N. TSCHEBOTARÖW

Über irreguläre Darstellungen von halbeinfachen Lieschen Gruppen

Compositio Mathematica, tome 6 (1939), p. 103-117
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1939__6__103_0>

Über irreguläre Darstellungen von halbeinfachen Lieschen Gruppen

von

N. Tschebotaröw

Kasan

In seiner Thèse [1]) hat E. Cartan die Frage nach der minimalen Dimensionszahl des Raumes gelöst, in welchem einfache Liesche Gruppen die sogenannten regulären Darstellungen zulassen. Indem er die Überlegungen seines Vorgängers W. Killing [2]) korrigierte, hat er für jeden Typ von einfachen Lieschen Gruppen folgende minimale Dimensionszahlen erhalten:

A_n	n	E_6	16
B_n	$2n—1$	E_7	27
C_n	$2n—1$	E_8	57
D_n	$2n—2$	F_4	15
		G_2	5.

Unter einer regulären Darstellung verstehe ich folgendes. Es sei eine halbeinfache Liesche Gruppe G von der Ordnung r gegeben. Besitzt G eine Untergruppe G_1 von der Ordnung r_1, so kann G im s-dimensionalen Raume dargestellt werden, wobei

$$s = r - r_1$$

als *Index* der Gruppe G_1 in bezug auf G bezeichnet werden kann. Nun sei

$$X(f) = e^1X_1(f) + e^2X_2(f) + \ldots + e^rX_r(f) \tag{1}$$

ein allgemeiner infinitesimaler Operator der Gruppe G, wobei $e^1, e^2, \ldots, e^r$ als Veränderliche vorausgesetzt werden. Ist

$$(X_i, X_j) = c^s_{ij}X_s(f) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r) \tag{2}$$

---

1) E. Cartan, Sur la structure des groupes finis et continus [Thèse, Nony, Paris, 1894, insbes. 151—152; 2. Aufl., Vuibert, 1933].

2) W. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen [I: Math. Ann. **31** (1888), 252—290; II: **33** (1889), 1—48; III: **34** (1889), 57—122; IV: **36** (1890), 161—189].

(wir lassen die Summationszeichen wie in der Tensoralgebra weg), so gilt

$$(3)\qquad (X, X_i) = \eta_i^s(e) \cdot X_s(f) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

wobei

$$(4)\qquad \eta_i^s(e) = c_{\nu i}^s e^\nu$$

bedeutet. Das charakteristische Polynom

$$(5)\qquad \varphi(\omega) = \begin{vmatrix} \eta_1^1(e) - \omega, & \eta_1^2(e), & \ldots, & \eta_1^r(e) \\ \eta_2^1(e), & \eta_2^2(e) - \omega, & \ldots, & \eta_2^r(e) \\ \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\ \eta_r^1(e), & \eta_r^2(e), & \ldots, & \eta_r^r(e) - \omega \end{vmatrix}$$

(das sogenannte Killingsche Polynom) besitze l identisch verschwindende Wurzeln (l heißt der *Rang* der Gruppe G) und $r - l$ Wurzeln, die bei veränderlichen $e^1, e^2, \ldots, e^r$ im Allgemeinen von Null und (falls G halbeinfach ist) voneinander verschieden sind. Sind numerische Werte von $e^1, e^2, \ldots, e^r$ so gewählt, daß die $r - l$ Wurzeln von Null und voneinander verschieden sind, so nennt man den entsprechenden Operator (1) *regulär*, im Gegenteil *irregulär*. Besitzt die Untergruppe G_1 mindestens einen regulären Operator, so heißt sowohl er wie sie wie auch die ihr entsprechende Darstellung der Gruppe G regulär, andernfalls irregulär.

E. Cartan hat die hier angeführten Dimensionszahlen erhalten unter der Voraussetzung, daß G_1 regulär ist, hält es aber für sehr wahrscheinlich, daß dasselbe auch ohne diese Voraussetzung gelten bleibt. Der Zweck dieser Untersuchung ist, zu beweisen, daß diese Dimensionszahlen auch ohne obenerwähnte Voraussetzung sich nicht erniedrigen lassen. Außerdem zeige ich an einem Beispiel (§ 4), daß es irreguläre Untergruppen gibt, die maximal sind, d.h. nicht in Obergruppen enthalten sind, die ihrerseits echte Untergruppen von G sind.

In den ersten zwei Paragraphen dieser Arbeit will ich die Cartanschen Überlegungen ausführlich wiederholen. Dabei benutze ich die von H. Weyl [3]) und B. L. van der Waerden [4]) eingeführten Bezeichnungen.

[3]) H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen [Math. Zeitschr.: I: **23** (1925), 271—309; II: **24** (1925), 328—376; III: **24** (1925), 377—395].

[4]) B. L. van der Waerden, Die Klassifikation der einfachen Lieschen Gruppen [Math. Zeitschr. **37** (1933), 446—462].

