

COMPOSITIO MATHEMATICA

R. V. MISES

Über den Verlauf der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 203-220

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__203_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Über den Verlauf der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung

von

R. v. Mises

Istanbul

Seit den grundlegenden Arbeiten von Henri Poincaré über qualitative Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen ist namentlich das Verhalten der Integralkurven in der Umgebung einer singulären Stelle mehrfach untersucht worden ¹⁾. Die wichtigen Ergebnisse von J. Bendixon sind von O. Perron ²⁾ und kürzlich von H. Forster ³⁾ ergänzt worden. Dabei wird stets von einer Gleichung der Form

$$(1) \quad y' = \frac{a(x, y) + c(x, y)}{b(x, y) + d(x, y)}$$

ausgegangen, in der $a(x, y)$ und $b(x, y)$ homogene Polynome von gleichem Grad in x, y und $c(x, y), d(x, y)$ geeignete Funktionen bedeuten, die in der Nähe des Nullpunktes stärker als a bzw. b gegen Null gehen. Diese Formulierung ist aber für die meisten Anwendungen zu eng; z.B. genügen die Krümmungslinien einer Fläche in der Umgebung eines Nabelpunktes einer Beziehung, in der nicht y' , sondern $y' - \frac{1}{y'}$ einem Ausdruck von der Gestalt der rechten Seite von (1) gleichgesetzt ist. Andererseits sind die hauptsächlichsten Ergebnisse, die sich über das Verhalten der Integrale in der Umgebung einer singulären Stelle aussprechen lassen, von der analytischen Natur der Differentialgleichung völlig unabhängig, und sie sollen im folgenden in entsprechend allgemeiner Weise abgeleitet werden. Die genaue Problemstellung ist aus § 1 zu ersehen. Wir glauben, auf diesem Wege auch einen einfacheren Zugang zu den bereits bekannten Resultaten, die sich

¹⁾ Eine zusammenfassende Darstellung der bisherigen Resultate liefert M. PETROVITCH [Mémorial des Sciences Mathém. 48, Paris 1931].

²⁾ O. PERRON [Mathem. Zeitschr. 15 (1922), 121—146 und 16 (1923), 273—295].

³⁾ H. FORSTER [Math. Zeitschr. 43 (1937), 271—320].

auf spezielle analytische Differentialgleichungen erstrecken, gefunden zu haben ⁴⁾).

§ 1. Problemstellung.

Es seien r, φ ebene Polarkoordinaten und es bezeichne ϑ den Winkel, den die Tangente einer Kurve mit der Polarachse ($\varphi=0$) einschließt. Die Differentialgleichung erster Ordnung, für die der Nullpunkt eine singuläre Stelle ist, kann dann in der Form

$$(2) \quad \vartheta = f(\varphi) + g(r, \varphi) = F(r, \varphi), \quad \frac{dr}{d\varphi} = r \cotg (F - \varphi)$$

geschrieben werden, wenn vorausgesetzt wird, daß $g(r, \varphi)$ mit verschwindendem r gleichmäßig in φ gegen Null geht. Jedenfalls umfaßt (2) den bisher allein in Betracht gezogenen Fall (1) und darüber hinaus Fälle, in denen z.B. $\tg 2\vartheta$ einem Ausdruck von der Gestalt (1) gleich ist, und viele andere. Da man bei gegebenem $F(r, \varphi)$ in jedem Fall $F(0, \varphi) = f$ und $F(r, \varphi) - F(0, \varphi) = g$ setzen kann, enthält (2) mit $f = \text{const}$ auch den Fall der im Nullpunkt regulären Gleichung.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Gesamtheit der Kurven zu charakterisieren, die an jeder Stelle $r > 0$ einer Gleichung der Form (2) bei gegebenem f und g genügen. Dabei wird es nützlich sein, zunächst den einfacheren Ansatz

$$(3) \quad \vartheta = f(\varphi), \quad \frac{dr}{d\varphi} = r \cotg (f - \varphi)$$

zu studieren, den wir die zu (2) gehörige „homogene“ Gleichung nennen; der ursprüngliche Ansatz (2) heißt dann die *vollständige* Gleichung. Die Voraussetzungen über f und g , die wir zugrundelegen, sind folgende.

I. *Voraussetzungen über $f(\varphi)$.*

Ia) Die Funktion $f(\varphi)$, die nur Werte des abgeschlossenen Intervalls $0, \pi$ annimmt, ist stetig, abgesehen von Sprüngen zwischen $f = 0$ und $f = \pi$, und periodisch mit der Periode 2π in φ ⁵⁾. An den Sprungstellen gilt f als zweiwertig.

Ib) Es gibt höchstens endlich viele Stellen φ_v im Intervall

⁴⁾ Von den Ergebnissen dieser Arbeit ist Gebrauch gemacht in der Abhandlung des Verfassers „Über den singulären Punkt zweiter Ordnung im ebenen Spannungsfeld“, die in dem „Timoshenko Memorial Volume“, New-York 1938, erscheint.

⁵⁾ Im Ansatz (1) ist die Annahme eingeschlossen, daß f die Periode π besitzt. Auch dies trifft unter Umständen bei der Differentialgleichung der Krümmungslinien nicht zu.

$0 \leq \varphi < 2\pi$, in denen $f(\varphi_\nu) = \varphi_\nu$ oder $f(\varphi_\nu) = \varphi_\nu - \pi$, und an jeder solchen Stelle hat $f(\varphi)$ eine endliche Steigung

$$(4) \quad \left| \frac{f(\varphi) - f(\varphi_\nu)}{\varphi - \varphi_\nu} \right| \leq K,$$

oder es wird wenigstens das Integral

$$(4') \quad \int \frac{d\varphi}{f(\varphi) - \varphi} \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{d\varphi}{f(\varphi) - \varphi + \pi} \quad \text{divergent,}$$

sobald eine der Integrationsgrenzen gegen φ_ν konvergiert. (Den Fall, daß ein $\varphi_\nu = 0$ oder $= \pi$ ist, denken wir uns der Einfachheit halber durch Drehung der Achse ausgeschlossen.)

Durch die Bedingungen Ia) und Ib) wird vor allem sichergestellt, daß in jedem Bereich, der den Nullpunkt nicht enthält, durch jeden Punkt genau *eine* Lösungskurve der homogenen Gleichung (3) geht. Denn an einer Stelle, an der $f \neq \varphi$ und $f \neq \varphi - \pi$, ist für das Koordinatensystem, dessen y -Achse die Richtung des betreffenden Radiusvektors hat, die Lipschitz-Bedingung ohnehin erfüllt.

