ERICH ROTHE

Über den Abbildungsgrad bei Abbildungen von Kugeln des Hilbertschen Raumes

Compositio Mathematica, tome 5 (1938), p. 166-176

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1938__5__166_0>

Über den Abbildungsgrad bei Abbildungen von Kugeln des Hilbertschen Raumes

von

Erich Rothe

Breslau

Die folgenden Zeilen bilden eine Fortsetzung der in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit „Über Abbildungsklassen von Kugeln des Hilbertschen Raumes" [1]), deren Kenntnis daher vorausgesetzt wird. Sie ist dem Beweis der folgenden Sätze gewidmet, auf welche mit Ausnahme des letzten bereits in der Einleitung zu der genannten Arbeit hingewiesen wurde:

Satz I. $\mathfrak{y} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ sei eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung der Einheitskugel S^∞ des Hilbertschen Raumes in sich. Wenn bei der Abbildung $\mathfrak{f}$ ein Punkt der Kugel unbedeckt bleibt, so ist der Abbildungsgrad Null.

Satz II (Produktsatz). Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{x} + \mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ ebenfalls eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung der S^∞ in sich, so ist der Abbildungsgrad der zusammengesetzten Abbildung $\mathfrak{g}\mathfrak{f}$ [2]) gleich dem Produkt der Grade der Abbildungen $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{f}$.

Satz III. Ist die Abbildung $\mathfrak{g}$ von Satz II gleichmäßig stetig und eineindeutig, und ist ferner die auf Grund der gemachten Voraussetzungen stetige [3]) inverse Abbildung $\mathfrak{g}^{-1}$ auch gleichmäßig stetig, so ist der Grad von $\mathfrak{g}$ gleich ± 1.

---

[1]) Compositio Mathematica 4 (1937), 294—307. Im Folgenden mit A. zitiert.

[2]) Man beachte, daß mit $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ auch $\mathfrak{g}\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \{\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{G}(\mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x}))\}$ eine Abbildung mit vollstetiger Verschiebung ist.

[3]) Erfüllt in der Tat

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{G}(\mathfrak{x})$$

die Voraussetzungen von Satz III und schreibt man $\mathfrak{g}^{-1}$ in der Form

$$\text{(II)} \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{h}(\mathfrak{y}) = \mathfrak{y} + \mathfrak{H}(\mathfrak{y}),$$

so ist $\mathfrak{H}$ vollstetig. Daß nämlich die Menge der $\mathfrak{H}(\mathfrak{y})$ kompakt ist, folgt wegen $\mathfrak{H}(\mathfrak{y}) = -\mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ aus der vorausgesetzten Vollstetigkeit von $\mathfrak{G}$. Es ist weiter zu zeigen, daß aus

Satz IV. (Satz von der Gebietinvarianz). $\mathfrak{y} = \mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ sei eine auf einer abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ der S^∞ erklärte Abbildung, die $\mathfrak{M}$ eineindeutig auf eine ebenfalls auf der S^∞ gelegenen Punktmenge $\mathfrak{N}$ abbildet. $\mathfrak{g}$ sei gleichmäßig stetig und die Funktion $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{y} - \mathfrak{x}$ sei vollstetig. Von der auf Grund der genannten Voraussetzungen stetigen [3]) inversen Abbildung $\mathfrak{g}^{-1}$ wird ferner vorausgesetzt, daß sie auch gleichmäßig stetig ist. Wenn dann $\mathfrak{x}_0$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{M}$ ist, so ist $\mathfrak{y}_0 = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)$ innerer Punkt von $\mathfrak{N}$.

Beim Beweis der Sätze III und IV wird wesentlich ein Hilfssatz von J. Schauder [4]) benutzt.

§ 1. *Beweis der Sätze I und II.*

Hilfssatz 1. Ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{f}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ eine in einer abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ der S^∞ definierte Abbildung, ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ vollstetig und $\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) \subset S^\infty$, so ist die Menge der Bildpunkte $\mathfrak{y}$ abgeschlossen.

Beweis. $\overline{\mathfrak{y}}$ sei ein Häufungspunkt von Bildpunkten. Es ist zu zeigen, daß $\overline{\mathfrak{y}}$ selbst Bildpunkt ist. Sei $\mathfrak{y}_n = \mathfrak{x}_n + \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine gegen $\overline{\mathfrak{y}}$ konvergierende Folge von Bildpunkten und $\overline{\mathfrak{x}}_n$ eine — auf Grund der Vollstetigkeit von $\mathfrak{F}$