§ 1.

Untergruppen und Darstellungen.

Satz 1. Damit eine Liesche Gruppe G eine transitive (treue oder untreue) Darstellung im s-dimensionalen Raume zulasse, ist notwendig und hinreichend, daß sie eine Untergruppe vom Index s besitzt.

Beweis. 1. Die Bedingung ist notwendig. Denn ist $\overline{G}$ eine transitive Darstellung von G im s-dimensionalen Raume, so besitzt die *Stabilitätsgruppe* $\overline{G}_0$ von $\overline{G}$ (d.h. die Untergruppe, die die Gesamtheit aller Transformationen bildet, die einen Punkt von allgemeiner Lage nicht verschieben) den Index s in bezug auf $\overline{G}$.

2. Die Bedingung ist hinreichend. Zum Beweis betrachten wir eine einfach transitive Darstellung G unserer Gruppe, sowie die zu G reziproke Gruppe L, die bekanntlich mit G isomorph ist. Es seien

$$X_1(f), X_2(f), \ldots, X_r(f);$$
$$\overline{X}_1(f), \overline{X}_2(f), \ldots, \overline{X}_{r-s}(f);$$
$$Y_1(f), Y_2(f), \ldots, Y_r(f);$$
$$\overline{Y}_1(f), \overline{Y}_2(f), \ldots, \overline{Y}_{r-s}(f)$$

Systeme linear unabhängiger infinitesimaler Operatoren der Gruppen G, G_0, L, L_0 (die auch *linear unverbunden*, d.h. durch keine lineare Relationen mit *veränderlichen* Koeffizienten miteinander verbunden sind), wobei G_0 bzw. L_0 Untergruppen vom Index s der Gruppen G bzw. L sind. Sind

$$u_1, u_2, \ldots, u_s$$

sämtliche unabhängige Invarianten der Gruppe L_0, so kann man beweisen, daß sie sich wieder in Invarianten von L_0 verwandeln, wenn wir sie den Transformationen der Gruppe G unterwerfen. Dazu genügt es, zu zeigen, daß die Funktionen

$$X_i(u_\nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ \nu = 1, 2, \ldots, s)$$

Invarianten der Gruppe L_0 sind, d.h. daß gilt

$$\overline{Y}_j X_i(u_\nu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, r-s;\ \nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Da aber die Transformationen der reziproken Gruppen miteinander vertauschbar sind,

$$(X_i, \overline{Y}_j)(f) = X_i\,\overline{Y}_j(f) - \overline{Y}_j\,X_i(f) = 0,$$

so gilt

$$\overline{Y}_j X_i(u_\nu) = X_i \overline{Y}_j(u_\nu)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r;\ j = 1, 2, \ldots, r-s;\ \nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind aber wegen

$$\overline{Y}_j(u_\nu) = 0 \quad (j=1, 2, \ldots, r-s;\ \nu=1, 2, \ldots, s)$$

gleich Null.

Daraus folgt, daß die Größen

$$u_1, u_2, \ldots, u_s$$

sich in Funktionen derselben Größen verwandeln, wenn man in ihnen Transformationen der Gruppe G ausführt. Mit anderen Worten, die Gruppe G induziert in den u_ν eine s-dimensionale Darstellung, womit der Satz bewiesen ist.

Diese Darstellung ist untreu oder treu, je nachdem G_0 einen von der Einheitsgruppe verschiedenen Normalteiler von G als Untergruppe enthält oder nicht.

§ 2.

Reguläre Untergruppen von halbeinfachen Gruppen.

Wir legen der ganzen folgenden Untersuchung die Killing-Cartan-Weylsche Theorie der halbeinfachen Lieschen Gruppen zugrunde. Ist G eine halbeinfache Liesche Gruppe von der Ordnung r und vom Rang l, so enthält sie eine Abelsche Untergruppe Γ von der Ordnung l, die eine beliebig vorgegebene Transformation von G enthält. Ist

$$H = \lambda^1 H_1 + \lambda^2 H_2 + \ldots + \lambda^l H_l$$

der allgemeine infinitesimale Operator von Γ, so sind die Wurzeln des Killingschen Polynoms von H lineare Funktionen der λ^i. $r-l$ dieser Wurzeln sind einfach und von Null verschieden, während die übrigen l Wurzeln gleich Null sind. Jeder Wurzel α entspricht ein infinitesimaler „Wurzeloperator" E_α, so daß gilt

$$[H\ E_\alpha] = \alpha\, E_\alpha, \tag{6}$$

wobei die rechteckigen Klammern die alternierende Operation (2) bezeichnen. Mit α kommt notwendig auch $-\alpha$ als Wurzel des Killingschen Polynoms vor, und es gilt

$$[E_\alpha\ E_{-\alpha}] = H_\alpha = -a^i H_i, \tag{7}$$

wobei
$$\alpha = a_i \lambda^i,$$
$$a_k = g_{ik} a^i$$

und

$$Q(\lambda) = g_{ik}\lambda^i\lambda^k = \Sigma\,\alpha^2$$

die der „Metrik" der Gruppe zugrunde gelegte positive quadratische Form ist.