II. Voraussetzungen über $g(r, \varphi)$.

IIa) Die Funktion $g(r, \varphi)$, definiert für alle φ und für $0 < r \leq R$, hat in φ die Periode 2π , ist stetig in dem genannten Bereich und genügt überdies den Bedingungen, die notwendig sind, damit durch jeden Punkt des Kreisringes $\varepsilon \leq r \leq R$ ($\varepsilon > 0$ beliebig) genau eine Integralkurve von (2) geht.

IIb) Es gibt eine stetige, mit r monoton wachsende Funktion $\delta(r)$, so daß

$$(5) \quad |g(r, \varphi)| \leq \delta(r), \quad \delta(0) = 0.$$

Für einzelne Behauptungen (Satz 9) werden noch etwas weitergehende Bedingungen ausdrücklich formuliert werden.

In den älteren Untersuchungen sind unsere Voraussetzungen reichlich erfüllt. Im Falle (1) hat die homogene Gleichung die Form

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{A(u)}{B(u)}, \quad u = \operatorname{tg} \varphi,$$

wo A und B Polynome in u sind. Die φ_ν sind durch die Wurzeln der algebraischen Gleichung $uB(u) = A(u)$ bestimmt. Das Einzige, was wir ausgeschlossen haben, ist der Fall, daß diese Gleichung *identisch* erfüllt wird, wobei der singuläre Punkt ein sog. „Strudelpunkt“ wird; dieser Fall bietet keine besonderen Schwierigkeiten.

§ 2. Die homogene Gleichung. Integralstrahlen.

Eine vom Ursprung ausgehende Halbgerade, für die $\varphi = \varphi_v = f(\varphi_v)$ oder $\varphi = \varphi_v = f(\varphi_v) + \pi$ ist, stellt eine Integralkurve von (3) dar und soll ein *Integralstrahl* heißen. Im übrigen gehen alle Integralkurven einer homogenen Gleichung durch Ähnlichkeitstransformation auseinander hervor; es genügt also, *einen* Integralzug, der sich über alle φ von 0 bis 2π erstreckt, zu untersuchen. Wir haben zunächst den folgenden leicht einzusehenden

SATZ 1. *Ist kein innerer oder Randstrahl des Sektors $a \leq \varphi \leq b$ ein Integralstrahl, so geht durch jeden inneren Punkt r_0, φ_0 des Sektors genau eine Integralkurve; sie verläuft zwischen zwei positiven endlichen Radien ϱ, R und trifft die beiden Randstrahlen in Punkten mit positiven, endlichen r_1, r_2 . Ist kein innerer, wohl aber ein Randstrahl Integralstrahl, so kann dieser von der Integralkurve durch r_0, φ_0 nur bei $r = 0$ oder $r = \infty$ getroffen werden.*

In der Tat, solange $f(\varphi) - \varphi$ von Null und jedem ganzen Vielfachen von π verschieden ist, besitzt die Integralkurve von (3) die Polargleichung

$$(6) \quad \ln \frac{r}{r_0} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cotg [f(\varphi) - \varphi] d\varphi,$$

die für $\varphi = a$ und $\varphi = b$ und jeden dazwischen liegenden Winkel endliche von Null verschiedene Werte für r liefert. Nehmen wir aber an, der Randstrahl $\varphi = b$ sei ein Integralstrahl, bzw. sei $b = f(b)$, so liegt nach dem eben bewiesenen ersten Teil des Satzes auf jedem Strahl $\varphi = b - \varepsilon$, für beliebig kleine positive ε , ein Punkt der Integralkurve. Hätten diese Punkte für $\varepsilon \rightarrow 0$ eine Grenzlage mit endlichem $r > 0$, so würde das Integral in (6) mit $\varphi \rightarrow b$ konvergieren. Es folgt aber aus $f(b) = b$, daß

$$\lim_{\varphi \rightarrow b} \frac{f(\varphi) - \varphi}{\tg [f(\varphi) - \varphi]} = 1.$$

Daher ist gleichzeitig mit dem ersten der Integrale (4), wo $\varphi = b$ zu setzen ist, das bis $\varphi = b$ erstreckte Integral (6) divergent; ein endliches positives $r_2 = r(b)$ existiert also nicht. Wir folgern weiter aus (6):

SATZ 2. *Gibt es überhaupt keine Integralstrahlen, d.h. hat keine der Gleichungen $f(\varphi) = \varphi$ und $f(\varphi) = \varphi - \pi$ eine reelle Lösung, so sind alle Integralkurven geschlossene Kurven oder Spiralen um den Ursprung.*

Unter den Voraussetzungen dieses Satzes ist nämlich Gl. (6)

auf den vollen Winkel von φ_0 bis $\varphi_0 + 2\pi$ anwendbar. Man erhält, je nachdem

$$(7) \quad \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} [f(\varphi) - \varphi] d\varphi = 0 \text{ oder } \neq 0,$$

eine nach r_0, φ_0 zurückkehrende oder eine solche Integralkurve, die den Anfangsstrahl $\varphi = \varphi_0$ in einem von r_0, φ_0 verschiedenen Punkt wieder trifft. Aus der Ähnlichkeitseigenschaft der Integrale folgt dann der ausgesprochene Satz.

Entscheidend für den Verlauf der Integralkurven bei Vorhandensein von Integralstrahlen ist der folgende

SATZ 3. *Sei $\varphi = \varphi_\nu < \pi$ ein Integralstrahl, also $f(\varphi_\nu) = \varphi_\nu$, so daß in einem Intervall $\varphi_\nu < \varphi \leq \varphi_\nu + \eta$ die Differenz $f(\varphi) - \varphi$ konstantes Vorzeichen besitzt. Ist dieses Vorzeichen positiv, so mündet jede längs $\varphi = \varphi_\nu + \eta$ in den Sektor eintretende Integralcurve in den Integralstrahl an der Stelle $r = 0$. Ist das Zeichen negativ, so weist jede der genannten Integralkurven bei gegen φ_ν abnehmendem φ ins Unendliche wachsende r auf. Verhält sich im zweiten Fall $f(\varphi)$ in einem Teilsektor $\varphi_\nu \leq \varphi \leq \varphi_\nu + \eta_1$ monoton, so läßt sich weiter unterscheiden: Bei nicht-abnehmendem (nicht-zunehmendem) $f(\varphi)$ ist auch der Abstand zwischen einer Integralcurve und dem Integralstrahl bei hinreichend großem r nicht-abnehmend (nicht-zunehmend).*

Um zunächst die Aussage für den Fall $f(\varphi) - \varphi > 0$ zu beweisen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $\eta, f(\varphi) - \varphi_\nu$ und a fortiori $f(\varphi) - \varphi$ kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind. Unter dieser Voraussetzung ist auf jedem Strahl $\varphi_\nu < \varphi \leq \varphi_\nu + \eta$ die rechte Seite von (3) und daher die Ableitung $\frac{dr}{d\varphi}$ positiv. Eine Integralkurve tritt durch den Strahl $\varphi_\nu + \eta$ in den betrachteten Sektor mit abnehmendem φ und abnehmendem r ein. Verfolgt man die Kurve in diesem Sinn, so gibt es nach Satz 1 auf jedem Strahl $\varphi > \varphi_\nu$ einen Punkt der Integralkurve mit positivem r -Wert und diese r -Werte nehmen wegen $\frac{dr}{d\varphi} > 0$ monoton ab. Ihr Limes kann nur Null sein, da sonst der zweite Teil von Satz 1 verletzt wäre. Der Punkt $r = 0$ ist also ein Punkt der Integralkurve. Zieht man von diesem Punkte aus die Sehnen nach den übrigen Kurvenpunkten, also die Radienvektoren, so haben sie nach dem ersten Teil des Satzes 1 den Integralstrahl zur Grenzlage. Dieser ist also Tangente der Integralkurve in $r = 0$.

