Compositio Mathematica

M. J. Belinfante

Der Lévysche Umordnungssatz und seine intuitionistische Übertragung

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 124-135
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__124_0>

Der Lévysche Umordnungssatz und seine intuitionistische Übertragung

von

M. J. Belinfante

Amsterdam

Die zuerst von Lévy [1]) veröffentlichte und später von Steinitz [2]) einwandfrei für den n-dimensionalen Fall bewiesene Verallgemeinerung des Riemannschen Umordnungsprinzips besagt für den zweidimensionalen Fall, daß die Zahlen, die man durch Umordnung einer konvergenten Reihe mit komplexen Gliedern als Reihensumme erhalten kann, in der Zahlenebene entweder einen Punkt oder eine Gerade oder die ganze Ebene bilden.

Für den intuitionistischen Standpunkt ist die Disjunktion „entweder ein Punkt oder eine Gerade oder die ganze Ebene" nicht stichhaltig, wie aus den einfachen Beispielen $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{nk}$, $\sum_1^\infty \frac{(\sqrt{-1})^n}{nk}$ und $\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left\{(\sqrt{-1})^n + (\sqrt{-1})^{3n} + \frac{(\sqrt{-1})^n}{k}\right\}$ (k=Rangnummer derjenigen Ziffer in der Dezimalentwicklung von π, bei der die erste Sequenz 0123456789 in dieser Entwicklung anfängt) ersichtlich. Auch muß der klassische Konvergenzbegriff durch eine intuitionistische Verschärfung [3]) (positive oder negative Konvergenz) ersetzt werden. Im Anschluß an diese Bemerkung beweisen wir als die natürlichen intuitionistischen Übertragungen des Lévyschen Satzes:

A. *Falls eine unendliche Reihe $\sum u_n$ mit komplexen Gliedern*

---

[1]) Nouv. Ann. Math. (4) 5, 1905, 506—511. Da STEINITZ selbst in seiner Kritik der LÉVYschen Arbeit erkennt, daß LÉVY den zweidimensionalen Fall der Hauptsache nach richtig erledigt hat, halte ich es wenigstens für diesen Fall für unberechtigt, den Satz wie üblich mit dem Namen STEINITZ zu verbinden.

[2]) Journal f. r. u. angew. Math. **143** (1913), 128—175.

[3]) Man vergleiche:

L. E. J. BROUWER, Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik [Journ. f. r. u. angew. Math. **154** (1924), 1—7].

A. HEYTING, Mathematische Grundlagenforschung. [Springer, Berlin 1934], S. 23.

zwei Anordnungen hat, die beide positiv bzw. negativ konvergent sind und von einander entfernte Summen s_1 *und* s_2 *haben, so läßt sich jede Zahl* $as_1 + bs_2$ *mit reellen* a *und* b *durch passende Anordnung der Glieder dieser Reihe als Summe der positiv bzw. negativ konvergenten Reihe erzielen.*

B. *Falls eine unendliche Reihe mit komplexen Gliedern drei Anordnungen hat, die positiv bzw. negativ konvergent sind, und deren Summen die Eckpunkte eines Dreiecks bilden, so läßt sich jede komplexe Zahl durch passende Anordnung der Glieder dieser Reihe als Summe der positiv bzw. negativ konvergenten Reihe erzielen.*

Es ist Satz B eine unmittelbare Folge von Satz A, denn wenn der Summenbereich einer Reihe die Eckpunkte eines Dreiecks enthält, so enthält sie nach Satz A jede Seite folglich jeden Strahl durch einen Eckpunkt, mithin die ganze Ebene. Aus dem nun folgenden Beweis für Satz A kann man einen erheblich einfacheren neuen nichtintuitionistischen Beweis für den Levyschen Satz gewinnen, indem man nur den Beweis für die positive Konvergenz beibehält und die Betrachtung der komplex rationalen Hilfszahlen w_i' auf die komplexen Glieder w_i selbst anwendet, wodurch die Einführung dieser Hilfszahlen sich erübrigt.

