi s n (A + \mu)}\, \Theta(s) . \quad (44)$$

Il faut pour cela que $\bar{r}(0)$ satisfasse à l'inégalité

$$\bar{r}(0) \leqq \frac{\eta}{n^{\frac{1}{2}} e^{2\pi sn(A+\mu)} \Theta(s)} = \alpha . \tag{44'}$$

Nous obtenons alors à partir de (39') et (40)

$$\left| \bar{z}_j(t) - z'_j(t) \right| \leqq \bar{r}(0) \mu\Theta(s) t, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi s . \tag{45}$$

Par le même raisonnement nous trouvons [7])

$$\left| z_j^{m+1}(t) \right| \leqq \bar{r}(0) \Theta(s) \sum_{k=0}^{m+1} \frac{[(A+\mu)nt]^k}{k!}, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi s , \tag{46}$$

$$\left| z_j^{m+1}(t) - z_j^m(t) \right| \leqq \bar{r}(0) \Theta(s) \mu(A+\mu)^m \frac{(nt)^{m+1}}{(m+1)!} \leqq$$

$$\leqq r(0) \Theta(s) \frac{[(A+\mu)nt]^{m+1}}{(m+1)!}, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi s , \tag{47}$$

$$\left| z_j^{m+1}(t) - \bar{z}_j(t) \right| \leqq \bar{r}(0) \Theta(s) \mu nt \sum_{k=0}^{n} \frac{[(A+\mu)nt]^k}{k!}, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi s . \tag{48}$$

L'inégalité (46) nous montre que quand $\bar{r}(0)$ satisfait à (44) chaque approximation appartient au domaine (39), domaine pour lequel la condition de Lipschitz est valable. Quand $m \to +\infty$ l'inégalité (48) prend à la limite la forme

$$\left| z_j(t) - \bar{z}_j(t) \right| \leqq \bar{r}(0) \Theta(s) \mu nt \, e^{(A+\mu)nt}, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi s , \tag{49}$$

d'où

$$\left| z_j(t) - \bar{z}_j(t) \right| \leqq \bar{r}(0) \, 2\pi n\mu s \, \Theta(s) \, e^{(A+\mu) 2\pi sn}, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi s . \tag{50}$$

Cette dernière donne

$$\sum_{j=1}^{n} \left| z_j(t) - \bar{z}_j(t) \right|^2 \leqq \bar{r}^2(0) \, 4\pi^2 n^3 \mu^2 s^2 \, e^{(A+\mu) 4\pi sn} \, \Theta^2(s) , \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi s , \tag{51}$$

d'où

$$\left| r(t) - \bar{r}(t) \right| \leqq \bar{r}(0) \, 2\pi n^{\frac{3}{2}} \mu \, e^{2\pi sn(A+\mu)} s \, \Theta(s) , \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi s , \tag{52}$$

où

$$\left. \begin{aligned} r(t) &\leqq \bar{r}(t) + \bar{r}(0) \, 2\pi n^{\frac{3}{2}} \mu \, e^{2\pi sn\,(A+\mu)} s \, \Theta(s) \\ r(t) &\geqq \bar{r}(t) - \bar{r}(0) \, 2\pi n^{\frac{3}{2}} \mu \, e^{2\pi sn\,(A+\mu)} s \, \Theta(s) \end{aligned} \right\} 0 \leqq t \leqq 2\pi s \tag{53}$$

c.q.f.d.

---

[7]) L'existence et la continuité de la solution du système (4) dans chaque intervalle fini, pour $r(0)$ suffisamment petit, résultent des inégalités (46) et (47).

§ 4.

Lemme III. *Si $r(0)$ est suffisamment petit pour vérifier l'inégalité*

$$r(0) \leqq \frac{\eta}{\Theta(s) n^{\frac{1}{2}} e^{2\pi sn(A+\mu)}} = \alpha\,, \tag{54}$$

on a

$$r(2\pi s) \leqq r(0)\, \Theta(s) n^{\frac{1}{2}}[1 + \mu n^2\, 2\pi s\, e^{2\pi sn\,(A+\mu)}], \tag{55}$$

et avec cela pour n, L, A, η, β, donnés et pour un choix convenable des grandeurs s et $r(0)$ cette inégalité peut se mettre sous la forme

$$r(2\pi s) \leqq q r(0) \tag{56}$$

où $q < 1$.

