COMPOSITIO MATHEMATICA

V. KUPRADZE

Zur Frage der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem inhomogenen ebenen Medium

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 228-234
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__228_0>

Zur Frage der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem inhomogenen ebenen Medium

von

V. Kupradze

Tbilisi

Fällt eine elektromagnetische Welle $f(M)$ in ein ebenes Medium T_i mit der (genügend glatten) Begrenzung C ein, so entsteht ein zusätzliches elektromagnetisches Feld mit den elektrischen und magnetischen Vektoren u^*, die den Maxwellschen Gleichungen genügen. Ist $f(M)$ monochromatisch, so hat man

$$u^* = \Re(e^{int} \cdot u)$$

$$\Delta u + s^2(M)u = 0 \tag{1}$$

wo

$$s^2(M) = \begin{matrix} k_i^2 & \text{in } T_i \\ k_a^2 & \text{in } T_a \text{ (dem Äußeren von } C), \end{matrix}$$

$$k_i^2 = \frac{1}{c^2}(n^2\varepsilon\mu - in\sigma\mu), \tag{2}$$

$$k_a^2 = \frac{n^2}{c^2}, \tag{3}$$

hier ist ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, σ die Leitfähigkeit in T_i, n eine reelle positive Zahl, die Schwingungszahl; in T_a sind $\sigma = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$.

Zur Lösung des ebenen Problems genügt es, die z-Komponente des Feldes zu finden; nach den Maxwellschen Gleichungen lassen sich aus ihr die übrigen durch Differentiationen ermitteln. Bekanntlich müssen diese z-Komponenten außer (1) noch Randbedingungen längs C erfüllen, und zwar für den elektrischen Vektor

$$u_i = u_a, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a, \tag{4}$$

für den magnetischen Vektor

$$u_i = u_a, \quad \frac{1}{k_i^2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \frac{1}{k_a^2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a.$$

Schließlich muß gewissen Bedingungen über das Verschwinden im Unendlichen genügt werden, den Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial R} + ik_a u = o(R^{-\frac{1}{2}}) \tag{5}$$
$$(R^2 = x^2 + y^2).$$

In meinen Arbeiten [1], [2] und in der Sternbergschen Arbeit [3] wurde gezeigt, daß sich die Lösungen dieser zwei Aufgaben ergeben als Lösungen folgender Integralgleichungen [1])

$$u(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint\limits_{T_i} G(P, Q)\, u(Q) d\sigma_Q + f(P), \tag{6}$$

$$\frac{u(P)}{s^2(P)} = \frac{k_i^2 - k_a^2}{k_i^2} \iint\limits_{T_i} G(P, Q)\, u(Q)\, d\sigma_Q + \\ + \frac{k_a^2 - k_i^2}{k_i^2 k_a^2} \int\limits_C \frac{\partial G}{\partial n} u(Q) ds + \frac{f(P)}{k_a^2} \tag{7}$$

mit

$$G(P, Q) = \frac{1}{2\pi} H_0^{(2)}(k_a r_{PQ}),$$

wo r_{PQ} den Abstand der Punkte P, Q bedeute, $f(P)$ die gegebene einfallende Welle sei, die

$$\Delta f + k_a^2 f = 0$$

genüge, und $H_0^{(2)}(k_a r)$ die Hankelsche Funktion zweiter Art nullter Ordnung.

(6) ist eine gewöhnliche Fredholmsche Integralgleichung, für die sich die Lösungsexistenz aus der eindeutigen Bestimmtheit der Lösung ergibt; (7) ist eine belastete Fredholmsche Integralgleichung, für die man nach geeigneter Umformung das Analoge behaupten kann. Diese Untersuchung und den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für (7) habe ich in einer kurzen Note ([4]) veröffentlicht. Den Eindeutigkeitsbeweis für (6) habe ich kurz in der Arbeit [1], ausführlicher in der Arbeit [2] veröffentlicht. [2])

Diese Beweise begegneten der Kritik des Herrn Hans Freudenthal, der einen neuen Eindeutigkeitsbeweis für (6) erbrachte

[1]) Ich verwende hier die Bezeichnungen von Herrn Sternberg.