Hilfssatz I. *Es seien die Glieder* u_i *einer endlichen Reihe* Σu_i *komplexe Zahlen, die dem absoluten Betrage nach kleiner als eine positive Zahl* K *sind, und es sei ihre Summe gleich Null. Alsdann läßt sich eine derartige Anordnung dieser Glieder treffen, daß alle Teilsummen dem absoluten Betrage nach kleiner als* $3K$ *bleiben.*

Vorbemerkung. Wir brauchen diesen Hilfssatz nur für den Fall, daß die Glieder u_i komplex rational sind, und geben unseren Beweis nur für diesen Fall. Den allgemeinen Fall erledigt man, indem man den komplexen Gliedern u_i in solcher Weise komplex rationale Zahlen u_i' zuordnet, daß je zwei einander zugeordneten Zahlen um weniger als $\frac{\varepsilon}{N}$ verschieden sind (N = Anzahl der u_i; ε eine solche positive Zahl, daß für jedes i auch die Ungleichung $|u_i| < K - \varepsilon$ gilt). Die Anwendung des Hilfssatzes auf die Reihe $\Sigma u_i'$ liefert dann eine Anordnung für die u_i', aus welcher die verlangte Anordnung für die zugeordneten u_i sich sofort entnehmen läßt.

Beweis. Wir denken die Reihe zunächst so geordnet, daß für jedes i

$$\arg(u_{i+1}) \geqq \arg(u_i) \tag{1}$$

ist [4]) und bezeichnen die Teilsummen der so geordneten Reihe mit $s_1, s_2, \ldots$. Wir können nun k und $l > k$ derart bestimmen, daß für jedes von $(k; l)$ verschiedene $(i; j)$ die Ungleichung

$$|s_l - s_k| \geqq |s_i - s_j| \tag{2}$$

gilt. Sei $\arg(s_l - s_k) = \varphi$. Wir betrachten zuerst die nicht in s_k vorkommenden Glieder von s_l, welche wir mit v_i bezeichnen. Es ist offenbar für ein solches $v_i = u_{p_i}$

$$\cos\{\arg(v_i) - \varphi\} > 0. \tag{3}$$

Denn wäre (3) nicht erfüllt, so wäre (wie aus (1) und $\arg(u_{k+1}) \leqq \varphi \leqq \arg(u_l) \leqq \varphi + \pi$ ersichtlich) die Ungleichung $\cos\{\arg(u_p) - \varphi\} \leqq 0$ entweder für $p = k + 1$ oder für $p = l$ erfüllt; also hätten wir nach der Cosinusregel entweder $|s_l - s_{k+1}| > |s_l - s_k|$ oder $|s_{l-1} - s_k| > |s_l - s_k|$ entgegen (2).

Wir ordnen nun die Reihe Σv_i um. Als erstes Glied der neuen Reihe Σv_{i_n} wählen wir ein beliebiges v_i. Bei jeder folgenden Wahl bestimmen wir zuerst das Argument φ_1 der Summe aller schon geordneten v_i. Falls $\sin(\varphi_1 - \varphi) > 0$ bzw. $\sin(\varphi_1 - \varphi) < 0$ ist, so wählen wir als nächstes Glied der neuen Reihe ein solches v_i, daß $\sin\{\arg(v_i) - \varphi\} < 0$ bzw. $\sin\{\arg(v_i) - \varphi\} > 0$ ist; sonst wählen wir ein beliebiges v_i. Offenbar gilt für jede Teilsumme σ der so geordneten Reihe Σv_{i_n}

$$|\sigma \sin\{\arg(\sigma) - \varphi\}| < K. \tag{4}$$

Die übrigen Glieder der Reihe Σu_i bezeichnen wir mit w_i. Es ist offenbar

$$\cos\{\arg(w_i) - \varphi\} < 0. \tag{5}$$

Wir ordnen die w_i in analoger Weise. Als erstes Glied der neuen Reihe Σw_{i_n} wählen wir ein beliebiges w_i. Bei jeder folgenden Wahl bestimmen wir zuerst das Argument φ_1 der Summe aller schon geordneten w_i. Ist $\sin(\varphi_1 - \varphi) > 0$ bzw. $\sin(\varphi_1 - \varphi) < 0$, so wählen wir als nächstes Glied der neuen Reihe ein solches w_i, daß $\sin\{\arg(w_i) - \varphi\} < 0$ bzw. $\sin\{\arg(w_i) - \varphi\} > 0$ ist; sonst wählen wir ein beliebiges w_i. Offenbar gilt für jede Teilsumme τ der so geordneten Reihe Σw_{i_n}

$$|\tau \sin\{\arg(\tau) - \varphi\}| < K. \tag{6}$$

---

[4]) Mit $\arg(z)$ ist hier derjenige Wert dieser Funktion gemeint, welcher der Ungleichung $0 \leqq \arg(z) < 2\pi$ genügt.