(III) $$\lim_{\alpha \to \infty} \mathfrak{y}_\alpha = \overline{\mathfrak{y}}$$
die Konvergenz der Folge $\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_\alpha)$ mit
(IV) $$\lim_{\alpha \to \infty} \mathfrak{H}(\mathfrak{y}_\alpha) = \mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{y}})$$
folgt. Würde aus (III) nicht die Konvergenz der $\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_\alpha)$ folgen, so enthielte die Folge der $\mathfrak{y}_\alpha$ wegen der Kompaktheit der $\mathfrak{H}(\mathfrak{y})$ zwei Teilfolgen $\overline{\mathfrak{y}}_\alpha$, $\overline{\overline{\mathfrak{y}}}_\alpha$, für die die Folgen $\mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{y}}_\alpha)$, $\mathfrak{H}(\overline{\overline{\mathfrak{y}}}_\alpha)$ gegen von einander verschiedene Limites $\overline{\mathfrak{H}}$, $\overline{\overline{\mathfrak{H}}}$ konvergierten. Die Folgen $\overline{\mathfrak{x}}_\alpha = \mathfrak{h}(\overline{\mathfrak{y}}_\alpha)$ und $\overline{\overline{\mathfrak{x}}}_\alpha = \mathfrak{h}(\overline{\overline{\mathfrak{y}}}_\alpha)$ würden dann nach (II) und (III) gegen die ebenfalls voneinander verschiedenen Limites $\overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{y}} + \overline{\mathfrak{H}}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{x}}} = \overline{\mathfrak{y}} + \overline{\overline{\mathfrak{H}}}$ konvergieren. Hieraus würde sich aber ein Widerspruch gegen die Eineindeutigkeit von $\mathfrak{g}$ ergeben, da auf Grund der Stetigkeit von $\mathfrak{g}$ aus (I) und (III) sowohl $\overline{\mathfrak{y}} = \mathfrak{g}(\overline{\mathfrak{x}})$ als auch $\overline{\mathfrak{y}} = \mathfrak{g}(\overline{\overline{\mathfrak{x}}})$, also $\mathfrak{g}(\overline{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{g}(\overline{\overline{\mathfrak{x}}})$ mit $\overline{\mathfrak{x}} \neq \overline{\overline{\mathfrak{x}}}$ folgen würde. Somit konvergiert die Folge der $\mathfrak{H}(\mathfrak{y}_\alpha)$. Wegen (II) und (III) konvergieren dann die $\mathfrak{x}_\alpha = \mathfrak{h}(\mathfrak{y}_\alpha)$ gegen $\overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{y}} + \lim_{\alpha \to \infty} \mathfrak{H}(\mathfrak{y}_\alpha)$. Anderseits folgt wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{G}$ aus I und III $\overline{\mathfrak{y}} = \overline{\mathfrak{x}} + \mathfrak{G}(\overline{\mathfrak{x}})$, also $\overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{y}} + \mathfrak{H}(\overline{\mathfrak{y}})$, so daß sich (IV) ergibt.

[4]) Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus [Math. Annalen **106** (1932), 661—721], Hilfssatz 6. Im Wesentlichen der gleiche Satz findet sich bei dem gleichen Verfasser bereits in seiner Arbeit „Invarianz des Gebiets in Funktionalräumen" [Studia Mathematica **1** (1929), 123—139], Hilfssatz II.

gewiß existierende — Teilfolge der $\mathfrak{x}_n$, für welche die Folge der $\mathfrak{F}(\bar{\mathfrak{x}}_n)$ konvergiert. Setzt man dann $\bar{\mathfrak{y}}_n = \bar{\mathfrak{x}}_n + \mathfrak{F}(\bar{\mathfrak{x}}_n)$, so ist wegen der Konvergenz der $\bar{\mathfrak{y}}_n$ und $\mathfrak{F}(\bar{\mathfrak{x}}_n)$ auch die Folge der $\bar{\mathfrak{x}}_n$ konvergent. Ihr Limes $\bar{\mathfrak{x}}$ gehört wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}$ und wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{F}$ ist $\bar{\mathfrak{y}} = \bar{\mathfrak{x}} + \mathfrak{F}(\bar{\mathfrak{x}})$, d.h. $\bar{\mathfrak{y}}$ das Bild von $\bar{\mathfrak{x}}$.

Beweis von Satz I. Aus Hilfssatz 1 folgt: ist $\bar{\mathfrak{y}}$ nicht Bildpunkt bei der Abbildung $\mathfrak{f}$, so gibt es ein positives $\varepsilon < 1$, so daß kein Punkt $\mathfrak{y} \subset S^\infty$, für den $|\bar{\mathfrak{y}} - \mathfrak{y}| \leqq 2\varepsilon$ gilt, Bildpunkt ist, also für jedes $\mathfrak{x} \subset S^\infty$ die Ungleichung

$$(1.1) \qquad |\bar{\mathfrak{y}} - \mathfrak{f}(\mathfrak{x})| > 2\varepsilon$$

gilt. Nach A., Hilfssatz 1 konstruieren wir nun eine Schichtenabbildung $\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$, für welche

$$(1.2) \qquad |\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{s}(\mathfrak{x})| < \varepsilon < 1$$

ist. Nach A., Hilfssatz 3 ist dann der Abbildungsgrad $\gamma(\mathfrak{f})$ von $\mathfrak{f}$ gleich dem Grade $\gamma(\mathfrak{s})$ von $\mathfrak{s}$. Es sei nun A^n eine n-dimensionale Kugel, die Äquatorkugel für $\mathfrak{s}$ ist und den Punkt $\bar{\mathfrak{y}}$ enthält. Durch $\mathfrak{s}$ wird eine Abbildung $\mathfrak{s}^n$ der Kugel A^n in sich geliefert, deren Grad $\gamma(\mathfrak{s}^n)$ nach der am Schluß von A. gemachten Bemerkung gleich $\gamma(\mathfrak{s})$ ist. Es genügt daher, $\gamma(\mathfrak{s}^n) = 0$ zu beweisen. Hierzu ist es nach einem bekannten Satz aus der Topologie der endlich dimensionalen Kugeln hinreichend, zu zeigen, daß bei der Abbildung $\mathfrak{s}^n$ ein Punkt von A^n unbedeckt bleibt. Ein solcher Punkt ist aber $\bar{\mathfrak{y}}$; denn da $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{s}^n(\mathfrak{x})$ für $\mathfrak{x} \subset A^n$ ist, so folgt aus (1.1) und (1.2) für jedes $\mathfrak{x} \subset A^n$:

$$|\bar{\mathfrak{y}} - \mathfrak{s}^n(\mathfrak{x})| \geqq |\bar{\mathfrak{y}} - \mathfrak{f}(\mathfrak{x})| - |\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{s}^n(\mathfrak{x})| > 2\varepsilon - \varepsilon > 0\,.$$