[2]) In diesen Arbeiten wird allein der Fall $\sigma \neq 0$ behandelt. In der Arbeit [1] fehlt leider durch ein Korrekturversehen dieser Hinweis, doch aus dem Gang der Untersuchung geht hervor, daß nur von diesem Fall die Rede ist. Der allgemeine Fall wurde in [4] behandelt.

(siehe [5]). Weil diese Kritik, wie mir scheint, wenigstens teilweise, auf Mißverständnissen beruht, erlaube ich mir, zur Rechtfertigung meiner Methode, hier in — wie ich glaube — vollkommen einwandfreier Form auf die Fragestellung zurückzukommen. Ich beschränke mich dabei auf den Fall einer nichtverschwindenden Leitfähigkeit in T_i: $\sigma \neq 0$.

Wir wollen zeigen, daß die Gleichung

$$u(P) = (k_i^2 - k_a^2)\iint_{T_i} G(P, Q)\, u(Q) d\sigma_Q, \tag{8}$$

mit k_i^2, k_a^2 gemäß (2) und (3), nur die triviale Lösung

$$u = 0 \tag{9}$$

besitzt.

Beachten wir, daß aus der asymptotischen Darstellung

$$H_n^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \pi\frac{2n+1}{r}\right)}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(x) = -H_1^{(2)}(x)$$

und der Gleichung (8) vermöge einer einfachen rechnerischen Umformung folgt

$$u = O(r^{-\frac{1}{2}}), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = O(r^{-\frac{1}{2}}), \tag{10}$$

d.h., daß $\sqrt{r}\,|u|$ und $\sqrt{r}\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|$ beschränkt sind. Schreiben wir

$$u_a = \varphi_a + i\psi_a, \qquad u_i = \varphi_i + i\psi_i, \tag{11}$$

und beachten wir

$$u_a^* = \Re(e^{int} u_a), \quad u_i^* = \Re(e^{int} u_i), \tag{11'}$$

so ersehen wir aus (1) und (2) leicht, daß

$$\Delta u_a^* = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_a^*}{\partial t^2}, \quad \Delta u_i^* = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 u_i^*}{\partial t^2} + \frac{\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial u_i^*}{\partial t} \tag{12}$$

gilt. So erhalten wir die mit der Zeit periodischen Ausdrücke

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial y}\right)^2 + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right)^2\right\}, \\ E_a &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_a^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_a^*}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u_a^*}{\partial t}\right)^2\right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Hieraus ergibt sich nach (12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_i}{\partial t} &= \operatorname{div}\left[\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\operatorname{grad} u_i^*\right] - \frac{\mu\sigma}{c^2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right)^{2'},\\ \frac{\partial E_a}{\partial t} &= \operatorname{div}\left[\frac{\partial u_a^*}{\partial t}\operatorname{grad} u_a^*\right].\end{aligned} \tag{14}$$

Achten wir auf die Stetigkeit von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ längs C, so können wir den Gaußschen Satz auf die Funktion

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\mu\sigma}{c^2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right)^2$$

mit

$$E = E_i + E_a$$

anwenden; wir integrieren dabei über $T_i + T_{a,R}$, d.h. die Kreisscheibe, die begrenzt wird von dem Kreis Σ_R mit dem (genügend großen) Radius R. So ergibt sich

$$\iint\limits_{T_i+T_{a,R}} \frac{\partial E}{\partial t}\,d\sigma = \int\limits_{\Sigma_R} \frac{\partial u_a^*}{\partial t}\cdot\frac{\partial u_a^*}{\partial n}\,ds - \frac{\mu\sigma}{c^2}\iint\limits_{T_i}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right)^2 d\sigma \tag{15}$$

(n = innere Normale).