Jetzt bilden wir aus den Reihen Σv_{i_n} und Σw_{i_n} unter Beibehaltung der gegenseitigen Anordnung ihrer Glieder eine einzige Reihe Σu_{i_n}, indem wir als erstes Glied v_{i_1} wählen und bei jeder folgenden Wahl zuerst das Argument φ_1 der Summe der schon bestimmten u_{i_n} betrachten. Ist $\cos(\varphi_1 - \varphi) \geqq 0$ bzw. $\cos(\varphi_1 - \varphi) < 0$, so wählen wir als nächstes Glied das erstfolgende Glied der Reihe Σw_{i_n} bzw. der Reihe Σv_{i_n}. Für jede Teilsumme T der so entstehenden Reihe Σu_{i_n} gilt offenbar, wie aus (3) und (5) bzw. aus (4) und (6) ersichtlich,

$$|T \cos\{\arg(T) - \varphi\}| < K \tag{7}$$

bzw.

$$|T \sin\{\arg(T) - \varphi\}| < 2K. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt $|T| < 3K$, w.z.b.w.

Hilfssatz Ia. *Es seien die Glieder u_i einer endlichen Reihe Σu_i komplexe Zahlen, die dem absoluten Betrage nach kleiner als eine positive Zahl K sind, und es sei ihre Summe s absolut genommen kleiner als eine positive Zahl L. Alsdann läßt sich eine derartige Anordnung für diese Glieder treffen, daß alle Teilsummen dem absoluten Betrage nach kleiner als $3K + L$ sind.*

Beweis. Bestimmt man eine solche ganze Zahl n, daß $L < nK$ ist, und fügt man der Reihe noch n Glieder zu, die alle $= -\frac{s}{n}$ sind, so ergibt die Anwendung von Hilfssatz I eine Anordnung für die neue Reihe, wobei die Teilsummen absolut genommen kleiner als $3K$ sind. Schafft man nun die hinzugefügten Glieder wieder fort, so ändert sich dadurch jede Teilsumme um weniger als L.

Hilfssatz II. *Es seien die Glieder u_i einer endlichen Reihe Σu_i komplexe Zahlen, die dem absoluten Betrage nach kleiner als eine positive Zahl K sind, und es sei ihre Summe um weniger als K von einer reellen Zahl S verschieden. Es sei s eine solche reelle Zahl, daß $|s| \leqq |S|$ und $sS \geqq 0$ ist. Alsdann läßt sich eine Anzahl dieser Glieder bestimmen, deren Summe um weniger als $2K$ von s verschieden ist.*

Vorbemerkung. Wir brauchen diesen Hilfssatz nur für den Fall, daß die Glieder u_i komplex rational und die Zahlen K, S und s rational sind. Wir geben unseren Beweis also in dieser

Voraussetzung. Der allgemeine Fall wird in analoger Weise wie bei dem Hilfssatz I erledigt.

Beweis. Wir betrachten den Fall, daß S und $s \geqq 0$ sind (der andere Fall wird in ganz derselben Weise erledigt). Wir betrachten zuerst die positiven u_i, falls es solche gibt. Ist ihre Summe $\geqq s$, so wählen wir einfach so lange positive u_i, bis ihre Summe zum ersten Male $> s - K$ ist. Ist die Summe s_0 der positiven Glieder dagegen $< s$ (falls es keine positiven Glieder gibt, setzen wir $s_0 = 0$), so ordnen wir die Glieder mit positivem Imaginärteil derart, daß der Realteil eines Gliedes nie kleiner ist als derjenige des unmittelbar vorangehenden Gliedes. Die Teilsummen der so geordneten Glieder bezeichnen wir mit s'_p $(0 \leqq p \leqq N_1)$. In derselben Weise ordnen wir die Glieder mit negativem Imaginärteil zu einer Reihe, deren Teilsummen wir mit s''_p $(0 \leqq p \leqq N_2)$ bezeichnen. Es ist dann $s'_{N_1} + s''_{N_2}$ um weniger als K von einer positiven Zahl $\geqq S - s_0$ verschieden. Wir ordnen nun jedem s'_p bzw. jedem s''_p diejenigen s''_q bzw. diejenigen s'_q zu, deren Imaginärteil um weniger als K von dem Imaginärteil von $- s'_p$ bzw. $- s''_p$ verschieden ist. Es wird dann jedem s'_p bzw. s''_p wenigstens ein s''_q bzw. s'_q zugeordnet. Auch gibt es offenbar zu jedem Paar s'_{k_1}, s''_{l_1} von einander zugeordneten Teilsummen mit $k_1 + l_1 < N_1 + N_2$ ein zweites Paar s'_{k_2}, s''_{l_2} derart, daß $k_2 - k_1 \geqq 0$, $l_2 - l_1 \geqq 0$ und $k_2 + l_2 > k_1 + l_1$ ist, während die Realteile von $s'_{k_1} + s''_{l_1}$ und $s'_{k_2} + s''_{l_2}$ einen Unterschied kleiner als $2K$ aufweisen. Da der Realteil von $s'_{N_1} + s''_{N_2}$ größer als $S - s_0 - K \geqq s - s_0 - K$ ist, können wir m so wählen, daß der Realteil von $s'_{k_m} + s''_{l_m}$ um weniger als K von $s - s_0$ verschieden ist. Da der Imaginärteil von $s'_{k_m} + s''_{l_m}$ absolut genommen kleiner als K ist, gilt jetzt