Démonstration. Ce lemme est une conséquence immédiate des lemmes I et II.

En effet, le lemme II donne

$$r(2\pi s) \leqq \bar{r}(2\pi s) + \bar{r}(0)\, \Theta(s) \mu n^{\frac{3}{2}}\, 2\pi s\, e^{2\pi sn\,(A+\mu)}. \tag{57}$$

Utilisons maintenant l'inégalité du lemme I et observons que $r(0) = \bar{r}(0)$; nous obtenons

$$r(2\pi s) \leqq r(0)\, \Theta(s)\, n^{\frac{1}{2}}[1 + \mu n^2\, 2\pi s\, e^{2\pi sn\,(A+\mu)}] \tag{55}$$

c.q.f.d.

Nous écrirons maintenant l'inégalité (55) sous la forme

$$r(2\pi s) \leqq r(0)\, \Theta(s)\, n^{\frac{1}{2}}[1 + \mu n^2\, 2\pi s\, e^{2\pi sn\,(A+nL\eta)}]\,. \tag{55'}$$

Si nous posons alors

$$r(0) \leqq \varepsilon \leqq \alpha$$

et

$$nL\varepsilon = \delta\,,$$

nous pouvons maintenant écrire l'inégalité majorante

$$r(2\pi s) \leqq r(0)\, \Theta(s)\, n^{\frac{1}{2}}[1 + \delta n^2\, 2\pi s\, e^{2\pi sn\,(A+nL\eta)}]\,. \tag{55''}$$

Soient maintenant données les grandeurs n, η, β, L et A. Ecrivons pour simplifier

$$q = \Theta(s)\, n^{\frac{1}{2}}[1 + \delta n^2\, 2\pi s\, e^{2\pi sn\,(A+nL\eta)}]\,. \tag{58}$$

La fonction $\Theta(s)$ tend vers 0 quand s tend vers l'infini positif. Prenons $s = S$ suffisamment grand pour que

$$\Theta(S)\, n^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} < 1\,, \tag{59}$$

où p est un nombre quelconque supérieur à 1. La grandeur S tirée de (59) peut s'exprimer en fonction des grandeurs

$$p, n, A, \beta.$$

Nous déterminerons δ par l'égalité

$$\delta n^2\, 2\pi S\, e^{2\pi S n(A+nL\eta)} = p - 1. \tag{60}$$

Il est alors évident que le multiplicateur vérifie $q < \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1.$ c.q.f.d.

Pour démontrer le théorème fondamental de notre travail, il nous est indispensable d'utiliser encore une propriété évidente du système d'équations différentielles (4).

Soit

$$\{\varphi_j(t)\} \tag{61}$$

une solution quelconque du système (4) satisfaisant aux conditions initiales

$$\varphi_j(0) = a_j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

et continue dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq 2\pi s$.

Les seconds membres du système (4) sont tels que, à ces conditions initiales corresponde une solution et une seule du système, à savoir (61).

Posons

$$\varphi_j(2\pi s) = b_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Soit les grandeurs b_j $(j = 1, \ldots, n)$ telles que le système (4) ait dans l'intervalle $2\pi s \leqq t \leqq 4\pi s$ une solution unique $\{\psi_j(t)\}$ satisfaisant aux conditions initiales

$$\psi_j(2\pi s) = a_j, \qquad j = 1, \ldots, n;$$

il est alors évident que

$$\psi_j(4\pi s) = b_j, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{62}$$

§ 5.

