COMPOSITIO MATHEMATICA

E. MAKAI

Über eine Eigenwertabschätzung bei gewissen homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 368-374

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__368_0>

Über eine Eigenwertabschätzung bei gewissen homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

von

E. Makai

Budapest

Es ist bekannt, daß der n-te Eigenwert λ_n der Differentialgleichung

$$y'' + \lambda\varrho(x)y = 0 \qquad (\varrho(x) \geqq 0) \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{2}$$

der Bedingung

$$\lambda_n \leqq \frac{n^2}{\varrho_{\min}} \tag{3}$$

unterworfen ist [1]). Diese Abschätzung ist in einigen Fällen wenig wertvoll, z.B. dann, wenn $\varrho_{\min}$, der kleinste Wert von $\varrho(x)$ im betrachteten Intervalle, gleich 0 wird. In diesem Falle hat die Abschätzung (3) keinen Sinn.

Es sei im Folgenden gezeigt, daß sich die Abschätzung (3) erheblich verbessern läßt, falls die Funktion $\varrho(x)$ eine überall negative zweite Ableitung besitzt. Wir beweisen den Satz:

Es sei $\varrho(x)$ eine beliebige nicht negative Funktion, welche für $a \leqq x \leqq b$ eine stückweise stetige durchweg negative zweite Ableitung $\varrho''(x) < 0$ besitzt. Dann gilt für den n-ten Eigenwert λ_n der Differentialgleichung

$$y''(x) + \lambda\varrho(x)y(x) = 0$$

mit den Randbedingungen $y(a) = y(b) = 0$ die Ungleichung

$$\lambda_n < \left(\frac{\pi n}{\int_a^b \sqrt{\varrho(x)}dx}\right)^2, \tag{4}$$

[1]) Siehe z.B. Courant-Hilbert: Methoden der math. Physik. Erste Auflage, S. 334.

wobei sich die Konstante π durch keine kleinere ersetzen läßt.

Es sei zugleich bemerkt, daß dies für eine beliebige Funktion $\varrho(x)$ nicht mehr gilt. Doch werden wir im Laufe des Beweises sehen, daß unser Ergebnis sich verallgemeinern läßt.

Diesem Satz wollen wir noch eine andere Gestalt geben, die dem Wesen der Dinge näherkommt: bei den obigen Bedingungen *bleibt die Quadratwurzel des Koeffizienten von y in* (1), *d.h.* $\sqrt{-\frac{y''}{y}}$ *integriert im Intervalle* (a, b), *unter der Schranke* $n\pi$. *Also, wenn*

$$J(\lambda) = \int_a^b \sqrt{-\frac{y''}{y}}\,dx = \int_a^b \sqrt{\lambda\varrho(x)}\,dx \tag{5}$$

ist, so besteht die Beziehung

$$J(\lambda_n) < n\pi. \tag{6}$$

Noch vor dem eigentlichen Beweis werden wir zeigen, daß wenn wir die Ungleichung (6) für das Intervall $(0, \pi)$ bestätigen können, sie für beliebige Intervalle gültig sein wird. In der Tat, wenn wir eine neue Veränderliche

$$\xi = \pi\frac{x-a}{b-a} \tag{7}$$

einführen, die das Intervall (a, b) mittels einer linearen Transformation auf das Intervall $(0, \pi)$ abbildet, so bleibt das Integral (5) invariant. Denn die Gleichung (1) transformiert sich in

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \lambda\varrho\left(\frac{b-a}{\pi}\,\xi + a\right)y = 0,$$

und es wird

$$J^*(\lambda) = \int_0^\pi \sqrt{-\frac{d^2y}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{y}}\,d\xi$$

sein. Dieses Integral läßt sich mit der Transformation (7) auf das Integral (5) zurückführen; denn es ist

$$J^*(\lambda) = \int_a^b \sqrt{-\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2\cdot\frac{1}{y}}\,\frac{d\xi}{dx}\,dx = \int_a^b \sqrt{-\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{1}{y}}\,dx, \tag{8}$$

also es gilt: $J^*(\lambda) = J(\lambda)$.

Die Bedingung $\varrho'' < 0$ ändert sich ebenfalls nicht, da

$$\frac{d^2\varrho}{dx^2} = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 \frac{d^2\varrho}{d\xi^2} \tag{9}$$

ist.