$$\left| s_0 + s'_{k_m} + s''_{l_m} - s \right| < 2K.$$

Mithin sind die in $s_0 + s'_{k_m} + s''_{l_m}$ enthaltenen Glieder die gesuchten Glieder.

Beweis von Satz A.

Wie die Betrachtung der Reihe $\Sigma\, u'_n$, $u'_1 = (u_1 - s_2)e^{-i \arg(s_1 - s_2)}$, $u'_n = u_n e^{-i \arg(s_1 - s_2)}$, lehrt, brauchen wir nur den Fall, daß s_1 positiv und s_2 Null ist, zu erledigen. Die verlangte Summe $s = a s_1$ ist dann reell. Weiter lehrt die Betrachtung von $\Sigma\, u'_n$, $u'_1 = - u_1 + s_1$, $u'_n = - u_n$, daß wir keine negativen Werte von s zu betrachten brauchen. Wir beweisen nun erstens, daß wir jede nicht-negative Zahl $< s_1$ als Summe einer Umordnung unserer Reihe erhalten können und zweitens, daß es gelingt, durch Umordnung die Summe $2s$ zu erhalten, sobald eine konvergente Anordnung mit der Summe s und eine zweite konvergente Anordnung mit der Summe Null vorliegt. Durch wiederholte Anwendung dieser beiden Fälle läßt sich dann jede positive Zahl als Summe einer Umordnung erzielen. Es bleibt also nur noch der Fall übrig, daß von der verlangten Summe s weder $s = 0$ noch $s \# 0$ festgestellt ist [5]). Wir bestimmen dann zwei konvergente Umordnungen, welche die Summen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ haben und wenden die Substitution $u_1' = u_1 + \frac{1}{2}$, $u_n' = u_n$ $(n > 1)$ an.

Die nun noch fehlenden Beweise führen wir jedesmal in zwei Etappen. Zuerst geben wir eine Konstruktion an, welche eine Umordnung Σz_n von Σu_n erzeugt, und dann beweisen wir, daß die Reihe Σz_n positiv bzw. negativ konvergent ist und die verlangte Summe hat, falls die vorgelegten Umordnungen Σv_n und Σw_n positiv bzw. negativ konvergent sind.

Erster Fall. Es sei also Σv_n bzw. Σw_n eine (positiv oder negativ) konvergente Umordnung von Σu_n mit der Summe S bzw. mit der Summe Null, und es sei die verlangte Summe s $(0 \leqq s < S)$. Auf der ersten Stufe wählen wir u_1 als erstes Glied der neu zu bildenden Reihe Σz_n, deren Teilsummen wir mit s_n bezeichnen werden. Auf der n-ten Stufe betrachten wir die Summe C der schon auf den vorigen Stufen gewählten Glieder [6]). Wir bestimmen einen Abschnitt A der Reihe Σv_n, welcher alle Glieder von C enthält und einen Abschnitt B der Reihe Σw_n, welcher alle Glieder von A enthält. Die Anzahl der Glieder von B bezeichnen wir mit $h(n)$. Jedem Gliede w_i von B ordnen wir eine komplex rationale Zahl w_i' zu, die um weniger als $\frac{1}{nh(n)+n}$ von w_i verschieden ist. Die Summe der den Gliedern von A, B und C zugeordneten komplex rationalen Zahlen bezeichnen wir bzw. mit A', B' und C'. Es sei weiter s' bzw. S' eine positive rationale Zahl, die um weniger als $\frac{1}{nh(n)+n}$ von s bzw. S verschieden ist. Wir suchen nun eine solche Anzahl von nicht in A'

[5]) Heyting, l.c., S. 20.

