COMPOSITIO MATHEMATICA

F. GANTMAKHER
M. KREIN

Sur les matrices complètement non négatives et oscillatoires

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 445-476
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__445_0>

Sur les matrices complètement non négatives et oscillatoires

par

F. Gantmakher et M. Krein

Moscou Odessa

Nous appelons une matrice quadratique $A = \|a_{ik}\|_1^n$ *complètement non négative* (*complètement positive*), si tous les mineurs de tous les ordres de cette matrice sont non négatifs (positifs).

Une matrice A complètement non négative est dite *oscillatoire*, si une certaine puissance $A^\varkappa$ ($\varkappa$ entier et positif) de cette matrice est complètement positive.

Les matrices oscillatoires ont des propriétés très remarquables; ainsi — par exemple — leurs valeurs caractéristiques sont toujours (indépendamment de ce que la matrice soit sÿmétrique ou non) positives et simples, les vecteurs propres de ces matrices *oscillent* selon les lois de Sturm.

Dans une de ses parties la théorie des matrices oscillatoires est analogue à la théorie des noyaux intégraux dits „noyaux de Kellogg" [1]).

En même temps, les matrices oscillatoires ont beaucoup de propriétés spécifiquement algébriques pour lesquelles on ne

---

[1]) Un noyau continu $K(x, s)$ ($a \leqq x, s \leqq b$) est dit *noyau de Kellogg*, si pour tout entier n

$$K\begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \dots x_n \\ s_1 \, s_2 \dots s_n \end{pmatrix} \geqq 0, \quad K\begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \dots x_n \\ x_1 \, x_2 \dots x_n \end{pmatrix} > 0 \text{ pour } a < \begin{matrix} x_1 < \dots < x_n \\ s_1 < \dots < s_n \end{matrix} < b,$$

où le symbole $K\begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \dots x_n \\ s_1 \, s_2 \dots s_n \end{pmatrix}$ désigne le déterminant $|K(x_i, s_k)|_1^n$. Quant à la théorie des noyaux de Kellogg, voir les articles:

O. D. Kellogg, Orthogonal Functions Sets Arising from Integral Equations [American Journ. **40** (1918), 145—154], et aussi du même auteur, The Oscillation of Functions of an Orthogonal Set [ibidem **38** (1916), 1—5].

F. Gantmakher, Sur les noyaux de Kellogg non symétriques [C. R. de l'Acad. des Sciences de l'URSS (n.s.) **1** (1936), 3—5].

M. Krein, Sur quelques propriétés des noyaux de Kellogg [Comm. Soc. Math. Kharkof (4) **13**, 15—28], Sur la résolvante du noyau de Kellogg [ibidem (4) **14**].

connaît pas encore d'analogues dans la théorie des équations intégrales à noyaux de Kellogg, et qui peut-être serviront de base pour des recherches ultérieures dans cette théorie.

Les matrices oscillatoires permettent de donner, pour la première fois, une analyse algébrique assez complète des vibrations des systèmes mécaniques à n masses discrètes pour une classe étendue de problèmes qu'on rencontre dans la technique des vibrations (problème des vitesses critiques, vibrations de torsion etc.). Cette circonstance est liée au fait que la fonction d'influence (la fonction de Green) d'un continu linéaire élastique est un noyau de Kellogg [2]) et par suite un noyau oscillatoire [3]).

Les résultats principaux de cet article ont été publiés dans une note aux C. R. [4])

§ 1. Matrices complètement non négatives.

Soit $A = \|a_{ik}\|_1^n$ une matrice réelle; introduisons les notations

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_p} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \dots & a_{i_2 k_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \dots & a_{i_p k_p} \end{vmatrix} \qquad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Une matrice A sera dite *complètement non négative* (*complètement positive*), si tous ses mineurs sont non négatifs (positifs), c'est-à-dire

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} \geqq 0 \ (\text{resp.} > 0) \ \text{pour} \ 1 \leqq \begin{matrix} i_1 < i_2 < \dots < i_p \\ k_1 < k_2 < \dots < k_p \end{matrix} \leqq n.$$

Si $C = AB$ on a d'après l'identité de Laplace:

---

[2]) M. Krein, Sur quelques applications des noyaux de Kellogg aux problèmes d'oscillation [Comm. Soc. Math. Kharkof (4) **11** (1935), 3—19], Sur les vibrations propres des tiges dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre libre [ibidem (4) **12** (1935), 3—11], voir aussi les notes du même auteur „Sur une classe spéciale d'opérateurs différentiels" [C. R. de l'Acad. des Sciences de l'URRS **5-6** (1935) 345—349] „Sur les opérateurs différentiels oscillatoires" [ibidem, **9** (1936), 395—398] et l'article „Sur quelques propriétés . . ." cité dans [1]).