Jetzt normieren wir noch die Funktion $\varrho(x)$. Diese Bedingung beschränkt — wie leicht zu sehen ist — die Allgemeinheit garnicht. Wir setzen weiterhin voraus, daß

$$\int_0^\pi \sqrt{\varrho(x)}\, dx = \pi \tag{10}$$

ausfällt, und beweisen den Satz zunächst für den Fall $n = 1$, $a = 0$, $b = \pi$. Wir haben daher zu zeigen ((Gl. (5), (6), (10)), daß der erste Eigenwert in diesem Fall kleiner als 1 sein muß. Daraus folgt aber — indem wir die Differentialgleichung (1) als Variationsproblem auffassen — daß bei gewissen Beschränkungen bezüglich der Funktion $\varrho(x)$ das absolute Minimum von $Q(Y) = \left(\int_0^\pi Y'^2\, dx\right) \Big/ \left(\int_0^\pi \varrho Y^2\, dx\right)$ kleiner als 1 ausfällt, für eine an den beiden Enden des Intervalles $(0, \pi)$ verschwindende, übrigens aber beliebig gewählte stetige Funktion $Y(x)$ mit stückweise stetiger erster und zweiter Ableitung.

Der Gang des Beweises wird jetzt der folgende sein: wir suchen eine Funktion $Y(x)$, die die erste Eigenfunktion einigermaßen approximiert und untersuchen, unter welchen Umständen der Quotient $Q(Y)$ kleiner als 1 ausfällt. Da der zur ersten Eigenfunktion gehörige Quotient $Q(y_1) = \lambda_1$ *noch kleiner* ist, so können wir behaupten, daß der erste Eigenwert a fortiori kleiner als 1 ist. Dann werden wir jene Umstände, die die Mannigfaltigkeit der wählbaren Funktionen $\varrho(x)$ beschränken, diskutieren.

Als approximierende Funktion nehmen wir

$$Y = \sin z, \tag{11}$$

wo

$$z = \int_0^x \sqrt{\varrho(x)}\, dx \tag{12}$$

ist. Da nach (10) und (12) $z(0) = 0$ und $z(\pi) = \pi$ ist, so ist es klar, daß $Y(x)$ die Randbedingungen erfüllt. Da aber auch $Y(x)$ im Intervalle $(0, \pi)$ nirgends verschwindet, können wir sie als Approximation der *ersten* Eigenfunktion betrachten.

Jetzt fragen wir: wie muß man $\varrho(x)$ wählen, damit der Zähler von $Q(Y)$ kleiner als der Nenner sei, wenn $Y = \sin z$ gesetzt wird? Das heißt, wann wird die Größe

$$K = \int_0^\pi (\sin z)'^2\, dx - \int_0^\pi \varrho(x)(\sin z)^2\, dx$$

negativ sein? Zu diesem Zwecke formen wir diese letzte Gleichung um. Nach Ausführung der Differentiation erhalten wir

$$K = \int_0^\pi \varrho(x) \cdot (\cos^2 z - \sin^2 z)\, dx = \int_0^\pi \varrho(x) \cdot \cos 2z\, dx,$$

da nach (12) $\frac{dz}{dx} = \sqrt{\varrho(x)}$ ist. Jetzt führen wir anstatt x eine neue Veränderliche z ein; da $\varrho(x)$ höchstens in 0 und π verschwinden kann, ist z eine monotone Funktion von x. Es soll

$$\sqrt{\varrho(x)} = f(z(x))$$

sein. Dann wird

$$K = \int_0^\pi f(z) \cos 2z\, dz.$$

Da aber

$$\cos 2z = -\cos 2\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = -\cos 2\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos 2(\pi - z)$$

ist, können wir nach einer leichten Umformung schreiben:

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f(z) - f\left(\frac{\pi}{2} - z\right) - f\left(\frac{\pi}{2} + z\right) + f(\pi - z)\right] \cos 2z\, dz. \quad (13)$$

Die Negativität dieses Ausdruckes ist eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung dafür, daß der erste Eigenwert kleiner als 1 ausfalle. Wann wird dies vorkommen? Sicherlich dann, wenn im Integral die Funktion in den eckigen Klammern im Intervalle $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ durchweg negativ ist. Hinreichende Bedingung dafür ist wiederum, daß die Funktion $f(z)$ im Intervalle $(0, \pi)$ von unten konkav sei. Wenn nämlich

