COMPOSITIO MATHEMATICA

JULIUS WOLFF

# L'équation différentielle $\frac{dz}{dt} = w(z) =$ fonction holomorphe à partie réelle positive dans un demi-plan

*Compositio Mathematica*, tome 6 (1939), p. 296-304
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__296_0>

# L'équation différentielle $\frac{dz}{dt} = w(z) =$ fonction holomorphe à partie réelle positive dans un demi-plan

par

Julius Wolff
Utrecht

---

Soit $w(z) = u(z) + iv(z)$ une fonction holomorphe de la variable complexe $z = x + yi$ dans le demi-plan $D(x > 0)$ et $u(z) > 0$, $t$ une variable réelle (le temps). Posons, $h$ étant un nombre fini positif,

$$z_1 = z + hw(z),\ z_{n+1} = z_n + hw(z_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

et considérons le polygone $zz_1z_2 \ldots h$ tendant vers zéro, ce polygone tend vers la trajectoire définie, *pour* $t > 0$, par l'équation différentielle $\frac{dz}{dt} = w(z)$. C'est pourquoi l'étude de ces trajectoires $T(z)$ est appelée „*itération continue*" dans une note au C. R. du 23 mai 1938, où quelques propriétés des $T(z)$ sont indiquées sans démonstration. Répétons ici la remarque que dans l'itération $z_{n+1} = z_n + hw(z_n)$ un point $z_{n+1}$ peut avoir plusieurs antécédents $z_n$, tandisque $T(z)$ est définie sans ambiguité, pour $t < 0$ comme pour $t > 0$, par un point initial $z$.

## 1.

$z_t = x_t + iy_t$ étant la position au temps $t$ du point qui au temps $t = 0$ occupait la position $z$ on a

$$\frac{dw(z_t)}{dt} = w'(z_t)w(z_t).$$

En vertu de l'inégalité $|w'(z_t)| \leqq \frac{u(z_t)}{x_t} = \frac{1}{x_t}\frac{dx_t}{dt}$ (1)

nous trouvons $\left|\frac{d \log w(z_t)}{dt}\right| \leqq \frac{d \log x_t}{dt}$, d'où

Théorème I. $\frac{|w(z_t)|}{x_t}$ *et* arg $w(z_t) - \log x_t$ *sont des fonctions non-croissantes,* $x_t |w(z_t)|$ *et* arg $w(z_t) + \log x_t$ *sont des fonctions non-décroissantes de* $t$.

## 2. Les $T(z)$ pour $t \to +\infty$.

*Premier cas.*

Il existe une $T(z)$ ayant à droite une asymptote $x = c$. Parceque $x_t$ est une fonction harmonique du point initial $z$, qui croît avec $t$, on voit que chaque $T(z)$ possède à droite une asymptote verticale. Posons $c(z) = \lim_{t\to+\infty} x_t$. La fonction harmonique positive $c(z) - x$ tend vers zéro sur chaque $T(z)$ pour $t \to +\infty$. Elle tend donc uniformément vers zéro pour $y \to +\infty$ (ou $-\infty$) dans toute bande $0 < \varepsilon \leqq x \leqq \frac{1}{\varepsilon}$. Par conséquent $c(z)$ prend toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$.

Du théorème I résulte que $w(z_t)$ tend pour $t \to +\infty$ vers une limite $a(z) + ib(z)$, fonction holomorphe dans $D$, différente de zéro. Cette fonction étant constante sur chaque $T(z)$, elle est une constante $a + ib$ dans $D$. Et parceque $\lim_{t\to+\infty} \frac{dx_t}{dt} = a$, il faut que $a = 0$, donc $b \neq 0$. Quel que soit $z$ dans $D$, $y_t$ tend vers l'infini du signe de $b$.

Considérons une trajectoire $T(z_0)$ et son asymptote à droite $x = c$. Pour fixer les idées supposons $b > 0$. On a sur $T(z_0)$

$$\int_{z_0}^{\infty} u\, dy \backsim b \int_0^{\infty} u\, dt = b(c - z_0),$$

donc $\int^{+\infty} udy < \infty$ sur $T(z_0)$.