Im Falle $f(\varphi) - \varphi < 0$ begrenzen wir den Sektor $\varphi_\nu, \varphi_\nu + \eta$

so, daß η , $\varphi - f(\varphi)$ und a fortiori $\varphi_v - f(\varphi)$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bleiben. Es ist dann $\text{ctg} [f(\varphi) - \varphi]$ und daher nach (3) auch $\frac{dr}{d\varphi}$ negativ. Eine Integralkurve tritt in den betrachteten Sektor mit *abnehmendem* φ und *zunehmendem* r ein. Weiterhin wächst r monoton, während die φ -Werte in negativem Sinn durchlaufen werden, und der Limes der r -Werte für $\varphi = a$ kann nach Satz 1 nur unendlich sein.

Hat man nicht nur $f(\varphi) - \varphi < 0$, sondern sogar $f(\varphi) - \varphi_v < 0$ im Sektor $\varphi_v < \varphi < \varphi_v + \eta_1$, so bestimmen wir den Abstand y eines Kurvenpunktes vom Integralstrahl (positiv gegen das Innere des Sektor gerechnet) aus

$$(8) \quad \frac{dy}{rd\varphi} = \frac{\sin [f(\varphi) - \varphi_v]}{\sin [f(\varphi) - \varphi]} > 0.$$

Man sieht, daß mit abnehmendem φ (und zunehmendem r) der Abstand y monoton abnimmt. Da er nicht negativ werden kann, muß er einem Grenzwert zustreben, d.h. entweder $y = 0$ oder $y = \text{const} > 0$ muß eine Asymptote bilden; jedenfalls *nähert* sich die Integralkurve von einer bestimmten Stelle an dauernd dem Integralstrahl. — Die gleiche Überlegung führt im Falle $f(\varphi) - \varphi_v > 0$, wobei der Ausdruck (8) stets negativ ist, zu der entsprechenden Behauptung. Damit ist Satz 3 in vollem Umfang bewiesen.

§ 3. Homogene Gleichung. Diskussion der Typen.

Wir haben im Vorstehenden drei Typen des Verhaltens eines Integralstrahles zu den ihm auf *einer* Seite benachbarten Integralkurven kennen gelernt:

- a) die Kurven münden im Nullpunkt in den Strahl;
- b) die Kurven nähern sich im Unendlichen dem Strahl;
- c) die Kurven gehen ins Unendliche, während der Radiusvektor in die Strahlrichtung übergeht, ohne daß die Kurve sich notwendig dem Strahl nähert.

Die Feststellung von b) ist nur möglich, wenn $f(\varphi)$ in einem Sektor, der an den Integralstrahl anschließt, ganz auf *einer* Seite von $\varphi = \varphi_v$ verläuft. Im Falle b) ist der Integralstrahl oder eine parallele Asymptote der Integralkurve. Im Falle c) *kann* die Kurve eine zum Integralstrahl parallele Asymptote besitzen. Wir wollen in den drei Fällen sagen, der Integralstrahl verhalte sich a) tangential, b) asymptotisch, c) als Leitstrahl zu den ihm auf der einen Seite benachbarten Integralkurven.

Jeder einzelne Integralstrahl kann sich auf jeder seiner beiden Seiten gemäß einem der drei Typen verhalten. Auch in der Aufeinanderfolge der Integralstrahlen verschiedener Typen besteht keine Beschränkung. Eine solche würde eintreten, wenn man $f(\varphi)$ als differenzierbar voraussetzte; es wäre dann die Kombination b/a an einem Strahl nicht möglich (vgl. Abb. 1). Wir fassen diese Ergebnisse zusammen in folgendem

SATZ 4. *Alle in einem Sektor zwischen zwei aufeinanderfolgenden Integralstrahlen φ_v, φ_{v+1} enthaltenen Integralkurven verhalten sich untereinander gleichartig in bezug auf den einen und in bezug auf den andern der begrenzenden Strahlen. Es gibt somit 6 verschiedene Typen von Sektoren und — im Hinblick auf das beiderseitige Verhalten — 6 verschiedene Typen von Integralstrahlen.*

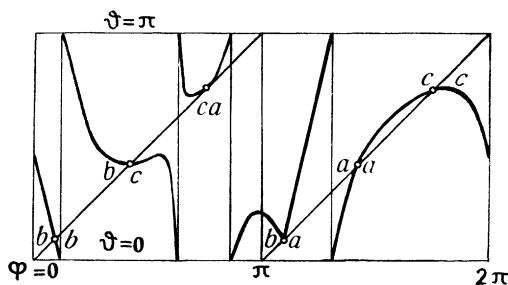


Fig. 1.

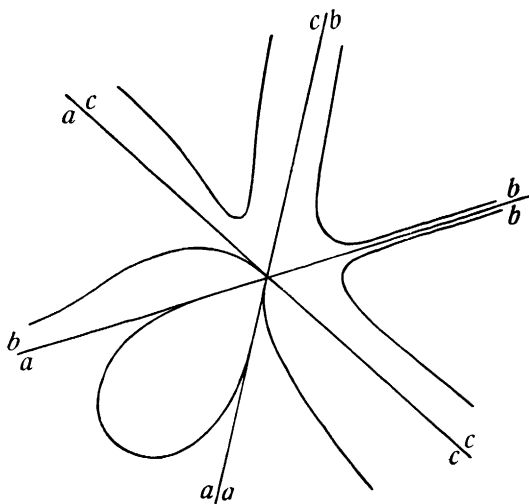


Fig. 2.

In Abb. 1 ist eine Funktion $f(\varphi)$ angedeutet, die in Abständen von je $\frac{\pi}{3}$ Nullstellen von $f - \varphi$ bzw. von $f - \varphi + \pi$ aufweist. Sowohl die einzelnen Nullstellen wie die Intervalle zwischen zwei aufeinanderfolgenden zeigen die sechs möglichen Kombinationen der Verhaltensweisen a, b, c. Der Verlauf der zugehörigen Integralkurven ist in Abb. 2 skizziert ⁶⁾.