[6]) Mit C bezeichnen wir sowohl die Menge der auf den ersten $(n-1)$ Stufen gewählten Glieder als ihre Summe. Eine analoge Verabredung treffen wir für C', A, B usw.

vorkommenden Gliedern b'_i von B', daß der Unterschied zwischen der Summe dieser Glieder und $s' - S'$ dem absoluten Betrage nach so klein möglich wird. Es soll aber wenigstens ein nicht in A' vorkommendes Glied von B' genommen werden. Jetzt bilden wir eine endliche Reihe G', die außer diesen Gliedern b'_i noch diejenigen Glieder von A', die nicht in C' vorkommen enthält, und wir ordnen G' so, daß das Maximum für den absoluten Betrag der Teilsummen von G' so klein wie möglich wird. Sei G die Summe der den Gliedern von G' zugeordneten Glieder in entsprechender Anordnung. Es werden nun auf der n-ten Stufe die so geordneten Glieder von G der Reihe nach als die nächsten Glieder der neu zu bildenden Reihe gewählt. Wir bezeichnen mit $\nu(m)$ eine solche ganze Zahl (inklusive Null), daß C auf der m-ten Stufe der Konstruktion die ersten $\nu(m)$ Glieder der beiden vorgelegten Reihen $\Sigma\, v_n$ und $\Sigma\, w_n$ enthält. Für $m \to \infty$ strebt offenbar $\nu(m)$ gegen ∞. Wir bezeichnen weiter die Rangnummer der Stufe, auf welcher z_n gewählt wird, mit l_n. Wir zeigen nun, daß die durch diese Konstruktion erzeugte Reihe $\Sigma\, z_n$ positiv bzw. negativ konvergent ist und die Summe s hat, falls $\Sigma\, v_n$ und $\Sigma\, w_n$ positiv bzw. negativ konvergent sind.

a) *Es seien $\Sigma\, v_n$ und $\Sigma\, w_n$ positiv konvergent.* Wir zeigen, daß sich zu jedem positiven ε ein solches N bestimmen läßt, daß $|s_n - s| < \varepsilon$ ist, sobald $n > N$ genommen wird. Hierzu setzen wir $\eta = 0{,}01 \cdot \varepsilon$ und bestimmen wir $M > \frac{1}{\eta}$ derart, daß für jedes $n > M$

$$\left|\Sigma_1^n v_i - S\right| < \eta \tag{a}$$

und

$$\left|\Sigma_1^n w_i\right| < \eta \tag{b}$$

ist. Sei nun $m > M$ eine solche ganze Zahl, daß auch $\nu(m) > M$ ist. Auf der m-ten Stufe (und auf jeder höheren Stufe) gilt dann

$$|A' - S'| < \eta + \frac{1}{m} < 2\eta, \tag{c}$$

$$|B'| < \eta + \frac{1}{m} < 2\eta \tag{d}$$

während jedes Glied von B', das nicht in C' vorkommt, dem absoluten Betrage nach $< 3\eta$ ist. Es ist weiter die Summe der Glieder von B', welche nicht in A' vorkommen, nach (c) und (d) um weniger als 4η von $-S'$ verschieden. Aus der Konstruktion von G' erkennt man nun nach dem Hilfssatz II, mit $K = 4\eta$, daß die zuerst gewählten Glieder b'_i von G' eine Summe haben, die um weniger als 8η von $s' - S'$ verschieden ist. Da die übrigen Glieder von G' die nicht in C' vorkommenden Glieder von A' sind, so ist offenbar auch $|C' + G' - A' - (s'-S')| < 8\eta$, mithin nach (c),

$$|C' + G' - s'| < 10\eta\,. \tag{e}$$

Folglich ist auf der $(m+1)$-ten Stufe (und auf jeder höheren Stufe) $|C' - s'| < 12\eta$ und da (e) auch auf dieser Stufe gilt, so ist weiter $|G'| < 22\eta$ und folglich nach Hilfssatz Ia jede Teilsumme von G' dem absoluten Betrage nach kleiner als 31η. Es ist somit jede Teilsumme von $C' + G'$, die nicht in C' enthalten ist, um weniger als 43η von s' verschieden. Mithin ist auf der $(m+1)$-ten Stufe (und auf jeder höheren Stufe) jede Teilsumme von $C + G$ die nicht in C enthalten ist, um weniger als $44\eta < \varepsilon$ von s verschieden. Bestimmen wir nun N derart, daß $l_N > m$ ist, so gilt nach dem vorigen $|s_p - s| < \varepsilon$, sobald $p > N$ genommen wird, w.z.b.w.