Soit $d > c$, alors l'inégalité

$$\frac{u(z)}{x} \geqq \frac{u(z+h)}{z+h},$$

valable pour tout point $z$ de $D$, quelque soit le nombre positif $h$, entraîne

$$\frac{u(x_t + iy_t)}{x_t} \geqq \frac{u(d + iy_t)}{d},$$

donc $\int^{\infty} u(d+iy)dy$ converge pour $d \geqq c$. Ce résultat étant valable pour chaque valeur positive de $c$, on conclut que $\int^{\infty} u\, dy$ converge uniformément sur tout ensemble de droites $x = d$, $0 < \varepsilon \leqq d \leqq \frac{1}{\varepsilon}$. Appelons un tel ensemble $B(\varepsilon)$.

Inversement: supposons $\int^{\infty} udy$ convergente sur une droite $x = c > 0$ et soit $d > c$. L'inégalité (2) permet de conclure que cette intégrale converge sur la droite $x = d$. Et des relations, valables pour $q > p > 0$,

$$|w(d+qi) - w(d+pi)| = \left| \int_p^q w'_y(d+yi)dy \right| \leqq$$
$$\leqq \int_p^q \frac{u(d+yi)}{d} dy \leqq \int_p^q \frac{u(c+yi)}{c} dy$$

il résulte que $w$ tend, pour $y \to +\infty$, vers une limite finie sur la droite $x = d$, donc uniformément sur tout ensemble $B(\varepsilon)$. Or la convergence de $\int^{\infty} udy$ exige que la limite de $u$ soit égale à zéro, donc $\lim_{y\to+\infty} w(x+yi) = bi$, $b$ constant. Si $b > 0$, je dis que chaque $T(z)$ possède une asymptote verticale à droite. En effet, considérons l'ensemble des $T(z)$ à points initiaux $z = x_0 + iy$, $x_0 > 0$ et fixe. Soit $x = d > x_0$ une droite qui coupe toutes ces $T(z)$. Alors, si $x(t)$ atteint la valeur $d$ après un temps $t(y)$

$$d - x_0 = \int_0^{t(y)} \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{z_{t(y)}} \frac{u(z_t)dz_t}{w(z_t)}.$$

Parceque $b > 0$, $y_t$ croît avec $t$ dans l'intervalle $0 \leqq t \leqq t(y)$, pourvu que $y$ soit assez grand. Donc, $y$ tendant vers $+\infty$, la dernière intégrale est équivalente à $\int_z^{z_{t(y)}} \frac{u(z_t)}{b} dy_t$, et celle-ci tend vers zéro, conséquence de (2) et de la convergence de $\int^{\infty} u\,dy$ sur la droite $x = c$. On en conclut que pour $y$ suffisamment grand $T(z)$ n'atteint pas la droite $x = d$, par suite elle possède une asymptote verticale à droite. Donc toutes les $T(z)$ en ont une.

Théorème II. *Condition nécessaire et suffisante pourqu'une $T(z)$ ait une asymptote verticale à droite (ce qui entraîne que toutes les autres en ont une) est la convergence de $\int^{\infty} u\,dy$ ou de $\int_{-\infty} u\,dy$ sur une droite verticale dans $D$ (ce qui entraîne la convergence sur toutes les autres) et que la limite $b$ de $v(x+iy)$ pour $x > 0$, $y \to +\infty$ ou $-\infty$ respectivement, dont l'existence est assurée par cette convergence, soit positive ou négative respectivement. Alors pour $t \to +\infty$ $y_t$ tend vers l'infini du signe de $b$.*

*Deuxième cas.*

Quel que soit $z$ dans $D$, $\lim_{t\to+\infty} x_t = +\infty$.

**A.** Considérons d'abord le cas où la dérivée angulaire $\lambda$ de $w(z)$ à l'infini est positive. Alors

$$\frac{dz}{dt} = w(z) = \lambda z + \omega(z), \quad \Re(\omega(z)) = u_1(z) \geqq 0, \tag{3}$$