Nimmt man an, daß $f(\varphi)$ im ganzen Bereich 0 bis 2π abteilungsweise monoton ist, so zerfallen die Integralkurven in Stücke von einseitiger Krümmung. An Stellen wachsender f -Werte sind die Kurven nach innen gekrümmt (der Krümmungsmittelpunkt liegt auf der Seite abnehmender r) usf. Den Richtungswechseln von f entsprechen Wendepunkte der Integrale. Der Unterschied zwischen den Typen b und c läßt sich dann dahin charakterisieren, daß die Integralkurven von einer bestimmten Stelle an, soweit sie nicht geradlinig verlaufen, dem Integralstrahl die konvexe bzw. die konkave Seite zukehren.

§ 4. Vollständige Gleichung. Ähnlichkeitssatz.

Die Beziehung zwischen den Lösungen der homogenen und der vollständigen Gleichung beruht zunächst auf folgendem

SATZ 5. *Sei r_0, φ_0 ein Punkt des Sektors $a \leq \varphi \leq b$, der keinen Integralstrahl der homogenen Gleichung, also keine Nullstelle von $f(\varphi) - \varphi$ oder von $f(\varphi) - \varphi + \pi$ enthält, und C' das im Sektor verlaufende Stück der durch r_0, φ_0 gehenden Integralkurve von $\vartheta = f(\varphi)$. Es bezeichne ferner D' den Flächenstreifen, der von den Parallelkurven zu C' im Abstand $\pm \varepsilon$ und den Geraden $\varphi = a$ und $\varphi = b$ begrenzt wird. Dann gibt es zu jedem genügend kleinen ε ein λ_0 derart, daß für $\lambda \geq \lambda_0$ die λ -fache Vergrößerung der durch den Punkt $r_0/\lambda, \varphi_0$ gehenden Integralkurve C der vollständigen Gleichung $\vartheta = f(\varphi) + g(r, \varphi)$, soweit sie in den Sektor fällt, im Flächenstreifen D' verläuft.*

Wir betrachten zunächst einen Sektor, dessen Öffnung kleiner als π ist, und legen die Achse so, daß

$$(9) \quad \frac{\pi}{2} < a < b < \frac{3\pi}{2}, \quad \text{daher} \quad -\frac{3\pi}{2} < f - \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

⁶⁾ Die Zeichnung, die Forster a.a.O., S. 282, für ein numerisches Beispiel gibt, ist unrichtig. Der Strahl $\varphi = 0$ hat nicht den Typus b/c, sondern c/c und der Strahl $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ nicht den Typus a/b, sondern a/c. Der Fall a/b kann bei analytischem $f(\varphi)$ überhaupt nicht vorkommen. — Der Text der Forsterschen Ausführungen wird hiervon nicht berührt.

Gemäß den Bedingungen des Satzes gibt es eine positive Zahl $\alpha < \frac{\pi}{4}$ derart, daß $|f - \varphi|$ und $|\pi + f - \varphi|$ größer als 2α bleiben. Die Differenz $f - \varphi$ fällt dann in eines der drei Intervalle

$$(10) \quad 2\alpha < f - \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad -\pi + 2\alpha < f - \varphi < -2\alpha, \quad -\frac{3\pi}{2} < f - \varphi < -\pi - 2\alpha.$$

In allen drei Fällen hat man

$$(10') \quad |\operatorname{ctg}(f - \varphi)| < \cotg 2\alpha, \quad |\sin(f - \varphi)| > \sin 2\alpha.$$

Das Kurvenstück C' , verläuft nach Satz 1 zwischen zwei positiven endlichen Radien ϱ , R . Bei genügend kleinem ε können ϱ und R so gewählt werden, daß auch jeder Punkt des Streifens D' in das Innere des Kreisringsektors

$$(11) \quad 0 < \varrho \leq r \leq R; \quad a \leq \varphi \leq b$$

fällt. Wir wählen nun λ_0 so, daß

$$(12) \quad \delta\left(\frac{R}{\lambda_0}\right) \leq \alpha \quad \text{und} \quad \delta\left(\frac{R}{\lambda_0}\right) \leq \frac{\sin^2 \alpha}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right);$$

dies ist sicher möglich, weil $\delta(r)$ mit abnehmendem r gegen Null geht.

Das Kurvenstück C'' , das durch λ -fache Vergrößerung des in den Sektor a , b fallenden Teiles von C gebildet wird, geht durch den Punkt r_0, φ_0 der in D' liegt. Wir haben zu zeigen, daß C'' nicht aus D' austritt. Wäre es der Fall, so müßte es auf C'' einen Punkt r_1, φ_1 geben, der außerhalb D' , aber noch immer innerhalb des durch a, b, ϱ, R bestimmten Kreisringsektors (11) liegt, u.zw. so, daß das ganze Stück von C'' zwischen r_0, φ_0 und r_1, φ_1 diesem Bereich angehört. Wir werden aber beweisen, daß die Ungleichungen

$$(13) \quad \varrho \leq r_1 \leq R, \quad a \leq \varphi_1 \leq b, \quad |r_1 - r'(\varphi_1)| > \varepsilon,$$

wobei $r = r'(\varphi)$ die Gleichung von C' bezeichnet, nicht mit der Bedingung verträglich sind, daß r_1, φ_1 auf C'' und das ganze Stück von C'' von r_0 bis r_1 innerhalb des Bereiches (11) liegt.

In der Tat ist der Tangentenwinkel ϑ von C'' durch

$$(14) \quad \vartheta = f(\varphi) + g\left(\frac{r}{\lambda}, \varphi\right)$$

gegeben und im Bereich (11) gilt wegen (12)

$$(15) \quad \left|g\left(\frac{r}{\lambda}, \varphi\right)\right| \leq \delta\left(\frac{r}{\lambda}\right) \leq \delta\left(\frac{R}{\lambda_0}\right) \leq \alpha.$$

Daher folgt aus (10), daß $\vartheta - \varphi = g + (f - \varphi)$ einem der drei Intervalle

$$(16) \quad \alpha < \vartheta - \varphi < \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad -\pi + \alpha < \vartheta - \varphi < -\alpha, \\ -\frac{3\pi}{2} - \alpha < \vartheta - \varphi < -\pi - \alpha$$

angehören muß. In allen drei Fällen ist

$$(16') \quad |\cotg(\vartheta - \varphi)| < \cotg \alpha, \quad |\sin(\vartheta - \varphi)| > \sin \alpha.$$

Die Differentialgleichung von C'' liefert

$$(17) \quad \ln \frac{r_1}{r_0} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cotg(\vartheta - \varphi) d\varphi,$$

während C' bestimmt ist durch

$$(18) \quad \ln \frac{r'(\varphi_1)}{r_0} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cotg(f - \varphi) d\varphi.$$