Beweis von Satz II. Zunächst setzen wir die gleichmäßige Stetigkeit von $\mathfrak{g}$ voraus. Unter dieser Annahme gibt es eine positive Konstante $\delta < 2$, so daß die Ungleichung

$$(1.3) \qquad |\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1| < \delta < 2$$

die Ungleichung

$$(1.4) \qquad |\mathfrak{g}(\mathfrak{y}) - \mathfrak{g}(\mathfrak{y}_1)| < 1$$

nach sich zieht. Nach A., Hilfssatz 1 konstruieren wir eine Schichtenabbildung $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{s}_1(\mathfrak{x})$, für welche

$$(1.5) \qquad |\mathfrak{f}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{s}_1(\mathfrak{x})| = |\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1| < \delta$$

gilt, sowie eine Schichtenabbildung $\mathfrak{s}_2(\mathfrak{y})$, für welche

$$(1.6)\qquad |\mathfrak{g}(\mathfrak{y}) - \mathfrak{s}_2(\mathfrak{y})| < 1$$

gilt. Nach A., Hilfssatz 3 ist dann

$$(1.7)\qquad \gamma(\mathfrak{f}) = \gamma(\mathfrak{s}_1), \quad \gamma(\mathfrak{g}) = \gamma(\mathfrak{s}_2),$$

wenn wir allgemein den Abbildungsgrad einer Abbildung $\mathfrak{h}$ mit $\gamma(\mathfrak{h})$ bezeichnen. Aus (1.3)—(1.6) folgt weiter

$$\begin{aligned} &|\mathfrak{g}(\mathfrak{f}(\mathfrak{x})) - \mathfrak{s}_2(\mathfrak{s}_1(\mathfrak{x}))| \leqq \\ &|\mathfrak{g}(\mathfrak{f}(\mathfrak{x})) - \mathfrak{g}(\mathfrak{s}_1(\mathfrak{x}))| + |\mathfrak{g}(\mathfrak{s}_1(\mathfrak{x})) - \mathfrak{s}_2(\mathfrak{s}_1(\mathfrak{x}))| = \\ &\qquad = |\mathfrak{g}(\mathfrak{y}) - \mathfrak{g}(\mathfrak{y}_1)| + |\mathfrak{g}(\mathfrak{y}_1) - \mathfrak{s}_2(\mathfrak{y}_1)| < 1 + 1, \end{aligned}$$

so daß wiederum nach A., Hilfssatz 3

$$(1.8)\qquad \gamma(\mathfrak{g}\mathfrak{f}) = \gamma(\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1)$$

gilt. Sei nun A^n ein gemeinsamer n-dimensionaler Äquator für die Schichtenabbildungen $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$. $\mathfrak{s}_1^n, \mathfrak{s}_2^n$ seien die durch $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ gelieferten Abbildungen von A^n in sich. Beachtet man, daß die zusammengesetzte Abbildung $\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1$ ebenfalls eine Schichtenabbildung mit A^n als Äquator ist, so folgt aus der Bemerkung am Schluß von A.

$$(1.9)\qquad \gamma(\mathfrak{s}_1^n) = \gamma(\mathfrak{s}_1);\ \gamma(\mathfrak{s}_2^n) = \gamma(\mathfrak{s}_2);\ \gamma(\mathfrak{s}_2^n\mathfrak{s}_1^n) = \gamma(\mathfrak{s}_2\mathfrak{s}_1).$$

Nach dem Produktsatz aus der Topologie der endlichdimensionalen Kugeln ist nun $\gamma(\mathfrak{s}_2^n\mathfrak{s}_1^n) = \gamma(\mathfrak{s}_2^n)\cdot\gamma(\mathfrak{s}_1^n)$. Aus dieser Gleichung im Verein mit den Gleichungen (1.7)—(1.9) folgt, wie behauptet, $\gamma(\mathfrak{g}\mathfrak{f}) = \gamma(\mathfrak{g})\cdot\gamma(\mathfrak{f})$.