donc
$$\frac{dz_t}{dt} \geqq \lambda x_t. \tag{4}$$

Conséquence du théorème I est que sur chaque $T(z)$ la fonction $\frac{1}{x_t}\left|\frac{dy_t}{dt}\right|$ est bornée pour $t > 0$, donc en vertu de (4) $\left|\frac{dy_t}{dx_t}\right|$ est borné, donc $\left|\frac{y_t}{x_t}\right|$ aussi, par conséquent $\frac{w(z_t)}{z_t}$ tend pour $t \to +\infty$ vers $\lambda$. Or du théorème I et de (3) résulte que $\frac{|w(z_t)|}{x_t}$ tend vers un nombre $\mu(z) \geqq \lambda$, donc $\cos(\arg z_t)$ tend vers $\frac{\lambda}{\mu(z)}$. Par suite $\arg z_t$ tend vers un angle $\varphi(z)$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. La fonction harmonique bornée $\varphi(z) - \arg(z)$ tend sur les $T(z)$ vers zéro pour $x \to +\infty$, elle tend donc uniformément vers zéro dans chaque angle $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, d'où résulte que $\varphi(z)$ prend toutes les valeurs entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

En vertu de (4) $x_t e^{-\lambda t}$ croît avec $t$; à cause de (3) sa limite pour $t \to +\infty$ est finie ou, infinie selon la convergence ou divergence de l'intégrale [1])

$$\int^{\infty} \frac{u_1(z_t)}{x_t} dt \sim \frac{1}{\lambda} \int \frac{u_1 dx}{x^2} \text{ sur } T(z). \tag{5}$$

Si (5) converge sur une $T(z)$, elle converge sur toutes les autres et alors $z_t e^{-\lambda t}$ tend pour $t \to +\infty$ vers une fonction holomorphe et univalente $K(z)$ dans $D$, qui peut s'appeler fonction de Königs associée à l'itération continue. L'univalence de $K(z)$ est une conséquence de l'univalence des fonctions $z_t e^{-\lambda t}$. Des relations

$$\frac{dK(z)}{dz} = \lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} \frac{dz_t}{dt} = \lim_{t \to +\infty} e^{-\lambda t} \frac{w(z_t)}{w(z)} =$$
$$= \frac{\lambda}{w(z)} \lim_{t \to +\infty} z_t e^{-\lambda t} = \frac{\lambda}{w(z)} K(z)$$

on conclut
$$\frac{dK(z_t)}{dt} = K'(z_t) w(z_t) = \lambda K(z_t) \tag{6}$$

d'où
$$K(z_t) = K(z) e^{\lambda t} \tag{7}$$

et
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{K(z_t)}{z_t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{K(z)}{z_t e^{-\lambda t}} = 1. \tag{8}$$

(8) permet de conclure que la dérivée angulaire de $K(z)$ à l'infini est égale à l'unité. $K(z)$ représente $D$ conformément sur un domaine partiel de $D$, tel que les images des $T(z)$ sont des demi-droites $\arg K = \text{const.}$, $|K| > m(z) \geqq 0$, où $m(z)$ est positif ou nul, selon que $z_t$ atteint la frontière de $D$ à un temps négatif fini ou infini.

---

[1]) A la page 1547 de la note citée ci-dessus se trouve une erreur au no. 3.

Que l'intégrale (5) soit convergente ou non, une fonction de Königs ayant toutes les propriétés de $K(z)$ trouvées ci-dessus, sauf (8), existe toujours. Fixons dans $D$ un point quelconque $\alpha$. La fonction $\frac{z_t}{\alpha_t}$ tend pour $t \to +\infty$ vers $e^{h\lambda}$ au point $z_h$, $0 \leqq h < \infty$. Elle converge donc vers une fonction holomorphe et univalente dans $D$. Donc $\lim_{t\to+\infty} \frac{z_t}{|\alpha_t|}$ est une fonction $k(z)$ ayant les propriétés de $K(z)$, sauf (8). Sa dérivée angulaire à l'infini est nulle ou positive selon la divergence ou convergence de (5).

Théorème III. *Si la dérivée angulaire $\lambda$ de $w(z)$ à l'infini est positive, alors sur chaque $T(z)$ l'argument de $z_t$ tend pour $t \to +\infty$ vers une limite $\varphi(z)$ variant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Il existe une fonction $k(z)$ de Königs satisfaisant à* (6) *et* (7) *et représentant $D$ sur un domaine partiel de $D$, tel que les $T(z)$ deviennent des demi-droites d'arguments $\varphi(z)$. La dérivée angulaire de $k(z)$ à l'infini est positive ou nulle selon la convergence ou divergence de l'intégrale* (5).