Beide Integrale existieren, da die Integranden zufolge (10') und (16') beschränkt sind; die Kurven C' und C'' sind, soweit sie in den Bereich (11) fallen, durch eindeutige Funktionen $r(\varphi)$ bzw. $r'(\varphi)$ darstellbar. Nun ist nach (14), (15) und der zweiten Ungleichung (12):

$$|\sin(\vartheta - f)| = \left| \sin g\left(\frac{r}{\lambda} \varphi\right) \right| \leq \delta \left(\frac{R}{\lambda_0}\right) \leq \frac{\sin^2 \alpha}{\pi} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right).$$

Daher folgt mit (10'), (16') aus

$$|\cotg(\vartheta - \varphi) - \cotg(f - \varphi)| = \left| \frac{\sin(\vartheta - f)}{\sin(\vartheta - \varphi) \sin(f - \varphi)} \right| < \frac{1}{\pi} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right)$$

durch Subtraktion von (17) und (18) wegen $|\varphi_1 - \varphi_0| < \pi$

$$(19) \quad \left| \ln \frac{r_1}{r'(\varphi_1)} \right| = \left| \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} [\cotg(\vartheta - \varphi) - \cotg(f - \varphi)] d\varphi \right| < \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right).$$

Die letzte Ungleichung ergibt, daß

$$\text{entweder } 0 < r_1 - r'(\varphi_1) < \varepsilon \frac{r'}{R} < \varepsilon \quad \text{oder} \quad 0 < r'(\varphi_1) - r_1 < \varepsilon \frac{r_1}{R} < \varepsilon$$

sein muß, was mit der dritten der Bedingungen (13) in Widerspruch steht.

Damit ist Satz 5 für einen Sektor, dessen Öffnung π nicht

erreicht, bewiesen. Für jedes größere, endliche Intervall a, b kann man den Beweis erbringen, indem man das Intervall in Stücke $< \pi$ zerlegt und auf jedes die vorstehende Überlegung anwendet. Dabei ist noch folgende Bemerkung nützlich.

Man sieht, daß die Bestimmung von λ_0 nach (12) von den Werten r_0, φ_0 unabhängig ist, d.h. daß die Konvergenz in bezug auf alle im Kreissektor R, a, b liegenden C' gleichmäßig ist; anderseits geht R in die Formeln (12) nur in den Verbindungen $\frac{\varepsilon}{R}$ und $\frac{\lambda_0}{R}$ ein. Beides ist selbstverständlich, wenn man bedenkt, daß alle Integralkurven C' der homogenen Gleichung durch Ähnlichkeitstransformation auseinander hervorgehen.

Aus dem Ähnlichkeitssatz ergibt sich in Verbindung mit den Sätzen 1 (erster Teil) und 2 unmittelbar folgender

SATZ 6. *Enthält der Sektor $a \leq \varphi \leq b$ keinen Integralstrahl der homogenen Gleichung, so gibt es ein positives R derart, daß jede durch einen Punkt $r_0 < R, a < \varphi_0 < b$ gehende Integralkurve der vollständigen Gleichung den Sektor im Endlichen durchsetzt und seine beiden Begrenzungen in Punkten mit positiven r schneidet. Es ist nicht möglich, daß eine Integralkurve innerhalb des Sektors a, b den Punkt $r = 0$ erreicht. Besitzt die homogene Gleichung überhaupt keine Integralstrahlen, ist also überall $f(\varphi) \neq \varphi$ und $f(\varphi) \neq \varphi - \pi$, so sind alle Integralkurven von (2), die einen Punkt $r_0 < R$ enthalten, entweder geschlossene Kurven oder sie nähern sich dem Ursprung spiralförmig.*

Um diese Behauptungen zu beweisen, muß man nur von einer beliebigen Lösung C' der homogenen Gleichung ausgehen, ein genügend kleines ε wählen und dann λ_0 nach Satz 5 bestimmen. Es ist zu beachten, daß nach (17) die Kurve C innerhalb a, b durch eine eindeutige Funktion r von φ darstellbar ist. Liegt C' außerhalb eines Kreises vom Radius ϱ so genügt $R = \frac{\varrho}{\lambda_0}$ den Bedingungen des Satzes 6. — Würde eine Integralkurve innerhalb a, b gegen den Nullpunkt gehen, so müßte sie notwendig Integralkurven, die den Sektor durchsetzen, schneiden.

Verschiedene weitere gestaltliche Eigenschaften der Integralkurven von (2) lassen sich aus Satz 5 gewinnen. Z.B. die, daß im Falle der Spirale, wenn $r_1, r_2, r_3, \dots$ die Folge der Schnittpunkte mit einem festen Strahl bezeichnet, der Quotient $\frac{r_n}{r_{n+1}}$ einem festen Grenzwert zustrebt usf.

§ 5. Vollständige Gleichung. Verhalten zu den Integralstrahlen.

Unser Satz 5 gibt keine Auskunft darüber, wie sich die Integralkurven der vollständigen Gleichung in einem Sektor verhalten, der einen Integralstrahl der homogenen Gleichung enthält. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir die Typen a, b, c getrennt betrachten. Dabei werden b und c als gleich anzusehen sein, da sie sich nur im Unendlichen unterscheiden, der Übergang von der homogenen zur vollständigen Gleichung aber nur in einer beschränkten Umgebung des Anfangspunktes sinnvoll ist. Wir setzen also B anstelle von b und c. Ein Strahl vom Typus a/a heißt auch „Knotenstrahl“, vom Typus B/B „isolierter Strahl“ und vom Typus a/B „Strahl gemischten Verhaltens“. Die drei Typen lassen sich mit Bezug auf die vollständige Differentialgleichung (2) wie folgt charakterisieren.

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß für den betrachteten Strahl $0 < \varphi_v < \pi$, also $f(\varphi_v) = \varphi_v$ gilt. In einer genügend engen Umgebung $\varphi_v - \eta$ bis $\varphi_v + \eta$ ist dann $f(\varphi)$ stetig, $f(\varphi) - \varphi$ ohne weitere Nullstelle und $|f(\varphi) - \varphi| < \frac{\pi}{4}$. Wir wählen dann ein R derart, daß $\delta(R)$ kleiner ist als jede der beiden Zahlen $|f(\varphi_v + \eta) - (\varphi_v + \eta)|$ und $|f(\varphi_v - \eta) - (\varphi_v - \eta)|$, also auch kleiner als $\frac{\pi}{4}$. Um den Nullpunkt auszuschließen, nehmen wir noch einen beliebigen kleinen Radius ϱ und erhalten damit einen *Kreisringsektor* D , der von zwei Geraden $S'(\varphi = \varphi_v - \eta)$ und $S''(\varphi = \varphi_v + \eta)$, sowie von zwei Kreisbögen $K'(r = R)$ und $K''(r = \varrho)$ begrenzt wird.