Es gilt weiter

$$(8) \qquad [E_\alpha E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta},$$

wobei $N_{\alpha,\beta}$ eine Zahl ist, die gleich Null ist, falls $\alpha + \beta$ keine Wurzel des Killingschen Polynoms ist.

Setzen wir in der Formel (6)

$$H = H_\beta = [E_\beta E_{-\beta}],$$

so erhalten wir

$$[H_\beta E_\alpha] = \alpha_\beta E_\alpha,$$

wobei

$$(9) \qquad \alpha_\beta = -\,a_i b^i = -\,g_{ik}b^i a^k$$

bedeutet. Zu beachten ist, daß dieser Ausdruck, welchen man *das skalare Produkt* $-(\alpha\beta)$ der Vektoren α und β nennt, in bezug auf die Indizes i und k symmetrisch ist, so daß gilt

$$\alpha_\beta = \beta_\alpha = -\,(\alpha\beta).$$

Insbesondere bedeutet $(\alpha\alpha)$ das Quadrat der Länge des Vektors α.

Man kann den Ausdruck

$$\frac{(\alpha\beta)}{\sqrt{(\alpha\alpha)(\beta\beta)}} = \cos\varphi$$

als den Cosinus des Winkels φ zwischen den Vektoren α, β bezeichnen. Es gilt offenbar

$$|\cos\varphi| \leqq 1.$$

Andererseits sind die Ausdrücke

$$\frac{2(\alpha\beta)}{(\alpha\alpha)}$$

ganze Zahlen. Daraus schließt man leicht, daß φ nur die Werte

$$90°,\ 60°,\ 45°,\ 30°,\ 0°$$

annehmen kann.

Mit α und β sind auch

$$\alpha \pm \beta, \quad \alpha \pm 2\beta, \ldots, \quad \alpha \pm \frac{2(\alpha\beta)}{(\alpha\alpha)}\beta$$

Wurzeln des Killingschen Polynoms. Daraus folgt die Symmetrie der mittels der Wurzelvektoren gebildeten Figur im l-dimensionalen Raume, welche erlaubt, alle einfachen Lieschen Gruppen leicht zu klassifizieren (vgl. z.B. B. L. van der Waerden, l.c. [4])).

Um alle regulären Untergruppen einer halbeinfachen Gruppe zu bestimmen, beweist E. Cartan folgenden Satz.

Satz 2. Enthält eine Untergruppe G_0 von G einen regulären Operator H_1, welchen wir als die Gruppe Γ erzeugend annehmen wollen, so enthält sie mit dem Operator

$$S = H + a \cdot E_\alpha + b \cdot E_\beta + \ldots \tag{10}$$

auch jeden im Ausdruck (10) wirklich vorkommenden Wurzeloperator

$$H, \ E_\alpha, \ E_\beta, \ldots$$

Beweis. Wir nehmen an, es sei

$$a \neq 0, \ b \neq 0, \ldots$$

Dann enthält G_0 auch die Operatoren

$$\begin{aligned} S_1 &= [H_1 S] = a \cdot \alpha_1 E_\alpha + b \cdot \beta_1 E_\beta + \ldots, \\ S_2 &= [H_1 S_1] = a \cdot \alpha_1^2 \cdot E_\alpha + b \cdot \beta_1^2 \cdot E_\beta + \ldots, \end{aligned} \tag{11}$$

u.s.w.

Die Werte $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ sind wegen der Regularität von H_1 von Null und voneinander verschieden. Darum ist die mittels dieser Größen gebildete Vandermondesche Determinante von Null verschieden. Bilden wir somit die Ausdrücke (11) in der Anzahl, die gleich der in ihnen wirklich vorkommenden Wurzeloperatoren ist, so kann man mit ihrer Hilfe die Operatoren $E_\alpha, E_\beta, \ldots$ linear durch $S_1, S_2, \ldots$ ausdrücken. Da aber die letzteren in G_0 enthalten sind, so ist das auch mit $E_\alpha, E_\beta, \ldots$ der Fall. Sodann zeigt die Gleichung (10), daß auch H in G_0 enthalten ist, w.z.b.w.