Nunmehr haben wir uns von der Voraussetzung, daß $\mathfrak{g}$ gleichmäßig stetig sei, zu befreien. Zu diesem Zweck beachte man, daß jede Abbildungsklasse auch gleichmäßig stetige Abbildungen enthält, da ja jede Abbildungsklasse Normalabbildungen (A., § 1) enthält und jede Normalabbildung offenbar gleichmäßig stetig ist. Ist also $\mathfrak{g}$ selbst nicht gleichmäßig stetig, so sei $\mathfrak{g}^*(\mathfrak{y}) = \mathfrak{y} + \mathfrak{G}^*(\mathfrak{y})$ eine der gleichen Abbildungsklasse wie $\mathfrak{g}$ angehörende gleichmäßig stetige Abbildung. Nach dem bereits Bewiesenen ist dann $\gamma(\mathfrak{g}^*\mathfrak{f}) = \gamma(\mathfrak{g}^*)\cdot\gamma(\mathfrak{f}) = \gamma(\mathfrak{g})\cdot\gamma(\mathfrak{f})$, und es ist nur noch zu zeigen, daß $\gamma(\mathfrak{g}^*\mathfrak{f}) = \gamma(\mathfrak{g}\mathfrak{f})$ ist, d.h. daß sich $\mathfrak{g}^*\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}\mathfrak{f}$ (im Sinne der in A., § 1 gegebenen Definition) stetig in einander überführen lassen. Da nun $\mathfrak{g}^*$ und $\mathfrak{g}$ zur gleichen Klasse gehören, gibt es eine Überführungsfunktion (A., § 1) $\mathfrak{U}(\mathfrak{y}, t)$ mit $\mathfrak{U}(\mathfrak{y}, 0) = \mathfrak{G}^*(\mathfrak{y})$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{y}, 1) = \mathfrak{G}(\mathfrak{y})$. Setzt man $\mathfrak{u}(\mathfrak{y}, t) = \mathfrak{y} + \mathfrak{U}(\mathfrak{y}, t)$, so ist

$$\mathfrak{u}(\mathfrak{f}(\mathfrak{x}), t) = \mathfrak{x} + \{\mathfrak{F}(\mathfrak{x}) + \mathfrak{U}(\mathfrak{x} + \mathfrak{F}(\mathfrak{x}), t)\},$$

und der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck ist offenbar ebenfalls eine Überführungsfunktion. Da nun $\mathfrak{u}\mathfrak{f}$ für $t = 0$ mit $\mathfrak{g}^*\mathfrak{f}$ und für $t = 1$ mit $\mathfrak{g}\mathfrak{f}$ übereinstimmt, so werden in der Tat die beiden letztgenannten Abbildungen durch $\mathfrak{u}\mathfrak{f}$ stetig ineinander übergeführt.

§ 2. *Beweis der Sätze III und IV.*

Wir formulieren zunächst folgende selbstverständliche Tatsache als

Hilfssatz 2. A^n sei die n-dimensionale Einheitskugel, $\mathfrak{y}_1$ einer ihrer Punkte und α eine positive Zahl < 2. Projiziert man dann die Punkte $\mathfrak{x} \subset A^n$ stereographisch auf die Punkte $\bar{\mathfrak{x}}$ der Tangentialebene im Diametralpunkt von $\mathfrak{y}_1$, so gibt es zwei nur von α, nicht von n, abhängige Zahlen μ, $\mathbf{M}$ von folgender Eigenschaft: gilt für die Punkte $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ von A^n

$$(2.1) \qquad |\mathfrak{x}' - \mathfrak{y}_1| > \alpha, \quad |\mathfrak{x}'' - \mathfrak{y}_1| > \alpha,$$

so gilt für ihre Projektionen $\bar{\mathfrak{x}}'$, $\bar{\mathfrak{x}}''$

$$(2.2) \qquad \mu|\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''| < |\bar{\mathfrak{x}}' - \bar{\mathfrak{x}}''| < \mathbf{M}|\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''|.$$

Hilfssatz 3. $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_1$ seien zwei von einander verschiedene Punkte der S^∞. β sei eine positive Zahl $< |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_0|$ und $\mathfrak{U}$ die durch

$$(2.3) \qquad |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \leqq \beta \qquad (|\mathfrak{x}| = 1)$$

definierte Umgebung von $\mathfrak{x}_0$. α sei eine positive Zahl, für die

$$(2.4) \qquad |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}_1| > \alpha \text{ für } \mathfrak{x} \subset \mathfrak{U}$$

gilt. $\mathfrak{S}(\mathfrak{x})$ sei eine jedenfalls in $\mathfrak{U}$ erklärte Schichtenabbildung [5]), und es gelte

$$(2.5) \qquad |\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{y}_1| > \alpha \text{ für } \mathfrak{x} \subset \mathfrak{U}.$$

Sind ferner μ, $\mathbf{M}$ die in Hilfssatz 2 eingeführten Zahlen, so besitze $\mathfrak{S}(\mathfrak{x})$ noch folgende Eigenschaften:

a) es gibt eine positive Zahl h, so daß

$$(2.6) \qquad |\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{S}(\mathfrak{x}_0)| > \frac{h}{\mu} \text{ für } |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| = \beta$$

ist.

---

[5]) D.h. es sei $\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) \subset S^\infty$ und es gebe eine endlichdimensionale Ebene, der die Verschiebungsvektoren $\mathfrak{S}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{x}$ parallel sind. (In A. wurden nur solche Abbildungen betrachtet, die für *alle* $\mathfrak{x} \subset S^\infty$ definiert waren.)

b) es gibt eine Zahl $m > 0$, so daß aus

$$|\mathfrak{s}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{s}(\mathfrak{x}'')| > \frac{h}{\mathbf{M}} \tag{2.7}$$

die Ungleichung

$$|\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''| > \frac{m}{\mu} \tag{2.8}$$

folgt.

c) es gibt ein Paar positiver Zahlen $\varepsilon_0 < \frac{m}{4}$ und $\delta_0 < \frac{h}{4}$, so daß aus

$$|\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''| > \frac{\varepsilon_0}{\mathbf{M}} \tag{2.9}$$

die Ungleichung

$$|\mathfrak{s}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{s}(\mathfrak{x}'')| > \frac{\delta_0}{\mu} \tag{2.10}$$

folgt.