Für das Gebiet D gilt definitionsgemäß: 1) In allen Punkten mit Einschluß des Randes ist $\vartheta - \varphi = f(\varphi) - \varphi + g(r, \varphi)$ eine stetige Funktion, deren Betrag unter $\frac{\pi}{2}$ liegt, so daß auch $\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)$ und damit $\frac{d\varphi}{dr}$ stetig und beschränkt ist. 2) An den Rändern S' und S'' hat $\vartheta - \varphi$, daher auch $\operatorname{tg}(\vartheta - \varphi)$ und $\frac{d\varphi}{dr}$ je ein konstantes Vorzeichen und zwar dasselbe wie $f(\varphi) - \varphi$. Z zufolge 1 kann in D jede Integralkurve durch eine eindeutige Funktion $\varphi(r)$ dargestellt werden, wobei r einen Teil des Intervalls ϱ, R oder das ganze Intervall durchläuft.

Wir wollen die Integralkurven in D zunächst im Sinne wachsender r verfolgen. Dann ist klar, daß eine Kurve in einem Punkte von K' nur aus D austreten, in einem Punkte von K'' nur in D eintreten kann (vgl. die Pfeile in Abb. 3). Längs S'

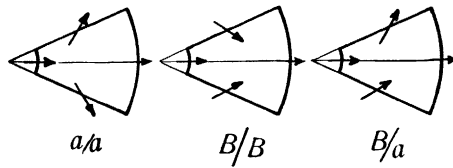


Fig. 3a

3b

3c.

und S'' hängt das Verhalten vom Vorzeichen von $\frac{d\varphi}{dr}$ ab, das nach 2 mit dem von $f(\varphi) - \varphi$ übereinstimmt. Es entsprechen somit den drei Typen a/a, B/B und B/a von Integralstrahlen die in Abb. 3 gekennzeichneten drei Fälle. Die Pfeile zeigen, an welchen Begrenzungen von D die Integralkurven der vollständigen Gleichung (bei wachsendem r) eintreten bzw. austreten. Auf dieser Unterscheidung beruhen die in den folgenden Sätzen 7 bis 9 festgestellten Eigenschaften der Integralkurven.

SATZ 7. Ist $\varphi = \varphi_v < \pi$ ein Integralstrahl der homogenen Gleichung vom Typus a/a (Knotenstrahl), also $f(\varphi_v) = \varphi_v$ und für ein $\eta > 0$

$$(20) \quad \begin{aligned} f(\varphi) - \varphi &> 0 \text{ bei } \varphi_v < \varphi \leq \varphi_v + \eta \\ f(\varphi) - \varphi &< 0 \quad ,, \quad \varphi_v - \eta \leq \varphi < \varphi_v, \end{aligned}$$

so gibt es zu jedem Strahl $\varphi = \varphi_0$, der von φ_v durch keinen andern Integralstrahl getrennt wird, ein R derart, daß alle durch $r_0 (< R)$, φ_0 hindurchgehenden Integralkurven in $r=0$ einmünden und hier den Strahl $\varphi = \varphi_v$ berühren. (Ist φ_v der einzige Integralstrahl, so wird er durch die beiden Enden der Integralkurven berührt.)

Nehmen wir an, das Intervall, das von φ_v in positivem Sinn über $\varphi_v + \eta$ ($\eta > 0$) nach φ_0 führt, enthalte keinen Integralstrahl außer φ_v . Dabei seien ein η und ein dazugehöriges R , sowie ein willkürliches ϱ so gewählt, daß ein Gebiet D der obenbeschriebenen Art entsteht: Der Wert von r verändert sich auf jeder Integralkurve monoton innerhalb D und dem Richtungssinn wachsender r entsprechen die Pfeile der Abb. 3a. Für das Intervall $\varphi_v + \eta$ bis φ_0 gilt Satz 6, wonach jede genügend nahe an den Ursprung herankommende Integralkurve den ganzen Sektor durchsetzen muß. Beachtet man noch den Ähnlichkeitssatz, so erkennt man, daß bei genügend kleinem r_0 die in r_0 , φ_0 einsetzenden Integralkurven jedenfalls die Begrenzung S'' von D erreichen.

Von hier an nimmt r monoton ab. Der Grenzwert kann nicht

größer als ϱ sein, da sonst der Austritt aus D in einem Punkt der Begrenzungen S' oder S'' erfolgen müßte, was nach unserer Kenntnis der Pfeilrichtungen (die jetzt, bei abnehmendem r , denen der Abb. 3a entgegengesetzt sind) nicht möglich ist. Da ϱ eine beliebig kleine Zahl war, bedeutet dies, daß $\lim r = 0$. Damit ist die erste Behauptung von Satz 7 erwiesen.

Als Tangentenrichtung im Nullpunkt bezeichnen wir den Limes der Sehnenrichtungen, also $\lim \varphi$ für $r = 0$ (falls ein solcher existiert). Nun bleibt φ vom Eintritt der Kurve in den Bereich D bis zum Nullpunkt zwischen den Grenzen $\varphi_\nu \pm \eta$. Gehen wir statt von diesem Geradenpaar $S'S''$ von den Geraden $\varphi_\nu \pm \frac{\eta}{2}$ aus, so gibt es zu ihnen einen Wert R' , für den $\delta(R')$ kleiner ist als jeder der beiden Werte von $f(\varphi) - \varphi$ für $\varphi = \varphi_\nu \pm \frac{\eta}{2}$. Dieses R' , das man kleiner als R voraussetzen darf, bestimmt mit dem neuen Strahlenpaar einen Bereich D' , der die Eigenschaften von D besitzt. Da längs der Integralkurve r monoton gegen Null abnimmt, muß von einer bestimmten Stelle an $r < R'$ bleiben. Die Kurve, die einmal durch S'' in D eingetreten ist, kann nach Satz 6 nicht bis zum Nullpunkt im Sektor $\varphi_\nu + \frac{\eta}{2}, \varphi_\nu + \eta$ bleiben, sie muß daher in den Bereich D' übergehen. Von diesem Augenblick an ist φ auf das Intervall $\varphi_\nu \pm \frac{\eta}{2}$ beschränkt. Führt man mit dieser Betrachtung fort, so sieht man, daß schließlich

$$(21) \quad \varphi_\nu - \frac{\eta}{2^n} \leq \varphi \leq \varphi_\nu + \frac{\eta}{2^n} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

wird, was mit

$$(21') \quad \lim_{r=0} \varphi = \varphi_\nu$$

gleichbedeutend ist.

