COMPOSITIO MATHEMATICA

S. SIDON

Über Fourier-Reihen mit Lücken

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 78-81

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__78_0>

Über Fourier-Reihen mit Lücken

von

S. Sidon

Budapest

Hat die Folge positiver ganzer Zahlen $n_1 < n_2 \ldots < n_i \ldots$ die Eigenschaft, daß die Folge der Koeffizienten der Potenzreihe $\left[\sum_{i=1}^{\infty} z^{n_i}\right]^l$, wo $l \geqq 2$ eine ganze Zahl bedeutet, beschränkt ist, so gilt, wenn $P_k(z)$ ein beliebiges Polynom von der Form $\sum_{i=1}^{k} a_i z^{n_i}$ bedeutet, die Ungleichung [1])

$$\int_0^{2\pi} |\{P_k(e^{i\varphi})\}^{2l}|\, d\varphi < C \left[\int_0^{2\pi} |P_k(e^{i\varphi})|\, d\varphi\right]^{2l}, \qquad (1)$$

wo C eine von $P_k(z)$ unabhängige, positive Konstante bedeutet [2]).

Ist l gerade, so besteht also für jedes Polynom

$$P_{kk}(z) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} z^{n_i + n_j}$$

die Ungleichung

$$\int_0^{2\pi} |[P_{kk}(e^{i\varphi})]^l|\, d\varphi < C \left[\int_0^{2\pi} |P_{kk}(e^{i\varphi})|\, d\varphi\right]^l. \qquad (2)$$

Läßt sich (2) nicht auf ungerade $l > 2$ [3]) ausdehnen? Zur Zeit kann ich für diesen Fall nur zeigen

$$\int_0^{2\pi} |\{P_{kk}(e^{i\varphi})\}^l|\, d\varphi < Ck^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{2\pi} |P_{kk}(e^{i\varphi})|\, d\varphi\right]^l. \qquad (2^*)$$

---

[1]) Siehe meine Noten: I. Ein Satz über trigonometrische Polynome mit Lücken und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen [Journal f. r. u. angew. Math. **163** (1930), 251—252]. II. Über die Fourier-Konstanten der Funktionen der Klasse L_p für $p > 1$ [Acta Szeged **7** (1935), 175—176].

[2]) C wird hier auch weiter diese Bedeutung haben.

[3]) Von nun an bezeichnet in dieser Note, wenn das Entgegengesetzte nicht ausdrücklich gesagt wird, l immer eine solche Zahl.

Beweis: Es ist

$$\int_0^{2\pi} |\{P_{kk}(e^{i\varphi})\}^l| \, d\varphi < \left[\int_0^{2\pi} |\{P_{kk}(e^{i\varphi})\}^{l-1}| \, d\varphi \, . \int_0^{2\pi} |\{P_{kk}(e^{i\varphi})\}^{l+1}| \, d\varphi\right]^{\frac{1}{2}} .$$

$$< C k^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{2\pi} |\{P_{kk}(e^{i\varphi})\}^2| \, d\varphi\right]^{\frac{l}{2}}$$

woraus die Behauptung folgt.

Korollare von (2*) sind:

A. *Für die Fourier-Koeffizienten einer Funktion der Klasse* $L_{\frac{l}{l-1}}$, $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, gilt

$$\sum_{i,j=1}^{k} (|a_{n_i+n_j} \alpha_{ij}| + |b_{n_i+n_j} \beta_{ij}|) = O\left(k^{\frac{1}{2l}}\left[\sum_{i,j=1}^{k} (\alpha_{ij}{}^2 + \beta_{ij}{}^2)\right]^{\frac{1}{2}}\right)$$

wo die α, β *beliebige Konstanten bedeuten, also*

$$\sum_{i,j=1}^{k} \{|a_{ij}| + |b_{ij}|\} = O(k^{1+\frac{1}{2l}})\ ^{4}).$$

B. *Ist noch die Zusatzbedingung* (γ) $\frac{n_{2i}}{n_i} > \xi > 1$ *wo* ξ *von* i *unabhängig ist, für jedes* i *erfüllt, und bezeichnen* $N_1, N_2, \ldots, N_h, \ldots$ *die nach der Größe geordneten Glieder der Folge* $n_i + n_j$, *so muß, wenn* $\sum_{h=1}^{\infty} (a_h \cos N_h x + b_h \sin N_h x)$ *die Fourier-Reihe einer im Lebesgueschen Sinne integrierbaren Funktion ist,* $\sum_{h=1}^{k} (a_h^2 + b_h^2) = O(k^{\frac{1}{2}})$ *sein.*