[3]) Un noyau $K(x, s)$ $(a \leqq x,\ s \leqq b)$ est dit oscillatoire, si pour tout entier n quels que soient les nombres $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, la matrice $\|K(x_i, x_k)\|_1^n$ est oscillatoire. Tout noyau oscillatoire est évidemment un noyau de Kellogg; on ne sait pas si la proposition réciproque est vraie ou non. Il est aisé cependant de montrer au moyen du théorème de cet article que si $K(x, s)$ étant une fonction de Green est un noyau de Kellogg, c'est aussi un noyau oscillatoire.

[4]) F. Gantmakher et M. Krein, Sur les matrices oscillatoires [C. R. **201** (1935), 577—579].

$$C\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_p \\ k_1\, k_2 \dots k_p \end{pmatrix} = \Sigma A \begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_p \\ \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_p \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_p \\ k_1\, k_2 \dots k_p \end{pmatrix}.$$

Il résulte évidemment de cette identité que:

1^0. *Le produit C de deux matrices A et B complètement non négatives est aussi complètement non négatif et*

2^0. *Le produit C de deux matrices A et B dont l'une est complètement positive et l'autre complètement non négative et non singulière est complètement positif.*

Désignons par $A^* = \|a^*_{ik}\|_1^n$ la matrice qui a pour éléments $a^*_{ik} = (-1)^{i+k} a_{ik}$. Il est aisé de voir que:

a) Si $C = A \pm B$ on a $C^* = A^* \pm B^*$.

b) Si $C = AB$ on a $C^* = A^* B^*$.

c) Si $B = A^{-1}$ on a $B^* = (A^*)^{-1}$.

3^0. *La matrice A étant complètement non négative (positive) et non singulière, il en est de même pour la matrice $B = (A^{-1})^*$.*

Cette proposition découle de l'identité connue pour la matrice inverse: d'après cette identité on a

$$B\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_p \\ k_1\, k_2 \dots k_p \end{pmatrix} = \frac{A\begin{pmatrix} j_1\, j_2 \dots j_{n-p} \\ l_1\, l_2 \dots l_{n-p} \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1\, 2 \dots n \\ 1\, 2 \dots n \end{pmatrix}},$$

où le système des indices $i_1 < i_2 < \dots < i_p;\, j_1 < j_2 < \dots < j_{n-p}$ ainsi que celui des indices $k_1 < k_2 < \dots < k_p;\, l_1 < l_2 < \dots < l_{n-p}$ coïncide avec le système $1, 2, \dots, n$.

4^0. *Si pour une matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ complètement non négative*

$$A\begin{pmatrix} 1 \dots p-1 \\ 1 \dots p-1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad A\begin{pmatrix} 1 \dots p \\ 1 \dots p \end{pmatrix} = 0, \qquad (p < n),$$

on a

$$A\begin{pmatrix} 1 \dots p-1\; i \\ 1 \dots p-1\; p \end{pmatrix} = 0 \text{ pour } i = p+1, \dots, n \tag{1}$$

ou bien

$$A\begin{pmatrix} 1 \dots p-1\; p \\ 1 \dots p-1\; k \end{pmatrix} = 0 \text{ pour } k = p+1, \dots, n. \tag{2}$$

En effet, en posant

$$d_{ik} = A\begin{pmatrix} 1\, 2 \dots p-1\; i \\ 1\, 2 \dots p-1\; k \end{pmatrix} \qquad (i, k = p+1, \dots, n), \tag{3}$$

on obtient une matrice $D = \|d_{ik}\|_{p+1}^n$ complètement non négative, car d'après l'identité de Sylvester

$$D\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_q \\ k_1\, k_2 \dots k_q \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1\, 2 \dots p-1 \\ 1\, 2 \dots p-1 \end{pmatrix}^{q-1} A\begin{pmatrix} 1\, 2 \dots p-1\; i_1\, i_2 \dots i_q \\ 1\, 2 \dots p-1\; k_1\, k_2 \dots k_q \end{pmatrix}.$$

