ERNST SAS

Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 468-470
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__468_0>

Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen

von

Ernst Sas

Budapest

Wir beweisen im Folgenden die von Herrn L. Fejes herrührende Vermutung: *Es läßt sich in eine jede geschlossene konvexe Kurve mit dem Flächeninhalt T ein n-Eck einbeschreiben mit dem Flächeninhalt:*

$$T_n \geqq \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} T,$$

wobei sich diese Schranke nur im Falle einer Ellipse nicht verbessern läßt.

Daraus folgt, daß dies auch für eine beliebige Jordansche Kurve gilt, wenn man statt eines einbeschriebenen n-Ecks ein n-Eck betrachtet, dessen sämtliche Ecken auf der Kurve liegen.

Hier folge der Beweis!

Wir legen unseren Betrachtungen ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde, dessen x-Achse mit der größten Sehne (evtl.: einer der größten Sehnen) der gegebenen konvexen Kurve zusammenfalle; der Anfangspunkt liege dabei in der Mitte dieser Sehne.

Nun läßt sich die Kurve durch die Gleichungen

$$x = \cos t, \ \ y = e(t) \sin t$$

repräsentieren, wobei $e(t)$ außer in den Punkten $t = 0$, $t = \pi$ eine stetige, eindeutige, positive, nach 2π periodische Funktion mit beschränkter Schwankung von t bedeute. Es gilt ferner:

$$\lim_{h \to 0} e(h)\, h = 0, \ \lim_{h \to 0} e(\pi - h)\, h = 0.$$

Dabei haben wir als Einheit die Hälfte der größten Sehne gewählt.

Schreiben wir nun in die Kurve ein n-Eck mit den zu $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$ gehörenden Ecken, so ist das Inhaltsmaß dieses n-Eckes

$$T_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e(t_i) \sin t_i (\cos t_{i-1} - \cos t_{i+1}),$$

wobei $t_0 = t_n$, $t_{n+1} = t_1$.

Setzen wir nun

$$t_1 = t,\ t_2 = t + \frac{2\pi}{n}, \ldots, t_n = t + (n-1)\frac{2\pi}{n},$$

so gilt:

$$T_n(t) = T_n\left(t, t + \frac{2\pi}{n}, \ldots, t + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= \sin \frac{2\pi}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e\left(t + i\frac{2\pi}{n}\right) \sin^2 \left(t + i\frac{2\pi}{n}\right).$$

Es gilt aber ferner:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_n(t)dt = \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} \int_0^{2\pi} e(t) \sin^2 t\, dt = \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} T.$$

Es gibt daher einen Wert $t = t_0$ derart, daß

$$T_n(t_0) \geqq \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} T.$$

Jetzt fehlt nur noch der Nachweis, daß falls die Kurve keine Ellipse ist, immer das $>$ Zeichen stehen darf.

Ist $T_n(t)$ keine Konstante, so gibt es wegen der Stetigkeit von $T_n(t)$ sicher einen Wert t_0 mit $T_n(t_0) > \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} T$.

Doch kann $T_n(t)$ eine Konstante sein, ohne daß $e(t)$ selber eine Konstante ist. In diesem Falle können wir folgendermaßen verfahren [1]).

Setzen wir voraus, daß in jeder Umgebung von

$$t_1 = t,\ t_2 = t + \frac{2\pi}{n}, \ldots, t_n = t + (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

die Ungleichung $T_n(t_1, t_2, \ldots, t_n) \leqq T_n(t)$ gilt. Dann läßt sich — wie leicht einzusehen ist — in jedem zu t gehörigen Punkt der Kurve eine Stützgerade angeben, welche parallel mit derjenigen Sehne ist, welche durch die zu $t - \frac{2\pi}{n}$, $t + \frac{2\pi}{n}$ gehörigen Punkte der Kurve geht. Daraus folgt aber, daß die Kurve in jedem Punkt eine stetig veränderliche Tangente besitzt und daß gilt:

[1]) Diesen Teil des Beweises hat mir L. Fejes mitgeteilt.

$$y'(t) = \frac{y\left(t+\frac{2\pi}{n}\right) - y\left(t-\frac{2\pi}{n}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{n}}.$$

Mithin besitzt $y(t)$ in diesem Fall eine stetige Ableitung von beschränkter Schwankung. Entwickeln wir nun $y(t)$ in eine Fouriersche Reihe:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kt - a_k \sin kt) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\frac{2\pi}{n}}{\sin\frac{2\pi}{n}} (b_k \cos kt - a_k \sin kt).$$

Daraus ergibt sich aber: $a_k = b_k = 0$ für $k \geqq 2$, d.h.

$$y(t) = e(t) \sin t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t.$$

Dies ist aber wegen $y(0) = y(\pi) = 0$ nur dann möglich, falls $e(t) = b_1$ ausfällt, also nur wenn die Kurve eine Ellipse ist.

Nun können wir unser Ergebnis folgendermaßen zusammenfassen. Man schlage um die größte Sehne der Kurve als Durchmesser einen Kreis und konstruiere eines der einbeschriebenen regulären n-Ecke. Dann projiziere man die Eckpunkte senkrecht zu der größten Sehne auf die Kurve. Dadurch erhalten wir ein in die Kurve einbeschriebenes n-Eck. Haben die so konstruierten n-Ecke nicht alle dasselbe Inhaltsmaß, so gibt es unter diesen n-Ecken sicher eins mit dem Flächeninhalt

$$T_n > \frac{n}{2\pi} \sin\frac{2\pi}{n} T.$$

Besitzen dagegen die soeben konstruierten n-Ecke sämtlich dasselbe Inhaltsmaß und folglich das Inhaltsmaß $\frac{n}{2\pi} \sin\frac{2\pi}{n} T$, so gibt es unter diesen n-Ecken — falls die Kurve keine Ellipse ist — wenigstens eins, dessen Flächeninhalt sich durch die Verschiebung eines passend gewählten Eckpunktes vergrößern läßt.

(Eingegangen den 17. Oktober 1938.
Abgeändert eingegangen den 23. November 1938.)