Dieser Satz gibt uns eine einfache Regel zur Bildung sämtlicher regulärer Untergruppen von G. Dazu genügt es nämlich, solche Wurzeloperatoren $E_\alpha, E_\beta, \ldots$ als in G_0 vorkommend zu bilden, die einem System der Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots$ entsprechen, welches *additiv* ist. Das bedeutet: mit α und β kommt auch ihre Summe

$\alpha + \beta$ im System vor, falls sie überhaupt eine Wurzel von G ist. Mit α braucht aber $-\alpha$ eventuell nicht im System vorzukommen, da G_0 nicht notwendig halbeinfach ist. Dazu muß man noch die Operatoren einer beliebigen Untergruppe der Abelschen Gruppe Γ hinzufügen, mit der einzigen Einschränkung, daß in jeder Untergruppe jedes

$$H_\alpha = [E_\alpha E_{-\alpha}]$$

enthalten sein soll, falls in G_0 E_α und $E_{-\alpha}$ vorkommen. Haben wir aber die Absicht, eine Untergruppe G_0 von möglichst großer Ordnung zu bilden, so müssen wir zu den Wurzeloperatoren E_α, E_β, ... die ganze Gruppe Γ hinzufügen.

E. Cartan hat geradezu mit Hilfe dieser Regel sein in der Einleitung dieser Arbeit angeführtes Resultat erhalten.

§ 3.

Irreguläre Untergruppen.

Besitzt G eine irreguläre Untergruppe G_0, so sind wir imstande, eine reguläre Untergruppe G_1 von G von größerer Ordnung als G_0 zu finden, deren Struktureigenschaften denen von G_0 sozusagen „in erster Näherung" gleich sind. Es gelten nämlich die zwei folgenden Sätze:

Satz 3. Besitzt eine halbeinfache Liesche Gruppe G von der Ordnung r eine Untergruppe G_0 von der Ordnung r_0, so besitzt sie auch eine reguläre Untergruppe G_1, deren Ordnung r_1 nicht kleiner als r_0 ist.

Beweis. Wir nehmen in G eine Untergruppe Γ, deren erzeugende Operatoren seien

$$H_1, H_2, \ldots, H_l. \tag{12}$$

Die Wurzeln der Killingschen Gleichung von G in bezug auf

$$H = \lambda^1 H_1 + \lambda^2 H_2 + \ldots + \lambda^l H_l$$

sind bekanntlich lineare homogene Funktionen von $\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^l$. Wir ordnen sie lexikographisch an, indem wir dann und nur dann sagen, es sei

$$\alpha = a_1\lambda^1 + a_2\lambda^2 + \ldots + a_l\lambda^l$$

„größer" als

$$\beta = b_1\lambda^1 + b_2\lambda^2 + \ldots + b_l\lambda^l$$

(in Zeichen: $\alpha > \beta$), wenn unter den Differenzen

$$a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_l - b_l$$

die erste nicht verschwindende positiv ist. Dieser Begriff gehorcht offenbar den gewöhnlichen Gesetzen für Ungleichungen. Es sei also

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_m > 0 > -\alpha_m > \ldots > -\alpha_2 > -\alpha_1, \tag{13}$$

wobei

$$m = \frac{r-l}{2}$$

ist.

Indem wir alle unabhängigen Operatoren der Gruppe G_0, die wir uns als durch $2m$ Wurzeloperatoren und l Operatoren von Γ

$$E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}, \ldots, E_{\alpha_m};\ H_1, H_2, \ldots, H_l;\ E_{-\alpha_m}, \ldots, E_{-\alpha_2}, E_{-\alpha_1} \tag{14}$$

ausgedrückt denken, zweckmäßig linear kombinieren, können wir sie in folgende Gestalt bringen:

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= E_{\alpha_{k_1}} + Y_1, \\ X_2 &= E_{\alpha_{k_2}} + Y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X_u &= E_{\alpha_{k_u}} + Y_u, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} X'_1 &= H'_{l_1} + Y'_1, \\ X'_2 &= H'_{l_2} + Y'_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X'_v &= H'_{l_v} + Y'_v, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

$$\left\{\begin{aligned} X''_w &= E_{-\alpha_{m_w}} + Y''_w, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ X''_2 &= E_{-\alpha_{m_2}} + Y''_2, \\ X''_1 &= E_{-\alpha_{m_1}} + Y''_1, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

wobei

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_u \leqq m,\quad l_1 < l_2 < \ldots < l_v \leqq l,\quad m_1 < m_2 < \ldots < m_w \leqq m,$$
$$u + v + w = r_0$$

ist, $H'_{l_1}, H'_{l_2}, \ldots, H'_{l_v}$ gewisse lineare Kombinationen der Operatoren (12) sind und Y_i, Y'_i und Y''_i Operatoren bedeuten, deren

Komponenten zu Wurzeln gehören, die bzw. „kleiner" als α_{k_i}, „negativ" und „kleiner" als $-\alpha_{m_i}$ sind. Die Operatoren (12) betrachten wir als für „zu Null gehörende".

