Compositio Mathematica

M. J. Belinfante

Das Riemannsche Umordnungsprinzip in der intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 118-123

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__118_0>

Das Riemannsche Umordnungsprinzip in der intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen

von

M. J. Belinfante

Amsterdam

In seiner Abhandlung „Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" [1]) veröffentlichte Riemann die in der Literatur als Riemannscher Umordnungssatz bezeichnete Bemerkung [2]), daß eine konvergente Reihe mit reellen Gliedern, die nicht konvergent bleibt, wenn man sämtliche Glieder positiv macht, durch geeignete Anordnung der Glieder eine beliebige reelle Summe C erhält. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Wert größer als C und so lange negative bis ihr Wert kleiner als C wird, so beträgt die Abweichung von C nie mehr als der Wert des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes.

Um diese Bemerkung für die intuitionistische Theorie der unendlichen Reihen zu verwerten, muß man der intuitionistischen Auffassung der Konvergenz [3]) Rechnung tragen und auch diejenigen Glieder u_n einschalten, für die weder $u_n = 0$ noch $u_n \# 0$ bekannt ist [4]).

Nennen wir eine Reihe $\sum a_n$ von positiven Gliedern positiv eigentlich divergent, falls sich zu jedem vorgelegten positiven

---

[1]) B. RIEMANN, Gesammelte Werke.

[2]) Daß diese Bemerkung auf DIRICHLET zurückzuführen sei, wie von WEBER-WELLSTEIN [Encyklopädie der Elementarmathematik I, 411] behauptet wird, ist aus der von Riemann zitierten Dirichletschen Abhandlung [Journal f. d. r. u. angew. Math. 4 (1829), 157] jedenfalls nicht ersichtlich.

[3]) Für die intuitionistische Theorie der unendlichen Reihen vergleiche man: L. E. J. BROUWER, Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik [Journal f. r. u. angew. Math. 154, 1—7], M. J. BELINFANTE, Zur intuitionistischen Theorie der unendlichen Reihen [Sitzungsberichte Preuß. Akad. Wiss. 1929, 639—660].

[4]) Für die Bedeutung der Zeichen $\neq$ und $\#$ vergleiche man: A. HEYTING, Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus und Beweistheorie [Springer, Berlin 1934], S. 20.

A eine natürliche Zahl $N(A)$ so bestimmen läßt, daß für $n > N(A)$ die Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n > A$ ist, so haben wir den

SATZ. *Falls die Reihe Σu_n mit reellen Gliedern positiv bzw. negativ konvergent und die Reihe $\Sigma |u_n|$ positiv eigentlich divergent ist, so läßt sich Σu_n so umordnen, daß die neue Reihe positiv bzw. negativ gegen eine beliebig vorgegebene reelle Summe s konvergiert.*

Bemerkung. Der sich auf positive Konvergenz beziehende Teil dieses Satzes ist gewissermaßen die natürliche intuitionistische Übertragung des Riemannschen Umordnungsprinzips; wesentlich neu dagegen ist die Aussage über negativ konvergente Reihen.

Beweis. Wir geben eine Konstruktion, die eine Umordnung der gegebenen Reihe Σu_n erzeugt, und beweisen nachträglich, daß die neue Reihe positiv bzw. negativ konvergent ist und die verlangte Summe s hat.

Hierzu wählen wir auf der ersten Stufe u_1 als erstes Glied der neu zu bildenden Reihe, deren Glieder wir mit $v_1, v_2, \ldots$ und deren Partialsummen wir mit $t_1, t_2, \ldots$ bezeichnen werden. Weiter bezeichnen wir die Anzahl der auf den ersten n Stufen gewählten Glieder mit μ_n, so daß also $\mu_1 = 1$ ist.