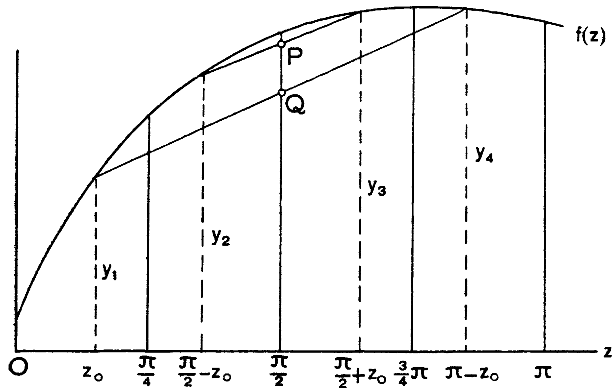
$$\begin{aligned} y_1 &= f(z) \\ y_2 &= f\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \\ y_3 &= f\left(\frac{\pi}{2} + z\right) \\ y_4 &= f(\pi - z) \end{aligned}$$

ist, so ist in (13) der Ausdruck in den eckigen Klammern gleich

$$2\left(\frac{y_1 + y_4}{2} - \frac{y_2 + y_3}{2}\right).$$

Nun sind $\frac{y_1 + y_4}{2}$ und $\frac{y_2 + y_3}{2}$ die Ordinaten der Punkte Q, bzw. P.

Es ist leicht einzusehen, daß Q immer unter P liegt, wenn $f(z)$



von unten konkav ist.

Also können wir behaupten, daß, wenn $\frac{d^2 f(z)}{dz^2} < 0$ ist, der erste Eigenwert im Intervalle $(0, \pi)$ kleiner ist als 1. Was bedeutet aber die Negativität dieses zweiten Differentialquotienten? Um das zu beantworten, führen wir die alte anschaulichere Koordinate x und die Funktion $\varrho(x)$ wieder ein. So erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{1}{2\sqrt{\varrho(x)}}\,\frac{d^2}{dx^2}\log\varrho(x) = \frac{1}{2\varrho^{\frac{3}{2}}}\begin{vmatrix}\varrho & \varrho' \\ \varrho' & \varrho''\end{vmatrix}.$$

Die rechte Seite muß also negativ sein. Das Vorzeichen der rechten Seite hängt aber vom Vorzeichen der Determinante ab. Es wird immer negativ sein, wenn ϱ positiv und $\varrho'' < 0$ ist, also die Funktion $\varrho(x)$ von unten konkav ist. Wir sehen aber gleichzeitig, daß zum Bestehen des Satzes anstatt $\varrho'' < 0$ die mildere Voraussetzung

$$\begin{vmatrix}\varrho & \varrho' \\ \varrho' & \varrho''\end{vmatrix} < 0 \tag{14}$$

genügt.

Bisher haben wir also bewiesen: *wenn die Funktion* $\varrho(x)$ *in einem gewissen Intervalle positiv und der Bedingung* (14) *unterworfen ist* [2]) *und* a, b *zwei in diesem Intervall liegende benachbarte*

[2]) Eigentlich haben wir den Satz bei der Bedingung (14) nur für das Intervall $(0, \pi)$ bewiesen. Es läßt sich aber zeigen, daß das Vorzeichen der Determinante (14) ebenso invariant gegen einer linearen Transformation (7) ist, wie das Vorzeichen der zweiten Ableitung von ϱ. Beide Größen werden nämlich bei durchgeführter Transformation mit der positiven Größe $\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2$ multipliziert. (Siehe Formel (9)). Daraus folgt aber der Satz für beliebige Intervalle (a, b).