In G_0 sind auch die Operatoren

$$[X_i X_j] = [E_{\alpha_{k_i}} E_{\alpha_{k_j}}] + [E_{\alpha_{k_i}} Y_j] + [Y_i E_{\alpha_{k_j}}] + [Y_i Y_j]$$
$$= N_{k_i, k_j} \cdot E_{\alpha_{k_i}+\alpha_{k_j}} + Z_{i,j}$$

enthalten, wobei die Komponenten des Operators $Z_{i,j}$ zu Wurzeln gehören, die „kleiner" als $\alpha_{k_i} + \alpha_{k_j}$ sind. Diese Operatoren drücken sich also linear durch die Operatoren (15), (16), (17) aus. Ist dabei die Summe $\alpha_{k_i} + \alpha_{k_j}$ eine der Wurzeln (13), so gilt $N_{k_i, k_j} \neq 0$, woraus folgt, daß $\alpha_{k_i} + \alpha_{k_j}$ einer der Wurzeln

$$\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_u}$$

gleich ist. Indem wir analoge Überlegungen für die Alternatoren

$$[X_i, X_j''], \; [X_i'', X_j'']$$

anstellen, überzeugen wir uns, daß das System

$$(18) \qquad \alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}, \ldots, \alpha_{k_u}, \quad -\alpha_{m_w}, \ldots, \quad -\alpha_{m_2}, \quad -\alpha_{m_1}$$

ein additives System von Wurzeln bildet. Daraus folgt aber, daß das System von Operatoren

$$(19) \; E_{\alpha_{k_1}}, \; E_{\alpha_{k_2}}, \ldots, \; E_{\alpha_{k_u}}; \; H_1, H_2, \ldots, H_l; \; E_{-\alpha_{m_w}}, \ldots, E_{-\alpha_{m_2}}, \; E_{-\alpha_{m_1}}$$

eine Gruppe erzeugt, die wir *verkürzte Gruppe* von G_0 nennen und mit G_1 bezeichnen wollen. Diese Gruppe ist regulär, da sie die ganze Gruppe Γ enthält. Ihre Ordnung r_1 ist mindestens gleich r_0, da

$$v \leqq l$$

und folglich

$$r_1 = u + l + w \geqq u + v + w = r_0$$

gilt. Diese Gruppe ist eine echte Untergruppe von G. Das ist evident, falls mindestens eine der Ungleichungen

$$u < m, \; w < m$$

erfüllt ist. Gilt aber dagegen

$$u = m, \; w = m,$$

so bedeutet das, daß in G_0 alle Operatoren vom Typ

$$X_1 = E_{\alpha_1} + Y_1, \ldots, X_m = E_{\alpha_m} + Y_m; \; X''_m = E_{-\alpha_m} + Y''_m, \ldots, X''_1 = E_{-\alpha_1} + Y''_1$$

und also vom Typ

$$[X_i, X''_i] = H_{\alpha_i} + Z_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

enthalten sind. Da aber durch die H_{α_i} bekanntlich die ganze Gruppe Γ erzeugt wird, so folgt daraus

$$v = l.$$

D.h. G_0 selbst fällt mit G zusammen. Somit ist der Satz bewiesen.

Satz 4. Ist die Untergruppe G_0 nicht regulär, so ist die Ordnung von G_1 größer als die Ordnung von G_0.

Beweis. Sind die Ordnungen von G_0 und G_1 einander gleich, so gilt

$$v = l;$$

dann enthält die Gruppe G_0 alle Operatoren der Gestalt

$$X'_1 = H_1 + Y'_1, \; X'_2 = H_2 + Y'_2, \ldots, \; X'_l = H_l + Y'_l,$$

wobei die Operatoren

$$H_1, H_2, \ldots, H_l$$

die ganze Gruppe Γ erzeugen. Nun sehen wir, daß der Operator

$$\lambda^i X'_i = \lambda^i H_i + \lambda^i Y'_i$$

regulär ist. Denn es gilt

$$\begin{aligned}
[\lambda^i X'_i, E_{\alpha_s}] &= [\lambda^i H_i, E_{\alpha_s}] + [\lambda^i Y'_i, E_{\alpha_s}] = \alpha_s E_{\alpha_s} + Z_s, \\
[\lambda^i X'_i, H_s] &= [\lambda^i H_i, H_s] + [\lambda^i Y'_i\, H_s] = Z'_s, \\
[\lambda^i X'_i, E_{-\alpha_s}] &= [\lambda^i H_i, E_{-\alpha_s}] + [\lambda^i Y'_i, E_{-\alpha_s}] = -\alpha_s E_{-\alpha_s} + Z''_s,
\end{aligned}$$

wobei

$$[H_i, E_{\alpha_s}] = a_i^{(s)}, \quad a_i^{(s)} \lambda^i = \alpha_s$$

ist und die Komponenten von Z_s, Z'_s und Z''_s zu Wurzeln gehören, die bzw. „kleiner" als α_s, „negativ" und „kleiner" als $-\alpha_s$ sind.