Cela étant, on a l'inégalité

$$D\begin{pmatrix} p, i \\ p, k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} d_{pp} & d_{pk} \\ d_{ip} & d_{ik} \end{vmatrix} \geqq 0.$$

Mais $d_{pp} = 0$ et $d_{ik} \geqq 0$, par suite

$$d_{ip} d_{pk} = 0 \quad \text{pour} \quad i, k = p+1, \dots, n;$$

d'où $d_{ip} = 0$ pour $i = p+1, \dots, n$, ou bien $d_{pk} = 0$ pour $k = p+1, \dots, n$.

La proposition est donc démontrée.

On peut généraliser 4^0 de la manière suivante:

5^0. *Si dans une matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ complètement non négative le mineur*

$$A\begin{pmatrix} 1\, 2 \dots p \\ 1\, 2 \dots p \end{pmatrix} = 0 \qquad (p < n),$$

on a

$$(4) \qquad A\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_p \\ 1\;\, 2 \;\dots\; p \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour tous les } i_1, i_2, \dots, i_p \leqq n,$$

ou bien

$$(5) \qquad A\begin{pmatrix} 1\;\, 2 \;\dots\; p \\ k_1\, k_2 \dots k_p \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour tous les } k_1, k_2, \dots, k_p \leqq n.$$

En effet, pour $p = 1$ cette proposition est vraie, car comme nous le savons déjà, l'égalité $a_{11} = 0$ entraîne les égalités $a_{i1} = 0$ $(i = 2, 3, \dots, n)$ ou bien les égalités $a_{1k} = 0$ pour $k = 2, 3, \dots, n$.

En démontrant la proposition par induction, nous pouvons évidemment supposer que

$$A\begin{pmatrix} 1\, 2 \dots p-1 \\ 1\, 2 \dots p-1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Mais cela étant posé, on a d'après 4^0 les égalités (1) ou bien les égalités (2).

Supposons par exemple qu'on ait les égalités (1). Ces égalités expriment le fait que toute ligne de la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{11} \dots a_{1p} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a_{p1} \dots a_{pp} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{np} \end{Vmatrix}$$

est une combinaison linéaire des $p-1$ premières lignes. D'où les égalités (4).

La proposition 5⁰ implique la suivante.

6⁰. *Si dans une matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ complètement non négative le mineur*

$$A\begin{pmatrix}1\ 2\dots p\\1\ 2\dots p\end{pmatrix} = 0 \qquad p<n,$$

on a

$$A\begin{pmatrix}1\ 2\dots p\ i_1\dots i_q\\1\ 2\dots p\ k_1\dots k_q\end{pmatrix} = 0 \text{ pour tous les } i_1,\dots,i_q;\ k_1,\dots,k_q \leqq n.$$[5]

Pour établir le théorème qui va suivre, démontrons d'abord une proposition auxiliaire:

7⁰. *Si dans une matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ complètement non négative le mineur*

$$A\begin{pmatrix}1\ 2\dots p{-}1\ q\\1\ 2\dots p{-}1\ p\end{pmatrix} = 0 \qquad (1<p<q\leqq n), \tag{6}$$

on a ou bien

$$A\begin{pmatrix}1\ 2\dots p{-}1\ p\\1\ 2\dots p{-}1\ p\end{pmatrix} = 0$$

ou bien

$$a_{qk} = 0 \qquad (k=1,2,\dots,p).$$

En effet, en supposant

$$A\begin{pmatrix}1\ 2\dots p{-}1\ p\\1\ 2\dots p{-}1\ p\end{pmatrix} > 0 \tag{7}$$

on aura, d'après 6⁰, l'inégalité

$$A\begin{pmatrix}1\ 2\dots p{-}1\\1\ 2\dots p{-}1\end{pmatrix} > 0. \tag{8}$$

En s'appuyant sur cette inégalité et (6), on peut écrire

$$a_{qk} = \sum_{\nu=1}^{p-1}\lambda_\nu a_{\nu k} \qquad (k=1,2,\dots,p).$$

Montrons que tous les $\lambda_\nu = 0$. En effet

$$A\begin{pmatrix}1\ 2\dots \nu{-}1\ \nu{+}1\dots p{-}1\ q\\1\ 2\dots \nu{-}1\ \nu\ \ \dots p{-}2\ p{-}1\end{pmatrix} = (-1)^{p-\nu-1}\lambda_\nu A\begin{pmatrix}1\ 2\dots p{-}1\\1\ 2\dots p{-}1\end{pmatrix},$$

et

---

[5]) Dans la première rédaction de cet article nous avons déduit la 6ième proposition directement de la 4ième. C'est à M. KOTELYANSKY que nous sommes redevables de la remarque, qu'il avait faite après avoir pris conaissance de notre manuscrit, que nos raisonnements contiennent implicitement la proposition 5⁰.