b) *Es seien Σv_n und Σw_n negativ konvergent.* Wir beweisen für jedes $\varepsilon > 0$ die Unmöglichkeit des Bestehens einer solchen unendlichen Reihe wachsender positiver ganzer Zahlen $p_1, p_2, \ldots$, daß für jedes i

$$|s_{p_i} - s| > \varepsilon \tag{I}$$

ist. Denken wir uns also ein solches ε und eine derartige Fundamentalreihe $\{p_i\}$ vorgelegt. Wir setzen $\eta = 0{,}01\varepsilon$ und bestimmen ein ganzes $M > \frac{2}{\eta}$. Sei i so groß genommen, daß $m = l_{p_i} - 1 > M$ ist. Falls nun sowohl auf der m-ten als auf der $(m+1)$-ten Stufe die obigen Ungleichungen (c) und (d) erfüllt wären und jedes Glied von B', das nicht in C' vorkommt, dem absoluten Betrage nach $< 3\eta$ wäre, so hätten wir, wie sofort aus dem oben geführten Beweis ersichtlich, $|s_{p_i} - s| < \varepsilon$ entgegen unserer Voraussetzung (I). Es gilt also
entweder

$$\left|\Sigma_1^n v_k - S\right| > \tfrac{1}{2}\eta \tag{II}$$

oder

$$\left|\Sigma_1^n w_k\right| > \tfrac{1}{2}\eta \tag{III}$$

oder aber

$$|w_n| > \eta \tag{IV}$$

für ein gewisses $n = n_i$, das jedenfalls $> \nu(m) = \nu(l_{p_i} - 1)$ ist.

Falls (IV) gilt für ein $n > \nu(m)$, so gilt natürlich auch (III) für ein $n \geqq \nu(m)$.

Wiederholen wir nun diese Untersuchung mit einem solchen $p_j > p_i$, daß $\nu(l_{p_j} - 1) > n_i$ ist, so bekommen wir ein $n = n_j > n_i$, für welches wenigstens eine der Ungleichungen (II) und (III) erfüllt ist. So fortfahrend bekommen wir eine solche Fundamentalreihe $n_i < n_j < \ldots$, daß für jedes ihrer Glieder wenigstens eine der Ungleichungen (II) und (III) erfüllt ist. Da aber nach Voraussetzung weder (II) noch (III) für eine solche Fundamentalreihe erfüllt sein kann, sind wir zu einem Widerspruch gelangt, w.z.b.w.

Zweiter Fall. Es sei $\Sigma\, v_n$ bzw. $\Sigma\, w_n$ eine (positiv oder negativ) konvergente Umordnung von $\Sigma\, u_n$ mit der Summe S bzw. mit der Summe Null. Wir erzeugen in folgender Weise eine (positiv oder negativ) konvergente Reihe mit der Summe $s = 2S$. Auf der ersten Stufe wählen wir u_1 als erstes Glied der neu zu bildenden Reihe $\Sigma\, z_n$, deren Teilsummen wir mit s_n bezeichnen werden. Auf der n-ten Stufe betrachten wir zuerst die Summe C der schon auf den vorigen Stufen gewählten Glieder. Wir bestimmen einen Abschnitt B_1 der Reihe $\Sigma\, v_n$, welcher alle Glieder von C enthält, und einen Abschnitt A der Reihe $\Sigma\, w_n$, welcher alle Glieder von B_1 enthält. Schließlich bestimmen wir einen Abschnitt B_2 der Reihe $\Sigma\, v_n$, welcher alle Glieder von A enthält. Die Anzahl der Glieder von B_2 bezeichnen wir mit $h(n)$. Jedem Gliede v_i von B_2 ordnen wir eine komplex rationale Zahl v'_i zu, die um weniger als $\frac{1}{nh(n)+n}$ von v_i verschieden ist. Ebenso ordnen wir S eine rationale Zahl S' zu, die um weniger als $\frac{1}{nh(n)+n}$ von S verschieden ist. Die Summen der den Gliedern von A, B_1, B_2 und C zugeordneten komplex rationalen Zahlen bezeichnen wir bzw. mit A', B'_1, B'_2 und C'. Wir ordnen nun die Glieder von B'_1, die nicht in C' enthalten sind, und die Glieder von B'_2, die nicht in A' enthalten sind, in solcher Weise zu einer einzigen Reihe G', daß das Maximum des absoluten Betrages der Teilsummen von G' so klein wie möglich wird. Sei G die Summe der den Gliedern von G' zugeordneten Glieder in entsprechender Anordnung. Es werden dann auf der n-ten Stufe die so angeordneten Glieder von G als die nächsten Glieder der neu zu bildenden Reihe $\Sigma\, z_n$ gewählt. Wir bezeichnen mit $\nu(m)$ eine solche ganze Zahl (inklusive Null), daß die Summe C auf der m-ten Stufe der Konstruktion die ersten $\nu(m)$ Glieder der beiden vorgelegten