Nehmen wir demnach als erzeugende Operatoren der Gruppe G die Operatoren (14), so hat das Killingsche Polynom von G in bezug auf $\lambda^i X'_i$ die Gestalt

$$\begin{vmatrix}
\begin{matrix}\alpha_1-\omega, & & & * \\ 0\;, & \alpha_2-\omega, & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0\;, & 0\;, & \ldots, & \alpha_m-\omega\end{matrix} & * & * \\
0 & \begin{matrix}-\omega, & & & * \\ 0\;, & -\omega, & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0\;, & 0\;, & \ldots, & -\omega\end{matrix} & * \\
0 & 0 & \begin{matrix}-\alpha_1-\omega, & & & * \\ 0\;, & -\alpha_2-\omega, & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0\;, & 0\;, & \ldots, & -\alpha_m-\omega\end{matrix}
\end{vmatrix}$$

$$= (-\omega)^l\,(\omega^2-\alpha_1^2)\,(\omega^2-\alpha_2^2)\cdots(\omega^2-\alpha_m^2).$$

Daraus folgt, daß das Killingsche Polynom des Operators $\lambda^i X_i'$ bei veränderlichen λ^i die l-fache Wurzel Null und $2m = r - l$ Wurzeln besitzt, die voneinander und von Null verschieden sind. Das bedeutet, daß der Operator $\lambda^i X_i'$ regulär ist. Ist also G_0 irregulär, so gilt notwendig

$$v < l,$$

woraus folgt, daß die Ordnung von G_0 kleiner ist als die Ordnung von G_1, w.z.b.w.

§ 4.

Beispiel einer maximalen irregulären Untergruppe.

Es entsteht die Frage, ob es unmöglich maximale irreguläre Untergruppen gibt, d.h. ob jede irreguläre Untergruppe G_0 einer halbeinfachen Gruppe G eine Zwischengruppe G_1 besitzt, welche echte Untergruppe von G ist und G_0 als echte Untergruppe enthält. Die Antwort ist negativ, wie ein interessantes Beispiel zeigt, welches mir V. Morosov freundlicherweise mitgeteilt hat.

Man nehme als G die unimodulare lineare homogene Gruppe in $2n$ Veränderlichen, deren Operatoren durch die folgenden erzeugt werden können:

$$H_i = x_i\frac{\partial f}{\partial x_i} - x_{2n}\frac{\partial f}{\partial x_{2n}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1), \tag{20}$$

(21) $$E_{ij} = x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n;\ i \neq j).$$

Wir ordnen jedem Operator

$$\sum_{i,j} a_{ij} x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

die Matrix

$$A = \| a_{ij} \|$$

zu, so daß dem Alternator (X, Y) zweier Operatoren X, Y die Matrix

$$[A, B] = AB - BA$$

entspricht, wobei dem Operator X bzw. Y die Matrix A bzw. B entspricht. Den Operatoren (20), (21) entsprechen die Matrizen

(22) $$e_{ii} - e_{2n, 2n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

(23) $$e_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 2n;\ i \neq j),$$

wobei e_{ij} die Matrix bedeutet, deren Elemente Nullen sind, bis auf das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Kolonne, welches gleich Eins ist. Die e_{ij} gehorchen folgender Multiplikationsregel

(24) $$e_{ij}\, e_{ks} = 0 \qquad (j \neq k),$$

(25) $$e_{ij}\, e_{js} = e_{is}.$$

Die Matrizen (22) entsprechen den Operatoren der Gruppe Γ, die Matrizen (23) den Wurzeloperatoren. Im folgenden werden wir schlechtweg Matrizen als Operatoren bezeichnen. Man kann den allgemeinsten Operator von Γ folgendermaßen schreiben

(26) $$H = \Sigma_{i=1}^{2n} \lambda_i e_{ii},$$

wobei gilt

(27) $$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{2n} = 0.$$

Aus der Relation

$$[H\, e_{ij}] = \Sigma_{s=1}^{2n} \lambda_s\, e_{ss} \cdot e_{ij} - e_{ij}\, \Sigma_{s=1}^{2n} \lambda_s\, e_{ss} = (\lambda_i - \lambda_j) e_{ij},$$

ersehen wir, daß e_{ij} zu der Wurzel $\lambda_i - \lambda_j$ gehört.

Als G_0 nehmen wir die durch die Operatoren

(28) $$H = \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i (e_{ii} - e_{n+i,\, n+i}),$$

$$(29) \qquad e_{ij} - e_{n+j,\,n+i}, \quad e_{i,\,n+j} - e_{j,\,n+i}, \quad e_{n+i,\,j} - e_{n+j,\,i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$$

erzeugte Untergruppe, die sicher irregulär ist. Die dieser Gruppe entsprechenden Wurzelkoinzidenzen sind

$$(30) \qquad \lambda_i - \lambda_j = \lambda_{n+j} - \lambda_{n+i}, \quad \lambda_i - \lambda_{n+j} = \lambda_j - \lambda_{n+i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Ordnung der Gruppe G_0 ist gleich

$$n + 2n(n-1) = n(2n-1).$$

Man kann sich überzeugen, dass G_0 mit der orthogonalen Gruppe in $2n$ Veränderlichen isomorph ist.