Man erhält leicht aus (11) und (11'):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_a^*}{\partial t}\cdot\frac{\partial u_a^*}{\partial n} &= -\,n(\varphi\sin nt+\psi\cos nt)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}\cos nt - \frac{\partial\psi}{\partial R}\sin nt\right)\\ &= -\,k_a n(\varphi\sin nt+\psi\cos nt)^2 - n(\varphi\sin nt+\psi\cos nt)\cdot\\ &\quad\cdot\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - k_a\psi\right)\cos nt - \left(\frac{\partial\psi}{\partial R} + k_a\varphi\right)\sin nt\right]\\ &= -\frac{n}{k_a}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}\cos nt - \frac{\partial\psi}{\partial R}\sin nt\right)^2 +\\ &\qquad + \frac{n}{k_a}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R}\cos nt - \frac{\partial\psi}{\partial R}\sin nt\right)\cdot\\ &\quad\cdot\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - k_a\psi\right)\cos nt - \left(\frac{\partial\psi}{\partial R} + k_a\varphi\right)\sin nt\right].\end{aligned} \tag{16}$$

Wir beachten, daß die Bedingung (5), der die gesuchte Lösung genügen muß, in zwei Bedingungen zerfällt:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial R} - k_a\psi\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right),\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial R} + k_a\varphi\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right). \tag{17}$$

Tragen wir (16) in (15) ein, so erhalten wir rechts u.a. Integrale der Form:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R}\varphi \cdot \sqrt{R}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} - k_a \psi\right) d\alpha, \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{R}\psi \cdot \sqrt{R}\left(\frac{\partial \psi}{\partial R} + k_a \varphi\right) d\alpha,$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R}\frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot \sqrt{R}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial R} - k_a \psi\right) d\alpha, \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{R}\frac{\partial \psi}{\partial R} \cdot \sqrt{R}\left(\frac{\partial \psi}{\partial R} + k_a \varphi\right) d\alpha.$$

Auf grund der oben gemachten Bemerkung über die Beschränktheit von $\sqrt{R}|\varphi|$, $\sqrt{R}|\psi|$, $\sqrt{R}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right|$, $\sqrt{R}\left|\frac{\partial \psi}{\partial R}\right|$ und aufgrund von (17) bemerken wir, daß alle diese Integrale mit wachsendem R nach Null streben. Aus (15) ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{T_i+T_{a,R}} E d\sigma &= -k_a n \int_0^{2\pi} [\sqrt{R}(\varphi_a \sin nt + \psi_a \cos nt)]^2 d\alpha - \\ &\quad - \frac{\mu\sigma}{c^2}\iint\limits_{T_i}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right)^2 d\sigma = \\ &= -\frac{u}{k_a}\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{R}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial R}\cos nt - \frac{\partial \psi_a}{\partial R}\sin nt\right)\right]^2 d\alpha - \\ &\quad - \frac{\mu\sigma}{c^2}\iint\limits_{T_i}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right)^2 d\sigma . \end{aligned} \tag{18}$$

Da wegen der Annahme $\sigma \neq 0$ das zweite Integral rechts *nicht* verschwindet, ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{T_i+T_{a,R}} E d\sigma \leqq 0 . \tag{19}$$

Da aber $\iint\limits_{T_i+T_{a,R}} E d\sigma$ mit der Zeit periodisch ist, muß aus (19) folgen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{T_i+T_{a,R}} E d\sigma = 0 . \tag{20}$$

(20) kann man auch physikalisch deuten als formelmäßigen Ausdruck für die Konstanz der „Quasienergie" bei stationären Prozessen.

Aus (20) und (18) folgen die asymptotischen Beziehungen

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [\sqrt{R}(\varphi_a \sin nt + \psi_a \cos nt)]^2 d\alpha \to 0, \\ &\int_0^{2\pi} \sqrt{R}\left[\frac{\partial \varphi_a}{\partial R}\cos nt - \frac{\partial \psi_a}{\partial R}\sin nt\right]^2 d\alpha \to 0 \end{aligned} \tag{21}$$

und die Gleichung

$$\iint\limits_{T_i} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial t}\right)^2 d\sigma = 0\,. \tag{22}$$