Auf der n-ten Stufe wählen wir zunächst das erste nicht auf einer vorigen Stufe gewählte Glied von Σu_n. Sei nun T die Summe *aller* bis jetzt gewählten Glieder und K eine ganze Zahl größer als $|T-s|$. Es gilt nun entweder $|T-s| < \frac{1}{n}$ oder $|T-s| > \frac{1}{2n}$. Im ersten Fall werden keine weiteren Glieder auf der n-ten Stufe gewählt. Es ist dann also:

$$|t_{\mu_n} - s| < \frac{1}{n} \tag{A}$$

Im zweiten Fall bestimmen wir einen Abschnitt $s_p = u_1 + u_2 + \ldots + u_p$ der Reihe Σu_n, der alle in T vorkommenden Glieder enthält. Da $\Sigma |u_n|$ positiv divergent ist, läßt sich nun q so bestimmen, daß

$$|u_{p+1}| + |u_{p+2}| + \ldots + |u_{p+q}| > 2K + 5 \tag{B}$$

ist. Wir ordnen jeder der $(q+1)$ reellen Zahlen $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_{p+q}$, $d = T - s$ eine rationale Zahl $u'_{p+1}, u'_{p+2}, \ldots, u'_{p+q}, d'$ in solcher Weise zu, daß jede der $(q+1)$ reellen Zahlen um weniger als $\frac{1}{n(q+2)}$ von der zugeordneten rationalen Zahl verschieden ist. Es ist dann

$$|u'_{p+1}| + |u'_{p+2}| + \dots + |u'_{p+q}| > 2K + 4 \tag{C}$$

und

$$|d'| < K + 1 . \tag{D}$$

Falls nun d' positiv bzw. negativ ist, nehmen wir so lange negative bzw. positive Glieder der Reihe $u'_{p+1}, u'_{p+2}, \dots, u'_{p+q}$, bis $d' + \Sigma u'_i$ schließlich negativ bzw. positiv geworden ist. Dies ist nur dann unmöglich, wenn die Summe aller negativen bzw. positiven u'_i absolut genommen $\leqq |d'|$ ist. In diesem Fall ist aber

$$|u'_{p+1} + u'_{p+2} + \dots + u'_{p+q}| > 2 ,$$

wie man leicht aus (C) und (D) folgert. Für die zugeordneten Glieder u_i gilt also in diesem besonderen Fall:

$$|s_{p+q} - s_p| = |u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{p+q}| > 1 . \tag{E}$$

Andernfalls wählen wir auf der n-ten Stufe außer dem schon erwähnten Gliede noch die den soeben bestimmten negativen bzw. positiven u'_i zugeordneten Glieder u_i als die nächsten Glieder der zu bildenden Reihe Σv_i. Es gilt dann offenbar für die Summe t_{μ_n} der auf den ersten n Stufen gewählten Glieder:

$$|t_{\mu_n} - s| < \frac{1}{n} + |v_{\mu_n}| \tag{F}$$

und, falls m eine ganze Zahl zwischen μ_{n-1} und μ_n ist,

$$|t_m - s| < |t_{\mu_{n-1}} - s| + \frac{1}{n} + |v_{\mu_{n-1}+1}| \tag{G}$$

Wir behaupten nun, daß die durch diesen Prozeß erzeugte Umordnung Σv_n positiv bzw. negativ gegen s konvergiert, falls Σu_n positiv bzw. negativ konvergent ist.

a) *Es sei Σu_n positiv konvergent.* Wir zeigen, daß sich zu jedem vorgelegten positiven ε (das wir < 1 voraussetzen) ein solches M_ε bestimmen läßt, daß für jedes $m > M_\varepsilon$ $|t_m - s| < \varepsilon$ ist. Dazu bestimmen wir zuerst eine solche ganze Zahl N_1, daß