**B.** $\lambda = 0$. Supposons qu'une $T(z)$ existe sur laquelle $\frac{y_t}{x_t}$ est borné. Alors sur cette $T(z)$

$$\frac{d \log z_t}{dz} = \frac{w(z_t)}{z_t w(z)}$$

tend vers zéro; cette fonction tend donc vers zéro uniformément sur tout ensemble borné et fermé dans $D$, ce qui entraîne que, $\alpha$ et $\beta$ étant deux points quelconques dans $D$, $\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_t}{\alpha_t} = 1$. La fonction $zw(z)$ tend pour $z \to \infty$, $\frac{y}{x}$ borné vers une limite positive $\varrho$, qui peut être infinie. Supposons $\frac{y_t}{x_t}$ borné et $\varrho < \infty$. Alors pour $t \to +\infty : z_t\frac{dz_t}{dt} \to \varrho$, $z_t^2 \backsim 2\varrho t$, d'où $\arg z_t \to 0$.

Théorème IV. *Si la dérivée angulaire $\lambda$ de $w(z)$ à l'infini est nulle, et si sur une $T(z)$ $\frac{y_t}{x_t}$ est borné pour $t \to +\infty$, alors, $\alpha$ et $\beta$ étant deux points quelconques dans $D$, $\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_t}{\alpha_t} = 1$. Si en outre la limite angulaire de $zw(z)$ pour $z \to \infty$ est finie, alors sur chaque $T(z)$ $\arg z_t \to 0$ pour $t \to +\infty$.*

L'exemple

$$\frac{dz}{dt} = z^i + A, \quad A > \frac{\pi}{2}$$

montre que, malgré l'hypothèse $\frac{y_t}{x_t}$ borné, $\arg z_t$ peut ne pas tendre vers une limite.

## 3. Les $T(z)$ pour $t < 0$

Posons
$$\int_1^z \frac{dz}{w(z)} = \zeta(z) = \xi(z) + i\eta(z) \tag{9}$$

$\zeta(z)$ est univalente dans $D$. Elle représente $D$ sur un domaine $H$ tel que les $T(z)$ ont pour images des droites ou demi-droites $\eta$ const., selon que $z_t$ atteint la frontière de $D$ à un temps négatif infini ou fini.

On sait que sur toute droite $y$ const. la limite

$$\lim_{x\to 0} \eta(x+iy) = \eta(iy) = \psi(y) \tag{10}$$

existe et que $\eta(iy)$ est une fonction non-décroissante de $y$ satisfaisant à

$$2\psi(y) = \psi(y+0) + \psi(y-0) \tag{11}$$

De plus $\eta(z)$ est borné dans chaque rectangle $0 < x \leqq m < \infty$, $-m \leqq y \leqq m$.

A. Soit $ip$ un point de discontinuité de $\eta(iy)$. Alors $\xi(z)$ tend uniformément vers $-\infty$ pour $z \to ip$ dans tout angle $|\arg(z-ip)| \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, tandis que

$$\psi(p) + \frac{\psi(p+0)-\psi(p-0)}{\pi} \arg z - \eta(z)$$

tend uniformément vers zéro. Donc $H$ contient une bande $B$ s'étendant à gauche vers l'infini et dont la frontière a les asymptotes $\eta = \psi(p+0)$ et $\eta = \psi(p-0)$. Par conséquent $D$ contient un domaine $\varDelta$ composé de trajectoires $T(z)$ aboutissant au point $ip$ au temps $t = -\infty$ et toutes ces $T(z)$ ont en ce point une tangente dont le coefficient angulaire varie entre $-\infty$ et $+\infty$.

Soit $iq$ un point de continuité de $\eta(iy)$, ni point intérieur, ni extrémité d'un intervalle dans lequel $\eta$ est constant. Alors $H$ contient ou bien la droite $\eta = \eta(iq)$, $-\infty < \xi < \infty$, ou bien une demi-droite $\eta = \eta(iq)$, $h < \xi < \infty$. Dans le premier cas cette droite est aux deux côtés une asymptote de la frontière de $H$; dans le second cas cette frontière contient le point $h+i\eta(iq)$. Dans les deux cas une et une seule $T(z)$ aboutit en $iq$, dans le premier pour $t = -\infty$, dans le second pour $t$ négatif fini. Cherchons un critère pour les deux cas. Or, sur la $T(z)$ aboutissant en $iq$ $\zeta(z)$ tend pour $z \to iq$ vers une limite infinie dans le premier cas, finie dans le second. D'autre part on sait que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{v(x+iq)}{|w(x+iq)|^2}\, dx$$

converge. Donc sur la droite $y = q$ $\zeta(z)$ a pour $z \to iq$ une limite infinie ou finie selon la divergence ou convergence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{u(x+iq)}{|w(x+iq)|^2}\, dx. \tag{12}$$

La fonction $\zeta(z)$ ne pouvant pas tendre vers deux limites différentes sur deux courbes aboutissant en $iq$, (12) diverge dans le premier cas et converge dans le second.