Nullstellen von y, der Lösung von (1), *sind, so gilt die Beziehung*

$$\int_a^b \sqrt{\lambda\varrho(x)}\, dx < \pi. \tag{15}$$

Daraus folgt aber gleich (6) mit beliebigem n. Es sei nämlich y_n die n-te Eigenfunktion im Intervalle (a, b). Sie besitzt also $n - 1$ Nullstellen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ zwischen a und b, die das Intervall in n Teile zerlegen. In jedem dieser Teilintervalle ist y_n die erste Eigenfunktion mit dem Eigenwerte λ_n. So gilt für jede dieser Teilintervalle die Ungleichung (15). Es ist also

$$n\pi > \sum_{i=0}^{n=1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \sqrt{\lambda_n \varrho(x)} dx = \int_a^b \sqrt{\lambda_n \varrho(x)} dx = J(\lambda_n)$$

wo $a = a_0$, $b = a_n$ gesetzt worden ist.

Jetzt können wir uns noch von der Bedingung der Nichtnegativität von $\varrho(x)$ befreien, wenigstens für von unten konkave Funktionen $\varrho(x)$. Von unten aus konkave Funktionen, die in der Mitte des Intervalles positiv sind, können an einem oder an beiden Enden des Intervalles schon negativ werden. Wir können auch diesen Fall leicht diskutieren auf Grund des Courantschen Prinzips der „Milderung der Bedingungen". Es sei nämlich eine Funktion $\varrho(x)$ gegeben, welche im Intervalle (a, b) endlich bleibt. In einem Teilintervalle (a', b') soll diese Funktion positiv sein und die Bedingung (14) erfüllen. Dann gilt: der n-te Eigenwert λ'_n im Intervalle (a', b') ist größer, als der n-te Eigenwert λ_n im Intervalle (a, b). Aber es gilt im Intervalle (a', b') der eben bewiesene Satz

$$\int_{a'}^{b'} \sqrt{\lambda'_n \varrho(x)} dx < n\pi,$$

also es gilt im ganzen Intervalle

$$\int_a^b \Re\sqrt{\lambda_n \varrho(x)} dx = \int_{a'}^{b'} \sqrt{\lambda_n \varrho(x)} dx < n\pi, \tag{16}$$

wo $\Re$ den Realteil bedeutet.

Wir zeigen noch, daß in (6) die obere Schranke $n\pi$ nicht durch eine kleinere ersetzt werden kann. Setzen wir nämlich den Grenzfall $\varrho(x) \equiv 1$, so ist in jedem Intervall (a, b) das Integral $J(\lambda_n) = n\pi$. Da wir aber die Funktion $\varrho(x) \equiv 1$ mit von unten aus konkaven Funktionen beliebig annähern können, wird für diese Funktionen $J(\lambda_n)$ beliebig nahe $n\pi$ kommen.

Bei diesem Beispiel gilt statt der Ungleichung (4) die Gleichung

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\int\limits_a^b \sqrt{\varrho(x)}\,dx}\right)^2. \tag{4'}$$

Darüber hinaus kann man aber sogar ein Beispiel finden, in dem $\varrho(x) > 0$ ist und doch für alle n gilt

$$\lambda_n > \left(\frac{\pi n}{\int\limits_a^b \sqrt{\varrho(x)}\,dx}\right)^2. \tag{4''}$$

Es handelt sich um die Differentialgleichung

$$y'' + \frac{\lambda}{x^2} y = 0$$

mit den Randbedingungen

$$y(1) = y(e^{m\pi}) = 0 \qquad (m>0).$$

Die n-te Eigenfunktion ist

$$y_n = \sqrt{x} \sin\left(\frac{n}{m} \log x\right),$$

der n-te Eigenwert

$$\lambda_n = \frac{n^2}{m^2} + \frac{1}{4};$$

ferner gilt

$$\int\limits_a^b \sqrt{\varrho(x)}\; dx = \int\limits_1^{e^{m\pi}} \frac{dx}{x} = m\pi,$$

so daß man für die rechte Seite von (4″)

$$\left(\frac{\pi n}{m\pi}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2}$$

erhält, was in der Tat $< \lambda_n$ ist. [3])

Wir haben hier bewiesen, daß die Größe $J(\lambda_n)$ für gewisse Klassen der Funktion $\varrho(x)$ eine obere Schranke $n\pi$ besitzt. Es läßt sich die Vermutung aussprechen, daß $J(\lambda_n)$ für dieselben Funktionen $\varrho(x)$, die untere Schranke $\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ besitzt.

(Eingegangen den 5. Dezember 1938.)

[3]) Dieser Absatz ist nachträglich (19.12.1938) eingegangen.