Ist schließlich $\mathfrak{V}$ die durch

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{s}(\mathfrak{x}_0)| < \frac{h}{\mathbf{M}} \tag{2.11}$$

definierte Umgebung von $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_0)$, wobei h die in a eingeführte Zahl ist, so sei

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1| > \alpha \text{ für } \mathfrak{y} \subset \mathfrak{V}. \tag{2.12}$$

Unter diesen Voraussetzungen wird behauptet: jeder Punkt $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{V}$ ist bei der Abbildung $\mathfrak{s}$ Bild eines Punktes von $\mathfrak{U}$.

Ist über die genannten Voraussetzungen hinaus $\mathfrak{s}$ für alle $\mathfrak{x} \subset S^\infty$ definiert und gilt (2.6) für $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \geqq \beta$, so ist der Abbildungsgrad von $\mathfrak{s}$ gleich ± 1.

Beweis. $\mathfrak{y}^*$ sei ein beliebiger fester Punkt aus $\mathfrak{V}$. A^n sei eine n-dimensionale Kugel, die Äquator bezüglich der Schichtenabbildung $\mathfrak{s}$ ist und die Punkte $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_1$ und $\mathfrak{y}^*$ enthält. Für $\mathfrak{x} \subset A^n$ setzen wir $\mathfrak{s}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{s}^n(\mathfrak{x})$. Es ist dann $\mathfrak{s}^n(\mathfrak{x}) \subset A^n$. Wir führen nun von $\mathfrak{y}_1$ aus die in Hilfssatz 2 geschilderte stereographische Projektion aus, wobei wir allgemein die Projektion eines Kugelpunktes $\mathfrak{x}$ mit $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{P}(\mathfrak{x})$ bezeichnen. $\mathfrak{U}^n$, $\mathfrak{V}^n$ seien die Durchschnitte von $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{V}$ mit A^n, und $\overline{\mathfrak{U}}_n$, $\overline{\mathfrak{V}}_n$ die stereographischen Projektionen von $\mathfrak{U}^n$ bzw. $\mathfrak{V}^n$. Der Abbildung $\mathfrak{y} = \mathfrak{s}^n(\mathfrak{x})$ auf der Kugel A^n entspricht in der Projektionsebene die Abbildung $\bar{\mathfrak{y}} = \sigma^n(\bar{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{P}\mathfrak{s}^n\mathfrak{P}^{-1}(\bar{\mathfrak{x}})$, die jedenfalls in $\overline{\mathfrak{U}}^n$ definiert ist. Für $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'' \subset \mathfrak{U}^n$, d.h. $\bar{\mathfrak{x}}', \bar{\mathfrak{x}}'' \subset \overline{\mathfrak{U}}^n$ gilt wegen (2.4), (2.5) und wegen $\sigma^n(\bar{\mathfrak{x}}) = \overline{\mathfrak{s}^n(\mathfrak{x})}$ nicht nur (2.2) sondern auch

$$(2.13)\quad \mu|\mathfrak{s}^n(\mathfrak{x}')-\mathfrak{s}^n(\mathfrak{x}'')|<|\sigma^n(\bar{\mathfrak{x}}')-\sigma^n(\overline{\mathfrak{x}''})|<\mathbf{M}|\mathfrak{s}^n(\mathfrak{x}')-\mathfrak{s}^n(\mathfrak{x}'')|.$$

Unter Benutzung von (2.2) und (2.13) ergeben sich aus den Eigenschaften a, b, und c der Abbildung $\mathfrak{s}^n(\mathfrak{x})=\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$ die folgenden Eigenschaften der Abbildung $\sigma^n(\bar{\mathfrak{x}})$:

$\bar{\text{a}}$) Ist $\bar{\mathfrak{x}}$ auf dem Rande von $\bar{\mathfrak{U}}^n$, so ist $|\sigma^n(\bar{\mathfrak{x}})-\sigma^n(\bar{\mathfrak{x}}_0)|>h$.

$$\left.\begin{array}{ll}\bar{\text{b}}) & \text{aus } |\sigma^n(\bar{\mathfrak{x}}')-\sigma^n(\overline{\mathfrak{x}''})|>h \text{ folgt } |\bar{\mathfrak{x}}'-\overline{\mathfrak{x}''}|>m \\ \bar{\text{c}}) & \text{aus } |\bar{\mathfrak{x}}'-\overline{\mathfrak{x}''}|>\varepsilon_0 \text{ folgt } |\sigma^n(\bar{\mathfrak{x}}')-\sigma^n(\overline{\mathfrak{x}''})|>\delta_0\end{array}\right\}(\bar{\mathfrak{x}}',\overline{\mathfrak{x}''}\subset\bar{\mathfrak{U}}^n).$$