Soit $ir$ un point intérieur à un intervalle $I(x=0,\ m<y<n)$ où $\eta$ est constant. La fonction $\zeta(z)$ étant prolongeable au delà de $I$, une $T(z)$, c'est à dire une courbe $\eta =$ const. *dans* $D$ ne peut aboutir en $ir$ que si $\zeta'(ir) = 0$, autrement dit: si $ir$ est un pôle de $w(z)$ et alors c'est un pôle simple, car autrement $u(z)$ prendrait des valeurs négatives dans $D$. Si $ir$ est un pôle de $w(z)$, une et une seule $T(z)$ y aboutit pour $t$ négatif fini dans la direction horizontale. $I$ contient au plus un seul tel point, car si $ir$ et $ir'$ en étaient deux consécutifs, les $T(z)$ entre celles qui aboutissent en $ir$ et $ir'$ ne pourraient pas atteindre la frontière à un temps négatif. Enfin soit $is$ une extrémité de $I$. Supposons $\eta(iy)$ continu en $is$, car le cas de discontinuité a été traité. La considération de l'image $H$ nous apprend: si sur $I$ $v(z) > 0$ au voisinage de $is$, alors, en vertu de $\frac{\delta\xi}{\delta y} = \frac{v}{|w|^2}$, $\xi$ croît avec $y$ dans ce voisinage, donc une seule $T(z)$ aboutit en $is$, si $s = n$ (à temps négatif fini) et aucune n'y aboutit, si $s = m$. Même énoncé si $v(z) < 0$ sur $I$ au voisinage de $is$, pourvu qu'on échange $m$ et $n$. [1])

Si $v(z)$ garde un signe constant sur $I$, alors $im$ ou $in$ est extrémité d'une $T(z)$. Si $v(z)$ change de signe sur $I$, c'est à dire si $I$ contient un pôle de $w(z)$, alors ni $im$, ni $in$ n'est extrémité d'une $T(z)$.

Théorème V. *A tout point de discontinuité $ip$ de $\eta(iy)$ sur la droite $x = 0$ il correspond un domaine $\Delta_p$ composé de trajectoires aboutissant à $ip$ pour $t \to -\infty$. Sur chacune l'argument de $z_t - ip$ tend vers une limite variant dans $\Delta_p$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et $w(z_t)$ vers zéro.*

*Tout point de continuité $iq$, qui n'est pas extrémité d'un intervalle*

[1]) A la page 1547 de la note citée se trouve une erreur au No. 4.

*$I$ où $\eta$ est constant, est point final d'une trajectoire pour $t$ fini et négatif ou pour $t \to -\infty$ selon la convergence ou divergence de l'intégrale* (12)*. Un point intérieur à un tel intervalle $I$ $(x=0, m<y<n)$ n'est pas extrémité d'une trajectoire, à l'exception d'un pôle éventuel de $w(z)$, qui est alors unique sur $I$, et une seule trajectoire y aboutit à tangente horizontale, pour $t$ fini et négatif. Si $\eta$ est continu en $m(n)$, alors $m(n)$ est extrémité d'une seule trajectoire ou d'aucune selon que $v(z)$ est négatif (positif) ou positif (négatif) sur $I$ au voisinage de $im$ $(in)$.*

**B.** Les $T(z)$ sur lesquelles $\lim_{t\to-\infty} z_t = \infty$.

D'abord la considération de l'image $H$ de $D$ apprend qu'une condition *nécessaire* pour l'existence d'une telle $T(z)$ (qui entraîne l'existence d'un domaine constitué de telles $T(z)$) est que $\eta$ soit borné supérieurement ou inférieurement sur la droite $x = 0$.