Nun wollen wir beweisen, daß G_0 eine maximale Untergruppe von G ist. Dazu genügt es, zu zeigen, daß jede Hinzufügung eines Operators und der durch die Alternation entstandenen Operatoren zu G_0 die ganze Gruppe G ergibt. Wir nehmen an, eine Obergruppe G_1 von G_0 enthalte den Operator

$$\sum_{i=1}^{2n} \mu_i(e_{ii} - e_{2n,\,2n}) + \sum_{i,j=1}^{n} (\varrho_{ij}\, e_{ij} - \varrho_{n+j,\,n+i}\, e_{n+j,\,n+i}) + \sum_{i,j=1}^{n} (\sigma_{i,\,n+j}\, e_{i,\,n+j} + \sigma_{j,\,n+i}\, e_{j,\,n+i}) + \sum_{i,j=1}^{n} (\tau_{n+i,\,j}\, e_{n+i,\,j} + \tau_{n+j,\,i}\, e_{n+j,\,i}).$$

Der Satz 2 besagt, daß in G_1 mindestens einer der einzelnen Operatoren

$$H = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(e_{ii} - e_{2n,\,2n}),$$

$$\varrho_{ij}\, e_{ij} + \varrho_{n+j,\,n+i}\, e_{n+j,\,n+i}, \quad \sigma_{i,\,n+j}\, e_{i,\,n+j} + \sigma_{j,\,n+i}\, e_{j,\,n+i}, \quad \tau_{n+i,\,j}\, e_{n+i,\,j} + \tau_{n+j,\,i}\, e_{n+j,\,i}$$

vorkommt. Fällt G_1 nicht mit G_0 zusammen, so muß dabei mindestens eine dem wirklich in G_1 auftretenden Operator entsprechende Relation

$$\mu_i + \mu_{n+i} = 0, \quad \varrho_{ij} + \varrho_{n+j,\,n+i} = 0, \quad \sigma_{i,\,n+j} + \sigma_{j,\,n+i} = 0, \quad \tau_{n+i,\,j} + \tau_{n+j,\,i} = 0$$

nicht erfüllt sein. Demnach betrachten wir folgende vier Typen von Fällen:

1. $\mu_1 + \mu_{n+1} \neq 0$. Wegen der Relation (27)

$$(\mu_1 + \mu_{n+1}) + (\mu_2 + \mu_{n+2}) + \cdots + (\mu_n + \mu_{2n,\,2n}) = 0$$

folgt daraus mindestens eine der Ungleichungen

$$\mu_1 + \mu_{n+1} \neq \mu_i + \mu_{n+i}.$$

Sei

$$\mu_1 + \mu_{n+1} \neq \mu_2 + \mu_{n+2}.$$

Das bedeutet, daß innerhalb G_1 die Wurzelkoinzidenzen

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}, \quad \lambda_1 - \lambda_{n+2} = \lambda_2 - \lambda_{n+1}$$

zerstört sind. Die Wurzelscharen

$$\begin{aligned} &\varrho_{12}\, e_{12} + \varrho_{n+2,\,n+1}\, e_{n+2,\,n+1}, && \sigma_{1,\,n+2}\, e_{1,\,n+2} + \sigma_{2,\,n+1}\, e_{2,\,n+1}, \\ &\varrho_{21}\, e_{21} + \varrho_{n+1,\,n+2}\, e_{n+1,\,n+2}, && \tau_{n+1,2}\, e_{n+1,2} + \tau_{n+2,1}\, e_{n+2,1} \end{aligned}$$

müssen also zerfallen, d.h. G_1 enthält die Operatoren

$$e_{12},\, e_{21},\, e_{1,\,n+2},\, e_{2,\,n+1},\, e_{n+1,\,2},\, e_{n+2,\,1},\, e_{n+1,\,n+2},\, e_{n+2,\,n+1}.$$