$$|s_{k+i} - s_k| < \frac{\varepsilon}{4} , \tag{1}$$

also insbesondere

$$|u_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2}$$

ist, sobald $k > N_1$ genommen wird, dann eine ganze Zahl N_2, die größer als die Zahlen N_1 und $\frac{4}{\varepsilon}$ sein soll, und schließlich eine ganze Zahl M_ε, die der Bedingung $M_\varepsilon > \mu_{N_2+1}$ genügt. Für jedes $m > M_\varepsilon$ ist nun $|t_m - s| < \varepsilon$. Denn bestimmen wir für ein solches m die ganze Zahl n so daß $\mu_n < m \leqq \mu_{n+1}$ ist, so gilt $n > N_2 > N_1$. Auf der n-ten Stufe des Prozesses ist somit nach (1) die Ungleichung (E) *nicht* erfüllt; mithin gilt (entweder nach (F) und (2) oder nach (A)):

$$|t_{\mu_n} - s| < \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{3}$$

Bei der Wahl von v_m auf der $(n+1)$-ten Stufe haben wir also, falls $m = \mu_{n+1}$ ist, nach (F) oder (A) $|t_m - s| < \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ und, falls $m < \mu_{n+1}$ ist, nach (G) und (3):

$$\begin{aligned} |t_m - s| &< |t_{\mu_n} - s| + \frac{1}{n+1} + |v_{\mu_n+1}| \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

w.z.b.w.

b) *Es sei* Σu_n *negativ konvergent.* Wir beweisen für jedes positive ε die Unmöglichkeit des Bestehens einer Fundamentalreihe ganzer, positiver Zahlen $m_1 < m_2 < \ldots$ derart, daß für jedes i

$$|s - t_{m_i}| > \varepsilon \tag{4}$$

ist. Wir denken uns also eine solche Zahl $\varepsilon < 1$ und eine derartige Fundamentalreihe vorgelegt. Wir definieren die Zahlen n_i durch die Beziehung:

$$\mu_{n_i} < m_i \leqq \mu_{n_i+1}. \tag{5}$$

Auf der n_i-ten Stufe der Konstruktion haben wir nun *entweder* die Ungleichung (E), also

$$|s_{p_i+q_i} - s_{p_i}| > \varepsilon \tag{6}$$

mit $p_i \geqq n_i$, *oder* (als eine unmittelbare Folgerung von (F) oder (A)):

$$|t_{\mu_{n_i}} - s| < \frac{1}{n_i} + |v_{\mu_{n_i}}|. \tag{7}$$

Im letzten Fall haben wir bei der Wahl von v_{m_i} auf der $(n_i + 1)$-ten Stufe, wenn (E) nicht gilt, entweder $m_i = \mu_{n_i+1}$, also nach (F) oder (A)

$$|t_{m_i} - s| < \frac{1}{n_i+1} + |v_{\mu_{n_i+1}}| \tag{8}$$

oder $m_i < \mu_{n_i+1}$, folglich nach (G) und (7):

$$\left|t_{m_i} - s\right| < \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_i+1} + \left|v_{\mu_{n_i}}\right| + \left|v_{\mu_{n_i}+1}\right|. \tag{9}$$

Betrachten wir ein $n_i > \frac{4}{\varepsilon}$, so folgt aus (8) und (4), bzw. aus (9) und (4) $\left|v_{\mu_{n_i}}\right| > \frac{\varepsilon}{4}$ oder $\left|v_{\mu_{n_i}+1}\right| > \frac{\varepsilon}{4}$, also, da $v_{\mu_{n_i}}$ als Glied der Reihe $\Sigma\, u_n$ eine Rangnummer $p_i \geqq n_i$ hat,

$$\left|u_{p_i}\right| = \left|s_{p_i} - s_{p_i-1}\right| > \frac{\varepsilon}{4} \tag{10}$$

für ein gewisses $p_i \geqq n_i$.