SATZ 8. Ist $\varphi = \varphi_\nu < \pi$ ein Integralstrahl der homogenen Gleichung vom Typus B|B (isolierter Strahl), also $f(\varphi_\nu) = \varphi_\nu$ und für ein $\eta > 0$

$$(22) \quad \begin{aligned} f(\varphi) - \varphi &< 0 \text{ bei } \varphi_\nu < \varphi \leq \varphi_\nu + \eta, \\ f(\varphi) - \varphi &> 0 \text{ bei } \varphi_\nu - \eta \leq \varphi < \varphi_\nu, \end{aligned}$$

so gibt es 1) mindestens eine Integralkurve der vollständigen Gleichung, die durch $r = 0$ geht und hier den Integralstrahl berührt, 2) zu jedem Intervall a, b , das φ_ν einschließt, aber keinen weiteren Integralstrahl enthält, ein solches positives R , daß alle mit einem $0 < r_0 < R$ in den Sektor a, b eintretenden Integralkurven ohne

den Nullpunkt zu erreichen, schließlich mit monoton wachsendem r den Kreis $r = R$ durchsetzen.

In der Tat kann man, nach dem in der Einleitung dieses Paragraphen Gesagten, innerhalb a, b einen Sektor $\varphi_v \pm \eta$ wählen, der den dort angegebenen Bedingungen genügt. Nach Satz 6 werden in genügender Nähe des Nullpunktes die Sektoren $a, \varphi_v - \eta$ und $\varphi_v + \eta, b$ von allen Integralkurven, ohne daß hierbei $r = 0$ wird, vollständig durchlaufen. Wählen wir zu unserm η das R und ϱ in der früher bezeichneten Weise, so entsteht wieder ein Bereich D . Jede von $\varphi_0 = a$ in genügender Nähe des Ursprungs ausgehende Kurve muß die Begrenzung S' des Bereiches D treffen. Sie kann hier, wie in Abb. 3b festgestellt ist, nur mit wachsendem r eintreten und aus dem Bereich D , da r monoton wächst, nur in einem Punkte des Kreises $r = R$ austreten. Da dasselbe für die von $\varphi_0 = b$ herkommenden Integralkurven gilt, ist die zweite Behauptung des Satzes schon erwiesen.

Nennt man $r_1, \varphi_v - \eta$ die Koordinaten des Eintrittspunktes einer Kurve auf S' und R, φ' die des Austrittspunktes, so ist klar, daß mit abnehmendem r_1 der Wert von φ' nur zunehmen kann, da sich sonst zwei Integralkurven überschneiden müßten. Andererseits ist $\varphi' \leq \varphi_v + \eta$, also bilden die φ' eine monoton wachsende, beschränkte Folge und haben einen Grenzwert Φ' . Das Analoge gilt für die längs S'' in $r_2, \varphi_v + \eta$ eintretenden, bei R, φ'' austretenden Integralkurven: sie bestimmen eine monoton fallende, beschränkte Folge mit dem Grenzwert Φ'' . Dabei ist jedes φ'' größer als jedes φ' , also auch $\Phi'' \geq \Phi'$. Die Integrale, die durch einen Punkt $r = R, \Phi' \leq \varphi \leq \Phi''$ hindurchgehen, haben die Eigenschaften, die im ersten Teil von Satz 8 formuliert wurden.

In der Tat kann eine solche Kurve, wenn wir sie in Richtung abnehmender r verfolgen, weder S' noch S'' in einem Punkt $r > 0$ treffen, ohne sich mit einer Kurve zu überschneiden, die von hier mit noch kleinerem r_1 bzw. r_2 ausgeht. Es muß also auf der betrachteten Integralkurve innerhalb D der Limes von r gleich ϱ und, da ϱ beliebig klein gewählt werden kann, schließlich $\lim r = 0$ sein. Andererseits ist im ganzen Kurvenverlauf für $r < R$ stets $\varphi_v - \eta \leq \varphi \leq \varphi_v + \eta$. Wählt man einen engeren Sektor $\varphi_v \pm \frac{\eta}{2}$, so fällt φ von einem bestimmten R' an in diese engeren Grenzen usf. In der gleichen Weise wie im Falle von Satz 7 folgt hier Gl. (21) und (21').

Der Fall des Integralstrahls vom Typus B/B liegt immer dann

vor, wenn es sich um eine in $r = 0$ reguläre Differentialgleichung handelt, d.h. um eine solche, für die der Ursprung kein singulärer Punkt ist. Hier ist, wie oben erwähnt, $f(\varphi) = \text{const.}$ Es gibt also zwei um 180° von einander verschiedene Integralstrahlen, die beide den Typus B/B aufweisen. Bedeutet $\varphi = a$ irgendeinen mit keinem Integralstrahl zusammenfallenden Strahl, so verläuft jede Integralkurve, die durch einen genügend nahe dem Ursprung liegenden Punkt von $\varphi = a$ geht, so, daß sie, ohne den Ursprung zu erreichen, aus einem Kreis von entsprechend gewähltem Radius R heraustritt. Da die Lösungen der homogenen Gleichung hier aus den Parallelen zu den Integralstrahlen bestehen, folgen aus dem Ähnlichkeitssatz die bekannten Eigenschaften über die Tangenten der Integralkurven der vollständigen Gleichung in der Umgebung des Nullpunktes.

Für den letzten Fall, den eines Integralstrahles vom Typus B/a, können wir die entscheidenden Resultate nur unter einer weiteren Einschränkung für die Funktionen $f(\varphi)$ und $g(r, \varphi)$ beweisen. Wir nehmen zunächst an, daß für f die Voraussetzung Ib auf der positiven Seite des Integralstrahles in ihrer *engern* Form (4) gilt. Es existiert also eine positive Konstante k , derart, daß für ein $\eta > 0$

$$(23) \quad \text{tg} [f(\varphi) - \varphi] \leq k(\varphi - \varphi_v) \quad \text{für} \quad \varphi_v \leq \varphi \leq \varphi_v + \eta.$$

Bezeichnet ferner $\delta_1(r)$ das Maximum von $|g(\varrho, \varphi)|$ im Bereich $\varrho \leq r$ und $\varphi_v \leq \varphi \leq \varphi_v + \eta$, so verlangen wir, daß

$$(24) \quad J(r) = \int_0^r \varrho^{-k-1} \delta_1(\varrho) d\varrho \text{ endlich}$$

sei. Hierin kann natürlich δ_1 auch durch δ ersetzt werden.