Daraus folgt, daß in G_1 auch folgende Operatoren enthalten sind:

$$\begin{aligned} &[e_{12}, e_{2i} - e_{n+i,n+2}] = e_{1i}, && [e_{21}, e_{1i} - e_{n+i,n+1}] = e_{2i}, \\ &e_{1i} - (e_{1i} - e_{n+i,n+1}) = e_{n+i,n+1}, && e_{2i} - (e_{2i} - e_{n+i,n+2}) = e_{n+i,n+2}, \\ &[e_{n+1,2}, e_{2i} - e_{n+i,n+2}] = e_{n+1,i}, && [e_{n+2,1}, e_{1i} - e_{n+i,n+1}] = e_{n+2,i}, \\ &e_{n+1,i} + (e_{n+i,1} - e_{n+1,i}) = e_{n+i,1}, && e_{n+2,i} + (e_{n+i,2} - e_{n+2,i}) = e_{n+i,2}, \\ &[e_{21}, e_{i2} - e_{n+2,n+i}] = e_{i1}, && [e_{12}, e_{i1} - e_{n+1,n+i}] = -e_{i2}, \\ &e_{i1} - (e_{i1} - e_{n+1,n+i}) = e_{n+1,n+i}, && e_{i2} - (e_{i2} - e_{n+2,n+i}) = e_{n+2,n+i}, \\ &[e_{12}, e_{21}] = e_{11} - e_{22}, && \\ &[e_{i1}, e_{1j}] = e_{ij}\ (i \neq j), && [e_{i1}, e_{1i}] = e_{ii} - e_{11}, \\ &[e_{n+i,1}, e_{1j}] = e_{n+i,j}, && [e_{1,n+i}, e_{j1}] = -e_{j,n+i}, \\ &[e_{n+i,1}, e_{1,n+j}] = e_{n+i,n+j}\ (i \neq j), && \\ &[e_{n+i,n+1}, e_{n+1,n+i}] = e_{n+i,n+i} - e_{n+1,n+1}, && \\ &[e_{1,n+1}, e_{n+1,1}] = e_{11} - e_{n+1,n+1} && \end{aligned}$$

$$(i, j = 3, 4, \ldots, n).$$

Damit sind alle Operatoren von G erschöpft.

2. $$\varrho_{12} + \varrho_{n+2,\,n+1} \neq 0.$$

Mit

$$\varrho_{12}\, e_{12} + \varrho_{n+2,\,n+1}\, e_{n+2,\,n+1}$$

und

$$e_{12} - e_{n+2,\,n+1}$$

sind in G_1 auch

$$e_{12},\, e_{n+2,\,n+1}$$

und also

$$[e_{12},\, e_{21} - e_{n+1,\,n+2}] = e_{11} - e_{22}$$

enthalten. Für diesen Operator ist die Wurzelkoinzidenz

(31) $$\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}$$

zerstört. Wir sind also zum ersten Fall gekommen.

3. $$\sigma_{1,\,n+2} + \sigma_{2,\,n+1} \neq 0.$$

Es sind in G_1 die Operatoren

$$e_{1,\,n+2},\ e_{2,\,n+1}$$

und also

$$[e_{1,n+2},\ e_{n+2,\,1} - e_{n+1,\,2}] = e_{11} - e_{n+2,\,n+2}$$

enthalten. Für diesen Operator ist wieder die Wurzelkoinzidenz (31) zerstört, so daß auch hier der erste Fall eintritt.

4. $$\tau_{n+1,\,2} + \tau_{n+2,\,1} \neq 0.$$

Es sind in G_2 die Operatoren

$$e_{n+1,\,2},\ e_{n+2,\,1}$$

und also

$$[e_{n+1,\,2},\ e_{2,\,n+1} - e_{1,\,n+2}] = e_{n+1,\,n+1} - e_{22}$$

enthalten. Wir kommen wieder zum ersten Fall, da die Relation (31) auch hier zerstört ist.

Wis sehen also, daß in allen Fällen jede Obergruppe von G_0 mit G zusammenfallen muß, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Es ist überraschend, daß die maximale Untergruppe G_0 den enorm großen Index

$$(2n)^2 - 1 - n(2n-1) = (n+1)(2n-1)$$

besitzt.

Dieses Beispiel zeigt, daß man in der Darstellungstheorie nicht irreguläre Gruppen vernachlässigen darf, da sie wesentlich neue Darstellungen leisten können.

Die „verkürzte Gruppe" hat in diesem Falle die Gestalt

$$H = \Sigma_{i=1}^{2n} \lambda_i\, (e_{ii} - e_{2n,\,2n}), \tag{32}$$

$$e_{ij},\ e_{n+i,\,n+j},\ e_{i,\,n+j},\ e_{n+i,j} \quad (i<j;\ i,j=1,2,\ldots,n). \tag{33}$$

Diese Gruppe ist auflösbar. Denn die Operatoren (33) erzeugen einen Normalteiler G_2 der ganzen Gruppe. Andererseits wird die q-te Derivierte $G_2^{(q)}$ von G_2 durch die Operatoren

$$e_{ij},\ e_{n+i,\,n+j},\ e_{i,\,n+j},\ e_{n+i,\,j} \quad (i+q<j;\ i,j=1,2,\ldots,n) \tag{34}$$

erzeugt, woraus folgt

$$G_2^{(n-1)} = 0.$$

(Eingegangen den 24. Februar 1938.)