Wenn also $n_i > \frac{4}{\varepsilon}$ ist, so läßt sich, wie aus (6) und (10) ersichtlich, immer ein $p_i \geqq n_i - 1$ und ein q_i so bestimmen, daß $\left|s_{p_i+q_i} - s_{p_i}\right| > \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Wiederholen wir nun die Untersuchung mit einem n_j, das größer als $p_i + q_i$ ist, und fahren wir in dieser Weise fort, so entstehen die Fundamentalreihen $p_i < p_{i+1} < \ldots$ und $q_i, q_{i+1}, \ldots$ mit der Eigenschaft, daß für jedes ν $\left|s_{p_\nu+q_\nu} - s_{p_\nu}\right| > \frac{\varepsilon}{4}$ ist, entgegen der Voraussetzung, daß $\Sigma\, u_n$ negativ konvergiert.

Bemerkungen.

1. In dem vorliegenden Artikel ist nur von positiver eigentlicher Divergenz die Rede. Man könnte eine Reihe Σa_n mit positiven Gliedern negativ eigentlich divergent nennen, wenn für jedes positive A die Unmöglichkeit einer Fundamentalreihe positiver ganzer Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots$ feststeht derart, daß für jedes i die Summe $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_i}$ kleiner als A bleibt. Das Umordnungsprinzip gilt aber nicht ohne weiteres für eine positiv bzw. negativ konvergente Reihe $\Sigma\, u_n$, wenn die aus den Absolutwerten ihrer Glieder gebildete Reihe $\Sigma\,|u_n|$ negativ divergent aber nicht positiv divergent ist. Betrachten wir nämlich die für jedes reelle α positiv konvergente Reihe $\alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{3} - \ldots$, und nehmen wir an, daß für α zwar die Beziehung $\alpha \neq 0$, aber *nicht* die Beziehung $\alpha \# 0$ bewiesen ist, so ist die Reihe $|\alpha| + \left|\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\frac{\alpha}{3}\right| + \ldots$ offenbar negativ eigentlich divergent, denn aus $|\alpha| + \left|\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\frac{\alpha}{3}\right| + \ldots + \left|\frac{\alpha}{n}\right| < A$ für beliebig großes n folgt $|\alpha| < \frac{A}{\log n}$ mithin $\alpha = 0$ statt $\alpha \neq 0$. Um aber aus den Gliedern der Reihe $\alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{3} - \ldots$ eine endliche Gruppe mit einer Summe, welche größer als Eins ist, herzustellen, hat man

mehr als $\frac{1}{\alpha}$ positive Glieder zu nehmen, und das ist offenbar nicht möglich, ohne die Beziehung $\alpha \# 0$ festzustellen.

2. Ein einfaches Beispiel einer negativ konvergenten, nicht positiv konvergenten Reihe Σu_n, für welche die aus den Absolutwerten ihrer Glieder gebildete Reihe $\Sigma |u_n|$ positiv divergent ist, erhält man folgenderweise. Es sei k die Rangnummer in der Dezimalentwicklung von π, bei der die erste Sequenz 0123456789 in dieser Entwicklung anfängt. Setzt man nun $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ für $n < 2k$, $u_{2k} = -1$, $u_{2k+1} = +1$ und $u_{2k+p} = \frac{(-1)^{p+1}}{2k+p-2}$ für $p > 1$, so ist Σu_n negativ konvergent, nicht positiv konvergent und $\Sigma |u_n|$ positiv divergent.

3. Der sich auf die negative Konvergenz beziehende Teil des Beweises benützt außer der positiven Divergenz von $\Sigma |u_n|$ nur die Tatsache, daß Σu_n *non-oszillierend* [1]) ist. Es gilt somit der

Satz. *Falls die Reihe Σu_n mit reellen Gliedern non-oszillierend und die Reihe $\Sigma |u_n|$ positiv divergent ist, so läßt Σu_n sich so umordnen, daß die neue Reihe negativ konvergent ist und eine beliebig vorgegebene Summe hat.*

(Eingegangen den 6. September 1937.)

---

[1]) Brouwer, l.c., 7.