Aus (21) erhalten wir die asymptotischen Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} (\sqrt{R}\varphi_a)^2\, d\alpha \to 0\,, \quad \int_0^{2\pi} (\sqrt{R}\psi_a)^2\, d\alpha \to 0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{R}\,\frac{\partial \varphi_a}{\partial R}\right)^2 d\alpha \to 0, \quad \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{R}\,\frac{\partial \psi_a}{\partial R}\right)^2 d\alpha \to 0$$

und hieraus

$$\int_0^{2\pi} R\,|u_a|^2\, d\alpha \to 0\,, \quad \int_0^{2\pi} R\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2 d\alpha \to 0\,.$$

Die Schwarzsche Ungleichheit liefert:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R}\,|u_a|\, d\alpha \to 0, \quad \int_0^{2\pi} \sqrt{R}\left(\frac{\partial u_a}{\partial R}\right) d\alpha \to 0\,. \tag{23}$$

Aus (22) folgt

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t} = 0, \text{ also } \varphi_i \sin nt + \psi_i \cos nt = 0$$

und hieraus

$$\varphi_i = \psi_i = 0\,.$$

Also

$$u_i = 0 \text{ in } T_i\,,$$

also wegen der Stetigkeit auf C:

$$\begin{aligned} u_i &= 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = 0\,, \\ u_a &= 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = 0\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Der Wert von u in irgendeinem Punkte (x_0, y_0) von T_a im Innern von Σ_R errechnet auf grund einer bekannten Formel zu

$$\begin{aligned} u_a(x_0, y_0) = {} & \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \left(u_a \frac{\partial H_0^{(2)}(k_a r)}{\partial n} - H_0^{(2)}(k_a r) \frac{\partial u_a}{\partial n}\, ds\right) \\ & - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Sigma_R} \left(u_a \frac{\partial H_0^{(2)}(k_a r)}{\partial n} - H_0^{(2)}(k_a r) \frac{\partial u_a}{\partial n}\right) ds\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Wegen (24) verschwindet das erste Integral; das zweite läßt sich mit (23) und dem asymptotischen Ausdruck für $H_0^{(2)}(k_a r)$ abschätzen; dabei ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R}\, u_a \cdot A_1(r)\, d\alpha - \int_0^{2\pi} A(r) \sqrt{R} \frac{\partial u_a}{\partial R} d\alpha$$

mit

$$A(r) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi k_a}}\, e^{-i\left(k_a r - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

und einem analogen Ausdruck für $A_1(r)$. Also

$$\left| \int_0^{2\pi} \sqrt{R}\, u_a \cdot A_1(r)\, d\alpha \right| \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{R}\, |u_a| \cdot |A_1(r)|\, d\alpha \to 0,$$

$$\left| \int_0^{2\pi} \sqrt{R} \frac{\partial u_a}{\partial R} \cdot A(r)\, d\alpha \right| \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{R} \left| \frac{\partial u_a}{\partial R} \right| \cdot |A(r)|\, d\alpha \to 0$$

und daher

$$u_a(x, y) = 0 \text{ in } T_a,$$

w.z.b.w.

Das ist bewiesen unter der Voraussetzung $\sigma \neq 0$. Ist $\sigma = 0$, d.h. herrscht in T_i ein Dielektrikum, so können wir nicht auf (22) schließen; wir haben dann nur die Beziehung (21). In diesem Fall können wir dasselbe Resultat erzielen mit Hilfe einer Reihenentwicklung

$$u_a = \Sigma\, H_0^{(2)}(k_a r)\, [a_m \cos m\vartheta + b_m \sin m\vartheta]\,. \tag{26}$$

Herr Freudenthal behandelt auch den Fall $\sigma = 0$; er macht dabei, wenn auch nicht explizit, von einer derartigen Entwicklung Gebrauch.

Literatur.

[1] V. Kupradze [C. R. USSR (n. s.) **1936**, **1**, 7–9].
[2] V. Kupradze [Arbeiten aus dem Math. Inst. Tiflis **1** (1937)].
[3] W. Sternberg [Compositio Math. 3 (1936), 254–275].
[4] V. Kupradze [C. R. USSR (n. s.) **16** (1937), 165–168].
[5] H. Freudenthal [Compositio Math. **6** (1938), 221–227]. [3])

(Eingegangen den 24. November 1937. Abgeändert den 7. August 1938.)

[3]) Der Verf. machte mir diese Arbeit vor dem Druck zugänglich.