Im speziellen Falle $P_{kk}(z) = \sum_{i,j=1}^{k} z^{n_i+n_j}$ ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit von (2). Daraus folgt dann dieselbe, wenn die Zusatzbedingung γ erfüllt ist und $N_1, \ldots N_h, \ldots$ dieselbe Bedeutung haben wie in B, auch für jedes $\sum_{h=1}^{k} z^{N_h}$ [5]), es gelten also dann die Sätze

---

[4]) Der Young-Hausdorffsche Satz ergibt nur $\sum_{i,j=1}^{k} (|a_{ij}| + |b_{ij}|) = O\left[k^{2-\frac{2}{l}}\right]$.

[5]) Hierbei kommt noch der Satz zur Anwendung:

Gehört $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ zur Klasse L_p, $p > 1$, so gilt für jedes n

$$\int_0^{2\pi} |s_n(x)|^p dx < \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx, \text{ wo } s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

C. $f(x) \sim \sum_{h=1}^{\infty} (a_h \cos N_h x + b_h \sin N_h x)$ *gehört, wenn für jedes h* $a_h \geqq a_{h+1}$, $b_h \geqq b_{h+1}$ *und* a_h *und* $b_h = O\left(\frac{1}{h^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 0$, *zur Klasse* L_l.

D. *Ist* $\sum_{h=1}^{\infty} (a_h \cos N_h x + b_h \sin N_h x)$ *mit* $a_h > a_{h+1}$, $b_h > b_{h+1}$ *für jedes h die Fourier-Reihe einer im Lebesgueschen Sinne integrablen Funktion, so muß* a_h *und* $b_h = O(h^{-\frac{1}{2}} \log N_h)$ *sein* [6].

Auch für den einen wesentlichen Teil des allgemeinen Falles enthaltenden Spezialfall sämtliche $|a_{ij}| = 1$ folgt also die Gültigkeit von (2), wenn der für gerade $l \geqq 2$ triviale Satz

$$\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ik\varphi} \Big|^l d\varphi < C(l) \int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=0}^{n} |a_k| e^{ik\varphi} \Big|^l d\varphi$$

auch für ungerade l richtig ist.

Zum Schluß stehe hier noch ein Lückensatz, in welchem die Exponenten nur einer quantitativen Bedingung unterworfen sind:

Ist l *ganz und* > 2 *und gilt für die Indexfolge* $n_1, \ldots n_k, \ldots$ $\sum_{i=1}^{\infty} n_k^{-\frac{2}{l}} < \infty$, *so gehört jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion* $f(\varphi) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{in_k\varphi}$, *für welche arg* $f(\varphi)$ *eine Funktion von beschränkter Schwankung von* φ *ist, zur Klasse* L_l.

Dieser Satz ist eine Folge der Beschränktheit der unendlichen Form $\sum_{k_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_l=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{l} x_{k_j}}{\sum_{j=1}^{l} n_{k_j}}$ für $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = 1$.

Nachtrag.

In derselben Richtung, wie der letzte Satz der obigen Note, liegt auch der folgende:

Gilt für die Folge positiver ganzer Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ $n_k > k^{1+\varepsilon}$, *wenn* $k > K$, *wo* $\varepsilon > 0$, *so muß, wenn* $f(\varphi) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{in_k\varphi}$ *eine im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion und arg* $f(\varphi)$

---

[6]) Satz B und D sagen nur im Falle $l = 3$ etwas Neues aus, für $l > 3$ gilt ein die beiden enthaltenden viel schärferer Satz: loc. cit. [1]), I, und Math. Zeitschr. 34 (1932), 480—484.

eine Funktion von beschränkter Schwankung von φ *ist,* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ *konvergieren.*

Der Beweis stützt sich auf die Tatsache, daß die quadratische Form $\sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \frac{x_{k_1} x_{k_2}}{n_{k_1} + n_{k_2}}$ im Gebiete $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{2+\eta} = 1$, wo $\eta > \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$, beschränkt ist.

(Bemerkung während der Korrektur. In den zwei letzten Sätzen dieser Note genügt es, statt der Integrierbarkeit von $f(\varphi)$ $a_k = O(1)$ vorauszusetzen.)

(Eingegangen den 7. Dezember 1935.)