Reihen $\Sigma\, v_n$ und $\Sigma\, w_n$ enthält. Für $m \to \infty$ strebt offenbar $\nu(m)$ gegen ∞. Wir bezeichnen weiter die Rangnummer der Stufe, auf welcher z_n gewählt wird, mit l_n. Wir beweisen nun, daß die durch unsere Konstruktion erzeugte Reihe $\Sigma\, z_n$ positiv bzw. negativ konvergent ist und die Summe $2S$ hat, falls $\Sigma\, v_n$ und $\Sigma\, w_n$ positiv bzw. negativ konvergent sind.

a) *Es seien $\Sigma\, v_n$ und $\Sigma\, w_n$ positiv konvergent.* Wir zeigen, daß sich zu jedem positiven ε ein solches N bestimmen läßt, daß $|s_n - 2S| < \varepsilon$ ist, sobald $n > N$ genommen wird. Hierzu setzen wir $\eta = 0{,}01 \cdot \varepsilon$ und bestimmen wir $M > \frac{1}{\eta}$ derart, daß für jedes $n > M$

$$\left| \Sigma_1^n v_i - S \right| < \eta \tag{a}$$

und

$$\left| \Sigma_1^n w_i \right| < \eta \tag{b}$$

ist. Sei nun $m > M$ eine solche ganze Zahl, daß auch $\nu(m) > M$ ist. Auf der m-ten Stufe (und auf jeder höheren Stufe) gilt dann

$$|A'| < \eta + \frac{1}{m} < 2\eta, \tag{c}$$

$$|B_1' - S'| < \eta + \frac{1}{m} < 2\eta, \tag{d}$$

$$|B_2' - S'| < \eta + \frac{1}{m} < 2\eta, \tag{e}$$

während jedes Glied von B_2', das nicht in C' enthalten ist, dem absoluten Betrage nach $< 3\eta$ ist. Es ist nach (c) und (e) die Summe derjenigen Glieder von B_2', die nicht in A' enthalten sind, um weniger als 4η von S' verschieden. Aus der Konstruktion von G' erkennt man nun leicht, daß auch $|C'+G'-B_1'-S'| < 4\eta$ mithin nach (d)

$$|C' + G' - 2S'| < 6\eta \tag{f}$$

ist. Folglich ist auf der $(m+1)$-ten Stufe (und auf jeder höheren Stufe) $|C' - 2S'| < 8\eta$, und da (f) auch auf dieser Stufe gilt, so ist hier $|G'| < 14\eta$ und folglich nach Hilfssatz Ia jede Teilsumme G' dem absoluten Betrage nach $< 23\eta$. Es ist somit jede Teilsumme von $C' + G'$, die nicht in C' enthalten ist, um weniger als 31η von $2S'$ verschieden. Mithin ist auf der $(m+1)$-ten Stufe (und auf jeder höheren Stufe) jede Teilsumme von $C + G$, die nicht in C enthalten ist, um weniger als $33\eta < \varepsilon$ von $2S$ verschieden. Bestimmen wir nun N derart, daß $l_N > m$ ist, so gilt nach dem vorigen $|s_p - 2S| < \varepsilon$, sobald $p > N$ genommen wird, w.z.b.w.

b) *Es seien* Σv_n *und* Σw_n *negativ konvergent.* Wir beweisen für jedes positive ε die Unmöglichkeit des Bestehens einer solchen unendlichen Reihe wachsender positiver ganzer Zahlen $p_1, p_2, \ldots$, daß für jedes i

$$|s_{p_i} - 2S| > \varepsilon \tag{I}$$

ist. Denken wir uns also ein solches ε und eine derartige Fundamentalreihe $p_1, p_2, \ldots$ vorgelegt. Wir setzen $\eta = 0{,}01 \cdot \varepsilon$ und bestimmen ein $M > \frac{2}{\eta}$. Sei i so groß genommen, daß $m = l_{p_i} - 1 > M$ ist. Falls nun sowohl auf der m-ten als auf der $(m+1)$-ten Stufe die obigen Ungleichungen (c), (d) und (e) erfüllt wären und jedes Glied von B'_2, das nicht in C' enthalten ist, dem absoluten Betrage nach $< 3\eta$ wäre, so hätten wir, wie sofort aus dem oben geführten Beweis ersichtlich, $|s_{p_i} - 2S| < \varepsilon$ entgegen unserer Voraussetzung (I). Also gilt entweder