Nach einem Satz von J. Schauder [6]) ziehen diese Eigenschaften nach sich, daß jeder Punkt $\bar{\mathfrak{y}}$ der Kugel $|\bar{\mathfrak{y}}-\sigma(\bar{\mathfrak{x}}_0)|<h$ Bild eines Punktes $\bar{\mathfrak{x}}\subset\bar{\mathfrak{U}}^n$ bei der Abbildung $\sigma(\bar{\mathfrak{x}})$ ist. Da nun wegen (2.12) die Ungleichung (2.2) gilt, wenn in ihr $\mathfrak{x}''=\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_0)$ und für $\mathfrak{x}'$ ein Punkt $\mathfrak{y}$ von $\mathfrak{B}^n$ gesetzt wird, so folgt, daß $\bar{\mathfrak{B}}^n$ in der Kugel $|\bar{\mathfrak{y}}-\sigma(\bar{\mathfrak{x}}_0)|<h$ enthalten ist. Somit ist jeder Punkt von $\bar{\mathfrak{B}}^n$ Bild eines Punktes $\bar{\mathfrak{x}}\subset\bar{\mathfrak{U}}^n$ bei der Abbildung $\sigma^n(\bar{\mathfrak{x}})$ und daher jeder Punkt von $\mathfrak{B}^n$, insbesondere also $\mathfrak{y}^*$ Bild eines Punktes $\mathfrak{x}\subset\mathfrak{U}^n$ bei der Abbildung $\mathfrak{s}^n(\mathfrak{x})=\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$. Da $\mathfrak{y}^*$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{B}$ war, ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Zum Beweise des zweiten Teils der Behauptung beachte man, daß nach der Bemerkung am Schluß der Arbeit A. der Abbildungsgrad von $\mathfrak{s}$ gleich dem von $\mathfrak{s}^n$ ist. Da nun nach Voraussetzung (2.6) für $|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_0|\geqq\beta$ gilt, so liegen alle Punkte $\mathfrak{x}$, für die $\mathfrak{s}(\mathfrak{x})=\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_0)$ ist, innerhalb $\mathfrak{U}^n$. Der Grad von $\mathfrak{s}^n$ ist daher gleich dem von σ^n, wenn man bei der letzteren Abbildung nur $\bar{\mathfrak{U}}^n$ als Originalmenge betrachtet. Aus dem Beweise zu dem in Anm. (4) erwähnten Satz von Herrn Schauder folgt aber wegen der Eigenschaften $\bar{\text{a}}$, $\bar{\text{b}}$, $\bar{\text{c}}$ von σ^n, daß dieser Grad ± 1 ist [7]).

Nachdem Hilfssatz 3 somit bewiesen ist, gehen wir zum Beweis der Sätze III und IV über, der zunächst für beide gemeinsam geführt wird. Wir benutzen daher vorerst nur die Voraussetzungen für Satz IV.

$\mathfrak{x}_0$ ist innerer Punkt von $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{g}$ eindeutig ist, gibt es gewiß einen von $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{y}_0=\mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)$ verschiedenen Punkt $\mathfrak{y}_1$ der S^∞ sowie eine positive Zahl α, für welche

---

[6]) Siehe Anm. [4]).

[7]) In der Formulierung des Satzes wird das nicht besonders hervorgehoben; daß es aus dem von Herrn Schauder für seinen Satz gegebenem Beweise folgt wird auch bei Leray-Schauder (Topologie et équations fonctionnelles [Ann. Ec. Norm. **51** (1934), 45—78], § 9) erwähnt und benutzt.

$$(2.14) \qquad |\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{y}_1| > 2\alpha$$

$$(2.15) \qquad |\mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0) - \mathfrak{y}_1| > 3\alpha$$

ist. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\mathfrak{g}$ gibt es eine positive Zahl β, so daß für alle $\mathfrak{x}$ der durch

$$(2.16) \qquad |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \leqq \beta$$

definierten Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{x}_0$

$$(2.17) \qquad |\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)| < \alpha$$

ist. Wir dürfen dabei noch β so klein annehmen, daß $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{M}$ und

$$(2.18) \qquad 0 < \beta < \mathrm{Min}\,(\alpha, 1)$$

ist. Dann folgt aus (2.14) und (2.16)

$$(2.19) \qquad |\mathfrak{x} - \mathfrak{y}_1| > \alpha \qquad (\mathfrak{x} \subset \mathfrak{U})$$

und aus (2.15) und (2.17)

$$(2.20) \qquad |\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{y}_1| > 2\alpha \qquad (\mathfrak{x} \subset \mathfrak{U}).$$

Da $\mathfrak{g}$ umkehrbar eindeutig ist, ist für alle nicht im Innern von $\mathfrak{U}$ gelegenen $\mathfrak{x}$, d.h. für

$$(2.21) \qquad |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \geqq \beta$$

$\mathfrak{g}(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)$ verschieden. Daraus folgt auf Grund der Abgeschlossenheit der Menge (2.21) sowie der Vollstetigkeit von $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{x}$ die Existenz einer positiven Zahl, die wir mit $\frac{3h}{\mu}$ bezeichnen [8]), so daß

$$(2.22) \qquad |\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)| > \frac{3h}{\mu} \text{ für } |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \geqq \beta$$

ist (Eigenschaft a'). Da für $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| = \beta$ sowohl (2.17) wie (2.22) gelten, so ist

$$(2.23) \qquad \frac{3h}{\mu} < \alpha.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\mathfrak{g}$ gibt es ferner zu h eine positive Konstante m, so daß aus

$$(2.24) \qquad |\mathfrak{g}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}'')| > \frac{h}{3\mathrm{M}}\,^{8})$$

die Ungleichung

---

[8]) μ, M sind die in Hilfssatz 2 eingeführten Zahlen.

$$(2.25)\qquad |\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''| > \frac{m}{\mu}$$

folgt (Eigenschaft b′). Ist weiter ε_0 eine positive Zahl $< \frac{m}{4}$, so gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\mathfrak{g}^{-1}$ eine positive Zahl δ_0, die wir kleiner als $\frac{h}{4}$ annehmen dürfen, so daß aus

$$(2.26)\qquad |\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}''| > \frac{\varepsilon_0}{\mathbf{M}}$$

die Ungleichung

$$(2.27)\qquad |\mathfrak{g}(\mathfrak{x}') - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}'')| > \frac{3\delta_0}{\mu}$$

folgt (Eigenschaft c′).