SATZ 9. Ist $\varphi = \varphi_v < \pi$ ein Integralstrahl der homogenen Gleichung vom Typus B/a (Strahl gemischten Verhaltens), also $f(\varphi_v) = \varphi_v$ und für ein $\eta > 0$

$$(25) \quad \begin{aligned} f(\varphi) - \varphi &> 0 \text{ bei } \varphi_v < \varphi \leq \varphi_v + \eta \\ f(\varphi) - \varphi &> 0 \text{ bei } \varphi_v - \eta \leq \varphi < \varphi_v, \end{aligned}$$

ferner a, b ein Intervall, das φ_v einschließt, aber keinen weiteren Integralstrahl enthält, so gibt es unter den zusätzlichen Bedingungen (23), (24) ein R derart, daß 1) jede bei $r_0 < R$, $\varphi_0 = b$ in den Sektor a, b eintretende Integralkurve den Strahl $\varphi = \varphi_v$ in $r = 0$ berührt, 2) jede bei $r_0 < R$, $\varphi_0 = a$ eintretende Kurve, ohne den Punkt $r = 0$ zu erreichen, mit schließlich monoton wachsendem r den Kreis $r = R$ überschreitet.

Wir konstruieren um $\varphi = \varphi_v$ einen Bereich D durch Wahl eines geeigneten η und eines zugehörigen R . Der Übergang von a zu $\varphi_v - \eta$ bzw. von b zu $\varphi_v + \eta$ erfolgt wie in den früheren Fällen auf Grund von Satz 6. Eine in einem Punkt $r_0 < R$, $\varphi_0 = \varphi_v - \eta$ in D eintretende Kurve kann gemäß Abb. 3c aus D in einem Punkt von $\varphi = \varphi_v + \eta$ oder von $r = R$ austreten.

Nun betrachten wir die Kurve, deren Polargleichung

$$(26) \quad \varphi = \Phi(r) = \varphi_v + cr^k J(r)$$

lautet, wo c eine noch zu bestimmende Konstante und $J(r)$ das in (24) definierte Integral bezeichnet. Der Tangentenwinkel Θ dieser Kurve wird durch

$$(27) \quad \operatorname{tg}(\Theta - \Phi) = \frac{rd\Phi}{dr} = kcr^k J(r) + c\delta_1(r) = k(\Phi - \varphi_v) + c\delta_1(r)$$

bestimmt. Man sieht, daß die Kurve in $r = 0$ wegen $\delta_1(0) = 0$ den Integralstrahl zur Tangente hat, und daß dann Φ mit r monoton wächst. Die Kurve kann aus dem Bereich D nur austreten in einem Punkte der Geraden $\varphi = \varphi_v + \eta$ oder des Kreises $r = R$. Das erstere können wir ausschließen, indem wir R hinreichend verkleinern. Es gibt dann also einen Punkt mit den Koordinaten Φ_1, R auf der Kurve und sie zerlegt D in zwei Teile, von denen der eine S' enthält und der „untere“ heißen soll, während dem andern „oberen“ S'' angehört.

Man sieht nun leicht, daß eine in $r_0 < R$, $\varphi_0 = \varphi_v - \eta$ eintretende Integralkurve die Linie (26) innerhalb D nicht schneiden kann. Denn zu Beginn bei $r = r_0$ ist $\varphi_0 < \Phi(r_0)$, da Φ nur Werte $\geq \varphi_v$ annimmt. Sodann ist für ein beliebiges $r < R$ auf der Integralkurve

$$(28) \quad \begin{aligned} \frac{rd\varphi}{dr} &= \operatorname{tg}[f(\varphi) - \varphi + g(r, \varphi)] = \\ &= \operatorname{tg}[f(\varphi) - \varphi] + \frac{\operatorname{tg} g}{g} \frac{1 + \operatorname{tg}^2(f - \varphi)}{1 - \operatorname{tg}(f - \varphi)\operatorname{tg} g} g(r, \varphi). \end{aligned}$$

Setzen wir

$$(29) \quad c = \frac{8}{\pi} \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \delta_1(R)},$$

so ist wegen $f - \varphi < \frac{\pi}{4}$ und $|g| < \frac{\pi}{4}$ der Faktor von $g(r, \varphi)$ im letzten Ausdruck von (28) dem Betrag nach kleiner als c , daher wegen (23)

$$(30) \quad \left| \frac{rd\varphi}{dr} \right| \leq k|\varphi - \varphi_v| + c\delta_1(r).$$

Der Vergleich von (27) mit (30) lehrt, daß solange $\varphi < \Phi$ auch $\frac{d\varphi}{dr} < \frac{d\Phi}{dr}$ bleibt, also die Integralkurve niemals, d.h. für kein $r < R$, den φ -Wert der Linie (26) erreichen kann. Die Integralkurve schneidet daher den Kreisbogen $r = R$ an einer Stelle $\varphi_1 < \Phi_1$.

Verfolgt man nun die Folge der längs S' eintretenden Integralkurven bei abnehmendem r_0 , so bilden die zugehörigen φ_1 eine monoton steigende Folge, die nach oben begrenzt ist. Es existiert somit ein Grenzwert $\lim \varphi_1 = \Phi' \leq \Phi_1$. Die Integralkurve, die bei $r_0 = R$, $\varphi_0 = \Phi'$ mit abnehmendem r in den Bereich D eintritt, kann S' in einem Punkt $r > 0$ nicht treffen, sie kann aber auch, der Anordnung der Pfeilrichtungen in Abb. 3c zufolge, nicht in einem Punkt von S'' den Bereich D verlassen. Der Limes der monoton abnehmenden Werte kann daher nur ϱ sein, d.h. die Kurve mündet in $r = 0$; sie zerlegt, ebenso wie die Kurve (26) den Bereich D in einen „oberen“ und „unteren“ Teil.

Betrachten wir nun die Integralkurven, die längs S'' oder in dem Teil von K' mit $\varphi > \Phi'$ in den Bereich D eintreten, so könnten sie, den Pfeilrichtungen nach, in Punkten von S' austreten. Allein, um dies zu tun, müßten sie erst die eben beschriebene Grenzkurve durch R , Φ' schneiden (oder berühren), was nicht möglich ist, weil diese selbst eine Integralkurve ist (und durch jeden Punkt nur *eine* geht). Also münden *alle* längs S'' eintretenden Kurven in $r = 0$. Der φ -Wert bleibt auf jeder dieser Linien in der Grenzen $\varphi_v \pm \eta$, also läßt sich, wie im Falle von Satz 7 zeigen, daß $\lim \varphi = \varphi_v$ ist.

Es ist schließlich leicht einzusehen, daß unsere Zusatzbedingungen (23), (24) in den bisher behandelten Fällen der Gl. (1) und ähnlicher *analytischer* Differentialgleichungen stets erfüllt sind. Denn damit ein Integralstrahl vom Typus B/a vorliegt, also (25) gilt, muß die $f(\varphi)$ -Linie die Gerade $f = \varphi$ *berühren* und nicht schneiden, so daß (23) für jedes positive k befriedigt wird. Andererseits verhält sich in den regulären Fällen $\delta(r)$ oder $\delta_1(r)$ wie eine positive Potenz von r . Demnach wird das Integral (24) gewiß konvergent.

(Eingegangen den 4. Juli 1938.)