$$|\Sigma_1^n v_k - S| > \tfrac{1}{2}\eta \tag{II}$$

oder

$$|\Sigma_1^n w_k| > \tfrac{1}{2}\eta \tag{III}$$

oder aber

$$|v_n| > \eta \tag{IV}$$

für ein gewisses $n = n_i$, das jedenfalls $> \nu(m) = \nu(l_{p_i} - 1)$ ist. Falls (IV) gilt für ein $n > \nu(m)$, so gilt natürlich auch (II) für ein $n \geqq \nu(m)$. Wiederholen wir nun die Untersuchung mit einem solchen p_j, daß $\nu(l_{p_j} - 1) > n_i$ ist, und fahren wir in dieser Weise fort, so entsteht eine solche Fundamentalreihe $n_i < n_j < \ldots$, daß für jedes Glied entweder (II) oder (III) erfüllt ist. Da aber nach Voraussetzung weder (II) noch (III) für eine Fundamentalreihe solcher Zahlen erfüllt sein kann, sind wir zu einem Widerspruch gelangt.

(Eingegangen den 15. September 1937.)

Nachtrag.

Zusatz A. *Sind von einer Reihe* Σu_n *zwei Anordnungen vorgelegt, die mit der Summe* v *bzw.* w *konvergieren, so läßt sich die Zahl* $\alpha v + (1-\alpha) w$ *für jedes reelle* α *als Summe einer konvergenten Anordnung von* Σu_n *erzielen.*

Zusatz B. *Sind von einer Reihe* Σu_n *drei Anordnungen vorgelegt, die mit der Summe* u, v *und* w *konvergieren, so läßt sich die*

Zahl $\beta u + \gamma v + (1-\beta-\gamma)w$ für reelle β und γ als Summe einer konvergenten Anordnung von $\Sigma\, u_n$ erzielen.

In diesen Sätzen ist mit „konvergent" entweder „positiv" oder „negativ konvergent" gemeint. Es braucht aber für die Zahlen v und w bzw. u, v und w keine Beziehung von der Art $v \# w$ oder $v=w$ usw. bekannt zu sein[7]). Zusatz B ist eine unmittelbare Folgerung von Zusatz A. Denn man hat offenbar entweder $\beta \# 1$ oder $\gamma \# 1$ oder $\beta + \gamma \# 0$. Falls $\beta \# 1$ ist, setze man $\alpha' = \frac{\gamma}{1-\beta}$, $v_1 = u$, $w_1 = \alpha' v + (1-\alpha')w$, folglich $\beta v_1 + (1-\beta)w_1 = = \beta u + \gamma v + (1-\beta-\gamma)w$; falls $\beta + \gamma \# 0$ ist, setze man $\alpha' = 1 - \beta - \gamma$; $\alpha'' = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}$; $v_1 = w$; $w_1 = \alpha'' v + (1-\alpha'')u$, folglich $\alpha' v_1 + (1-\alpha')w_1 = \beta u + \gamma v + (1-\beta-\gamma)w$. Man beweist Zusatz A in derselben Weise wie Satz A. Man braucht nur den Fall, daß $w = 0$ und v reell ist, zu betrachten (man setze $u_1' = (u_1 - w)e^{-i \arg (v-w)}$, $u_n' = u_n e^{-i \arg (v-w)}$) und den Beweis für $0 \leqq \alpha < 1$ und $\alpha = 2$ zu führen. Durch wiederholte Anwendung folgt der Satz für jedes $\alpha \geqq 0$. Für negatives α setze man $u_1' = -u_1 + v$, $u_n' = -u_n$; ist weder $\alpha \# 0$ noch $\alpha = 0$ bekannt, so wende man den Satz an mit $1 - \alpha$ statt α unter Vertauschung von $\Sigma\, v_n$ und $\Sigma\, w_n$. Schließlich läßt sich der in der vorliegenden Arbeit geführte Beweis von Satz A für $0 \leqq s < S$ und $s = 2S$ wörtlich auf die beiden noch zu erledigenden Fälle $0 \leqq \alpha < 1$ und $\alpha = 2$ übertragen, wenn man dort s bzw. S durch αv bzw. v ersetzt und entsprechende Abänderungen bei den approximierenden, rationalen Hilfszahlen s' und S' macht.

(Eingegangen den 10. Januar 1938.)

---

[7]) Die Betrachtung dieser Möglichkeit hat die Redaktion angeregt.