En nous basant sur la propriété que nous venons de rappeler et sur le lemme III, il est facile de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME I. *Chaque solution* $\{z_j(t)\}$ *du système* (4) *correspondant à la solution périodique* $\{\varphi_j(t)\}$ *de classe* $H(\beta, \bar{g})$ *du système* (1) *et telle que* $r(0) < \min(\alpha, \gamma)$ *où*

$$\gamma = \frac{1 - \Theta(S) n^{\frac{1}{2}}}{2\pi n^{\frac{7}{2}} LS\, \Theta(S)\, e^{2\pi n S(A+\eta L n)}}, \tag{63}$$

tend asymptotiquement vers 0 *quand* t *tend vers l'infini positif.*

Démonstration. Si $\{z_j(t)\}$ est une solution du système (4) satisfaisant à (63), le lemme III permettrait d'écrire

$$r(2\pi S) \leqq q\, r(0), \qquad q < 1. \tag{56}$$

Soit

$$z_j(2\pi S) = b_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

on a alors d'après (62)

$$z_j(4\pi S) = v_j(2\pi S), \qquad j = 1, \ldots, n,$$

où $\{v_j(t)\}$ est une solution du système (4) satisfaisant aux conditions initiales

$$v_j(0) = b_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Mais

$$\Sigma_{k=1}^{n} v_k^2(0) = \Sigma_{k=1}^{n} z_k^2(2\pi S) = r^2(2\pi S) < r^2(0) q^2. \tag{64}$$

Appliquons le lemme III à la solution $\{v_j(t)\}$ il vient

$$\sqrt{\Sigma_{j=1}^{n} v_j^2\,(2\pi S)} = r(4\pi S) < q\sqrt{\Sigma_{j=1}^{n} v_j^2(0)}$$

ou, d'après (64),

$$r(4\pi S) < r(0) q^2.$$

Par un raisonnement analogue nous pouvons nous assurer que

$$r(2\pi S m) < r(0) q^m, \tag{65}$$

où m est un nombre entier positif. Puisque $q < 1$ il résulte de (65) que

$$\lim_{t \to +\infty} r(t) = 0,$$

c.q.f.d.

§ 6.

Soit maintenant le système d'équations différentielles (1) satisfaisant aux conditions I, II et III et soit le domaine $\bar{g} \subset \mathfrak{G}$. Nous calculons les quantités η, L, n, et A et prenons un nombre quelconque $\beta > 0$. Examinons les solutions périodiques de classe $H(\beta, \bar{g})$ du système (1).

Nous pouvons écrire le théorème suivant:

THÉORÈME II. *Le nombre de solutions périodiques différentes* *de classe $H(\beta, \bar{g})$ ne peut pas dépasser le nombre $\frac{U}{v}$ où U est le volume du domaine $\mathfrak{G}$ et v le volume de la sphère à n dimensions de rayon ε où*

$$\varepsilon = \min(\alpha, \gamma). \tag{66}$$

La démonstration du théorème est évidente.

Dans ce travail nous avons donné une évaluation du nombre des solutions périodiques de classe $H(\beta, \bar{g})$ du système (1) quand les fonctions X_j sont des fonctions explicites du temps t.

Le cas où les fonctions X_j ne dépendent pas explicitement du temps diffère de celui que nous avons étudié: un des exposants caractéristiques du système d'équations aux variations est toujours nul.

Dans ce cas toutefois, comme l'ont montré Andronoff et Witt [8]), les solutions périodiques du système (1) seront stables au sens de Liapounoff si tous les autres exposants caractéristiques ont une partie réelle < 0. C'est pourquoi le problème de l'évaluation du domaine de stabilité et, par suite, de l'évaluation du nombre de solutions périodiques de classe correspondante, peut être rangée dans ce cas. Nous avons l'intention de consacrer des recherches spéciales à ce problème.

Remarquons enfin que dans le but de simplifier les calculs nous avons employé quelquefois dans notre travail des procédés d'évaluation très sommaires. Aussi la formule (66) ne représente-t-elle qu'une évaluation très grossière (quantitativement).

J'exprime ici ma profonde reconnaissance à Monsieur A. A. Markoff qui m'a proposé ce problème.

Janvier 1937.

Institut de Mathématique et de Mécanique de l'Université de Leningrad.

(Reçu le 9 octobre 1937.)

---

[8]) A. Andronoff & Witt, Zur Stabilität nach Liapunow [Physik. Zeitschr. der Sowjetunion 4 (1933), 606—608].