COMPOSITIO MATHEMATICA

L. KANTOROVITCH
B. VULICH

Sur un théorème de M. N. Dunford

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 430-432
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__430_0>

Sur un théorème de M. N. Dunford

par

L. Kantorovitch et B. Vulich

Léningrad

Dans notre travail „Sur la représentation des opérations linéaires" [1]) nous avons établi un théorème (th. 12) sur la forme générale des opérations $\mathcal{H}_t^t$ qui transforment L dans L^p. Nous avons démontré que dans ce cas les opérations $\mathcal{H}_t^t$ coïncident avec les $\mathcal{H}_o^o$, et nous avons indiqué dans l'annotation (31) que M. Dunford qui avait étudié les opérations transformant L dans L^p, où $p > 1$, les a représentées sous une autre forme. Nous allons montrer comment on peut déduire le résultat de M. Dunford de notre théorème 12. Voici son résultat:

La forme générale des opérations $\mathcal{H}_t^t$ transformant L dans L^p $(p > 1)$ est donnée par la formule

$$U(x) = y(s) = \int_0^1 K(s, t) \cdot x(t) \cdot dt, \tag{1}$$

où $K(s, t)$ est une fonction mesurable superficiellement et où l'on a

$$\text{vrai } \max_t \int_0^1 |K(s, t)|^p \cdot ds = C < \infty . \tag{2}$$

D'ailleurs, on a $\|U\|_t^t = C^{\frac{1}{p}}$.[2])

Le fait que chaque opération (1) satisfaisant à (2) est une $\mathcal{H}_t^t$ qui transforme L dans L^p résulte des inégalités suivantes:

$$\left\{ \int_0^1 ds \cdot \left| \int_0^1 K(s, t) \cdot x(t) \cdot dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \int_0^1 \left[\int_0^1 |K(s, t) \cdot x(t)|^p \cdot ds \right]^{\frac{1}{p}} \cdot dt\,^{3)} \leqq$$

$$\leqq C^{\frac{1}{p}} \cdot \int_0^1 |x(t)| \cdot dt = C^{\frac{1}{p}} \cdot \|x\| .$$

---

[1]) Voir Compositio Mathematica **5** (1937), 119—165.

[2]) Voir Nelson Dunford, Integration and linear operations [Transact. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 485].

[3]) Voir l'annotation (39) de notre article cité.

Réciproquement, soit $U(x)$ une $\mathcal{H}_t^l$ qui transforme L dans L^p. En vertu du th. 12 elle peut être représentée sous la forme

$$U(x) = y(s) = \frac{d}{ds}\int_0^1 K_1(s, t)\cdot x(t)\cdot dt, \tag{3}$$

où $K_1(s, t)$ satisfait aux conditions de ce théorème. Grâce à la condition c, pour presque chaque t il existe presque partout $\frac{d}{ds}K_1(s, t)$, dont l'intégrale indéfinie est $K_1(s, t)$. Nous pouvons en conclure en nous appuyant sur le théorème de Lebesgue-Fubini, que cette dérivée existe presque partout dans le carré $0 \leqq s,\ t \leqq 1$, et qu'elle est une fonction mesurable superficiellement. Nous la désignerons par $K(s, t)$.

Il résulte de la même condition c du th. 12 que

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s, t)|^p\cdot ds\cdot dt < \infty .$$

Par conséquent la fonction de s

$$\varphi(s) = \left[\int_0^1 |K(s, t)|^p\cdot dt\right]^{\frac{1}{p}}$$

est sommable dans $(0, 1)$. $\left(\text{C'est évident, car } \frac{1}{p} < 1.\right)$

Soit s_0 tel que $K(s_0, t)$ existe pour presque tous les t et tel qu'il existe

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{s_0}^{s_0+\frac{1}{n}} \varphi(s)\cdot ds .$$

On a donc

$$n\int_{s_0}^{s_0+\frac{1}{n}} \varphi(s)\cdot ds \leqq A, \tag{4}$$

où A ne dépend pas de n.

Or, on a, grâce à (3)

$$y(s_0) = \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x(t)\cdot\left[\int_{s_0}^{s_0+\frac{1}{n}} K(s, t)\cdot ds\right]\cdot dt. \tag{5}$$

Il résulte de (4) que

$$\int_0^1 \left| n\int_{s_0}^{s_0+\frac{1}{n}} K(s, t)\cdot ds\right|^p\cdot dt \leqq \left\{ n\int_{s_0}^{s_0+\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 |K(s, t)|^p\cdot dt\right)^{\frac{1}{p}}\cdot ds \right\}^p \leqq A .$$

On peut donc passer à la limite sous le signe d'intégration dans (5), si $x(t) \in L^{\frac{p}{p-1}}$, a fortiori pour chaque $x(t)$ bornée, d'où il s'ensuit

$$y(s_0) = \int_0^1 K(s_0, t) \cdot x(t) \cdot dt.$$

Presque toutes les valeurs de s satisfaisant aux conditions imposées sur s_0, on obtient donc que $U(x)$ peut être représentée sous la forme (1) pour toute fonction $x(t)$ bornée. D'ailleurs, (2) résulte immédiatement de la condition c du th. 12. Or, nous avons vu que l'intégrale (1) est déterminée pour toute $x(t) \in L$ dès que (2) est remplie, et qu'elle représente une $\mathfrak{H}_t^t$ transformant L dans L^p. Pour compléter notre démonstration il suffit d'observer que l'ensemble des fonctions bornées est partout dense dans L et que si deux opérations $\mathfrak{H}_t^t$ coïncident dans un ensemble dense, elles sont identiquement égales.

Le fait que $\| U \|_t^t = C^{\frac{1}{p}}$, résulte de l'assertion analogue du th. 12.

Institut de Mathématiques de l'Université de Léningrad.

(Reçu le 22 novembre 1937.)