Nunmehr sei η eine beliebige der Ungleichung

$$(2.28)\qquad 0 < \eta < \operatorname{Min}\left(\frac{h}{3\mathbf{M}}, \frac{\delta_0}{\mu}\right)$$

genügende Zahl und $\mathfrak{s}(\mathfrak{x})$ eine in $\mathfrak{U}$ definierte Schichtenabbildung[5]), für welche für alle $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{U}$

$$(2.29)\qquad |\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{s}(\mathfrak{x})| < \eta$$

gilt[9]). Für $\mathfrak{s}$ sind die Voraussetzungen des Hilfssatz 3 erfüllt: aus (2.22), (2.29) und (2.28) folgt wegen $\mu < \mathbf{M}$ (2.6) für $|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0| \geqq \beta$. Aus der Eigenschaft b′ von $\mathfrak{g}$ folgt ferner die Eigenschaft b von $\mathfrak{s}$; denn aus (2.7) folgt wegen (2.28) die Ungleichung (2.24), aus dieser nach der Eigenschaft b′ die Ungleichung (2.25), d.h. (2.8), womit b bewiesen ist. Entsprechend ergibt sich c) aus c′). Schließlich gilt auch (2.12). Denn nach (2.15), (2.29), (2.28), (2.11) und (2.23) folgt unter Beachtung von $\mu < \mathbf{M}$

$$\begin{aligned}|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_1| &= |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0) + \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0) - \mathfrak{s}(\mathfrak{x}_0) + \mathfrak{s}(\mathfrak{x}_0) - \mathfrak{y}| \\ &\geqq |\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)| - |\mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0) - \mathfrak{s}(\mathfrak{x}_0)| - |\mathfrak{s}(\mathfrak{x}_0) - \mathfrak{y}| > 3\alpha - \alpha - \alpha.\end{aligned}$$

---

[9]) Im Hilfssatz 1 der Arbeit A., der die Existenz einer beliebig gut approximierenden Schichtenabbildung beweist, wurde vorausgesetzt, daß die zu approximierende Abbildung für alle $\mathfrak{x} \subset S^\infty$ definiert ist. Wählt man aber die im Beweise dieses Hilfssatzes auftretende Äquatorebene E^{n+1} so, daß sie $\mathfrak{x}_0$ enthält, und wählt für die ebenfalls dort auftretende positive Konstante δ eine Zahl $< \frac{1-\beta}{2}$, wo β die im obigen Text angegebene Bedeutung hat (vgl. 2.18), so kann für $\mathfrak{x} \subset \mathfrak{U}$ der dortige Fall 2 nicht auftreten und man sieht ohne Weiteres, daß die dort gegebene Konstruktion auch im Falle einer die Voraussetzungen von Satz IV erfüllenden Abbildung $\mathfrak{g}$ bei vorgegebenem $\eta > 0$ eine in $\mathfrak{U}$ definierte Schichtenabbildung $\mathfrak{s}$ mit der Eigenschaft (2.29) liefert.

Somit können wir Hilfssatz 3 anwenden. Um zunächst Satz III zu beweisen, wählen wir für η eine Zahl, die nicht nur die Ungleichung (2.28) erfüllt, sondern auch kleiner als 2 ist. $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{z}$ sind dann (für alle $\mathfrak{x} \subset S^\infty$ definierte) Abbildungen der S^∞ in sich mit vollstetiger Verschiebung, die nach den Hilfssatz 3 der Arbeit A. den gleichen Abbildungsgrad haben. Da nach Hilfssatz 3 der vorliegenden Arbeit $\mathfrak{z}$ den Grad ± 1 hat, gilt also das Gleiche von $\mathfrak{g}$. Hiermit ist Satz III bewiesen.

Zum Beweise von Satz IV wollen wir zeigen: jeder Punkt $\mathfrak{y}$ der durch

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)| < \frac{h}{\mathrm{M}} \tag{2.30}$$

definierten Umgebung $\mathfrak{W}$ von $\mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)$ ist Bildpunkt bei der Abbildung $\mathfrak{g}$. Sei also $\mathfrak{y}^*$ ein beliebiger fester Punkt von $\mathfrak{W}$. Wir wählen dann eine Folge positiver gegen Null konvergierender Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots$, die neben (2.28) noch die Ungleichung

$$0 < \eta_\nu < \frac{h}{\mathrm{M}} - |\mathfrak{y}^* - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)| \tag{2.31}$$

erfüllen. Für $\nu = 1, 2, \ldots$ seien $\mathfrak{z}_\nu(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x} + \mathfrak{S}_\nu(\mathfrak{x})$ in $\mathfrak{U}$ definierte Schichtenabbildungen, für welche

$$|\mathfrak{g}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{z}_\nu(\mathfrak{x})| = |\mathfrak{G}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{S}_\nu(\mathfrak{x})| < \eta_\nu \tag{2.32}$$

gilt [10]). Nach Hilfssatz 3 ist dann für jedes ν jeder Punkt der durch (2.11), d.h. durch