Il est clair que les $T(z)$ en question sont munies d'asymptotes verticales à gauche.

Un raisonnement presque identique à celui du No. 2 conduit au

Théorème VI. *Condition nécessaire et suffisante pour qu'une $T(z)$ ait une asymptote verticale à gauche $x = c > 0$ (ce qui entraîne l'existence d'un domaine $\Delta$ composé de telles $T(z)$) est la convergence de $\int^{\infty} u\,dy$ ou de $\int_{-\infty} u\,dy$ sur une droite verticale dans $D$ (ce qui entraîne la convergence sur toutes les autres) et que la limite $b$ de $v(x+iy)$ pour $x > 0$, $y \to +\infty$ ou $-\infty$ respectivement, dont l'existence est assurée par cette convergence, soit négative ou positive respectivement. Alors dans $\Delta$, pour $t \to -\infty$, $y_t$ tend vers l'infini du signe opposé au signe de $b$.*

Supposons maintenant qu'une $T(z)$ existe ayant pour asymptote la droite $x=0$. Donc, pour fixer les idées soit $x \to 0$ et $y_t \to +\infty$ sur $T(z)$ pour $t \to -\infty$. Alors le domaine $\Delta$ de $D$ au dessus de $T(z)$ est composé de trajectoires jouissant de la même propriété. Quel que soit $z$ dans $\Delta$, on a pour $t \to -\infty$

$$\frac{\partial x_t}{\partial x} - i\frac{\partial x_t}{\partial y} = \frac{\partial z_t}{\partial z} = \frac{w(z_t)}{w(z)} \to 0,$$

donc sur toute $T(z)$ dans $\Delta$

$$\lim_{x\to 0} w(z) = 0. \tag{13}$$

L'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{u(x+iy)}{|w(x+iy)|^2}\,dy \tag{14}$$

diverge pour $x > 0$, car sa convergence entraînerait que $\frac{1}{w} \to$ limite finie pour $y \to +\infty$ sur toute droite verticale dans $D$ $\left(\text{voir p. [3] 298, l. 3 où } w \text{ est à remplacer par } \frac{1}{w}\right)$ en contradiction avec (13), $w$ ne pouvant pas avoir deux limites différentes sur deux courbes dans $D$ allant à l'infini.

Inversement supposons $\eta$ borné supérieurement sur $x = 0$ et que (14) diverge. Alors, sur les images des droites $x = c > 0$ dans $H$, $\eta$ tend vers $+\infty$ quand $y \to +\infty$. Donc $H$ contient un demi-plan $\eta >$ const., donc $D$ contient un domaine $\Delta$ composé de $T(z)$ qui vont à l'infini pour $t \to -\infty$. Dans $\Delta$ la borne inférieure de $\eta$ surpasse la borne supérieure de $\eta$ sur $x = 0$, ce qui exclut que $\lim_{t \to -\infty} y$ serait $-\infty$ dans $\Delta$, cette limite est donc $+\infty$. D'autre part une asymptote $x = c > 0$ pour les $T(z)$ dans $\Delta$ est impossible, car le théorème VI exigerait la convergence de $\int^{\infty} u\, dy$ sur toute droite $x = d > 0$ et que $\lim_{y \to +\infty} w(d+yi)$ serait une constante négative $b$, ce qui entraînerait la convergence de (14) pour $x > 0$.

Théorème VII. *Condition nécessaire et suffisante pourqu'une $T(z)$ ait l'asymptote $x = 0$ (ce qui entraîne l'existence d'un domaine $\Delta$ composé de telles $T(z)$) est que $\eta$ soit borné supérieurement (inférieurement) sur $x = 0$ et que (14) $\left(\text{respectivement l'intégrale } \int_{-\infty} \frac{u\, dy}{|w|^2}\right)$ diverge pour $x > 0$. Dans $\Delta$ $\lim_{t \to -\infty} w(z_t) = 0$ et $\lim_{t \to -\infty} y_t = +\infty$ (respectivement $-\infty$).*

Les théorèmes II, VI et VII montrent l'impossibilité d'une $T(z)$ à deux asymptotes verticales $x = c \geqq 0$ et $x = d$, $0 < d < \infty$, tel que $y$ tendrait pour $t \to -\infty$ et pour $t \to +\infty$ vers l'infini du même signe.

(Reçu le 22 juin 1938.)