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{z}_\nu(\mathfrak{x}_0)| < \frac{h}{\mathrm{M}}$$

definierten Umgebung $\mathfrak{V}_\nu$ von $\mathfrak{z}_\nu(\mathfrak{x}_0)$ Bild eines Punktes von $\mathfrak{U}$ bei der Abbildung $\mathfrak{z}_\nu$. Nun ist aber nach (2.32) und (2.31)

$$\begin{aligned} &|\mathfrak{y}^* - \mathfrak{z}_\nu(\mathfrak{x}_0)| \\ &\leqq |\mathfrak{y}^* - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)| + |\mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0) - \mathfrak{z}_\nu(\mathfrak{x}_0)| \\ &< |\mathfrak{y}^* - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)| + \left\{\frac{h}{\mathrm{M}} - |\mathfrak{y}^* - \mathfrak{g}(\mathfrak{x}_0)|\right\} = \frac{h}{\mathrm{M}}, \end{aligned}$$

d.h. es ist $\mathfrak{y}^* \subset \mathfrak{V}_\nu$. Daher ist $\mathfrak{y}^*$ Bildpunkt bei der Abbildung $\mathfrak{z}_\nu$, d.h. es gibt einen Punkt $\mathfrak{x}_\nu$, für den die Gleichung

$$\mathfrak{y}^* = \mathfrak{z}_\nu(\mathfrak{x}_\nu) = \mathfrak{x}_\nu + \mathfrak{S}_\nu(\mathfrak{x}_\nu) \tag{2.33}$$

besteht. Wegen der Vollstetigkeit von $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}) - \mathfrak{x}$ können wir nun aus der Folge der $\mathfrak{x}_\nu$ eine Teilfolge $\mathfrak{x}_{\nu_1}$ so auswählen,

[10]) Vgl. Anm. [9]).

daß die Folge der $\mathfrak{G}(\mathfrak{x}_{\nu_i})$ gegen einen Limes $\mathfrak{G}^*$ konvergiert. Da nach (2.33)

$$\mathfrak{x}_{\nu_i} = \mathfrak{y}^* - \mathfrak{G}(\mathfrak{x}_{\nu_i}) + \{\mathfrak{G}(\mathfrak{x}_{\nu_i}) - \mathfrak{S}_{\nu_i}(\mathfrak{x}_{\nu_i})\}$$

ist, so folgt wegen (2.32), daß die Folge der $\mathfrak{x}_{\nu_i}$ ebenfalls konvergiert, und zwar gegen $\mathfrak{x}^* = \mathfrak{y}^* - \mathfrak{G}^*$. Wegen der Stetigkeit von $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}(\mathfrak{x}^*)$, so daß $\mathfrak{y}^* = \mathfrak{x}^* + \mathfrak{G}(\mathfrak{x}^*) = \mathfrak{g}(\mathfrak{x}^*)$, also Bild von $\mathfrak{x}^*$ bei der Abbildung $\mathfrak{g}$ ist. Da $\mathfrak{y}^*$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{W}$ war, ist Satz IV hiermit bewiesen [11]).

(Eingegangen den 2. Januar 1937.)

---

[11]) Man kann Satz IV auch beweisen, indem man ihn auf den von Herrn Schauder (siehe die in Anm. [4]) sowie auch § 9 der in Anm. [7]) zitierten Arbeit) für gewisse lineare Funktionalräume bewiesenen Satz von der Gebietsinvarianz zurückführt. Die in der Topologie endlichdimensionaler Kugeln für solche Zurückführung von der Kugel auf die Ebene übliche stereographische Projektion, ist hierfür allerdings nicht brauchbar, da die Eigenschaft einer Abbildung von der Form $\mathfrak{x} + \mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ mit vollstetigem $\mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ zu sein, gegenüber der stereographischen Projektion nicht invariant ist, wie man leicht an Beispielen sehen kann. Man gelangt aber zum Ziel, wenn man eine Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ normal auf die Tangentialebene in $\mathfrak{x}_0$ und ebenso eine Umgebung von $\mathfrak{y}_0 = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{G}(\mathfrak{x}_0)$ normal auf die Tangentialebene in $\mathfrak{y}_0$ projiziert und die zweite Tangentialebene in die erste dreht. —

Wie bei dieser Gelegenheit bemerkt sei, ist die erwähnte Nicht-Invarianz gegenüber der Zentralprojektion auch der Grund, warum nicht wie im Endlichdimensionalen mit dem Abbildungsgrad für Abbildungen mit vollstetiger Verschiebung von Kugeln des Hilbertschen Raumes aufeinander zugleich der Begriff der Ordnung eines Punktes in Bezug auf das Bild einer Kugel gegeben ist. Daß man aber auf anderem Wege auch den Begriff der Ordnung auf Abbildungen im Hilbertschen Raum der Form $\mathfrak{x} + \mathfrak{G}(\mathfrak{x})$ mit vollstetigem $\mathfrak{G}$ übertragen kann, werde ich in einer weiteren Arbeit zeigen.