$$A\begin{pmatrix}1\,2\ldots\nu-1\;\nu+1\ldots p & q\\ 1\,2\ldots\nu-1\;\nu\quad\ldots p-1 & p\end{pmatrix}=(-1)^{p-\nu}\lambda_\nu A\begin{pmatrix}1\,2\ldots p\\ 1\,2\ldots p\end{pmatrix}.$$

Les deux dernières égalités jointes aux inégalités (7) et (8) nous donnent $\lambda_\nu = 0$. La proposition 7⁰ est donc établie.

Théorème 1. *La matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ étant complètement non négative, on a pour tout $p < n$ l'inégalité*

$$A\begin{pmatrix}1\,2\ldots n\\ 1\,2\ldots n\end{pmatrix}\leqq A\begin{pmatrix}1\,2\ldots p\\ 1\,2\ldots p\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}p+1\ldots n\\ p+1\ldots n\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Le signe $=$ n'a lieu que dans les cas triviaux:

1⁰. L'un des facteurs du second membre est égal à zéro,

2⁰. Les éléments a_{ik} $(i=1, 2, \ldots, p;\ k=p+1, \ldots, n)$ ou bien les éléments a_{ik} $(i=p+1, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, p)$ sont tous égaux à zéro. [6])

Démonstration. Pour $n = 2$ ce théorème est évident. Démontrons-le par induction. Si $n > 2$, l'un des nombres p ou $n - p$ est supérieur à 1; or, nous pouvons supposer que $p > 1$.

En outre nous pouvons supposer que

$$A\begin{pmatrix}1\,2\ldots p-1\\ 1\,2\ldots p-1\end{pmatrix}>0,$$

car dans le cas contraire, on a d'après 6⁰

$$A\begin{pmatrix}1\,2\ldots p\\ 1\,2\ldots p\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\,2\ldots n\\ 1\,2\ldots n\end{pmatrix}=0,$$

donc la relation (9) est vérifiée dans ce cas.

Considérons la matrice $D = \|d_{ik}\|_{p+1}^n$ des éléments d_{ik} définis par (3); en vertu de l'identité de Sylvester cette matrice est complètement non négative.

Comme, d'après l'hypothèse, le théorème à démontrer est vrai pour les matrices d'ordre $< n$, on peut écrire

$$A\begin{pmatrix}1\ldots n\\ 1\ldots n\end{pmatrix}=\frac{D\begin{pmatrix}p\,p+1\ldots n\\ p\,p+1\ldots n\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1\ldots p-1\\ 1\ldots p-1\end{pmatrix}^{n-p}}\leqq\frac{d_{pp}D\begin{pmatrix}p+1\ldots n\\ p+1\ldots n\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1\ldots p-1\\ 1\ldots p-1\end{pmatrix}^{n-p}}= \tag{10}$$

$$=\frac{A\begin{pmatrix}1\ldots p\\ 1\ldots p\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1\ldots p-1\;p+1\ldots n\\ 1\ldots p-1\;p+1\ldots n\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1\ldots p-1\\ 1\ldots p-1\end{pmatrix}}\leqq A\begin{pmatrix}1\ldots p\\ 1\ldots p\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}p+1\ldots n\\ p+1\ldots n\end{pmatrix}.$$

---

[6]) Nous avons déjà eu l'occasion de consacrer à ce théorème une petite note dans le Rec. Math. 42 (1935), 501.

Il reste à examiner le cas

$$A\begin{pmatrix}1\ldots n\\1\ldots n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\ldots p\\1\ldots p\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}p+1\ldots n\\p+1\ldots n\end{pmatrix}$$

où

$$A\begin{pmatrix}1\ldots p\\1\ldots p\end{pmatrix}>0 \quad \text{et} \quad A\begin{pmatrix}p+1\ldots n\\p+1\ldots n\end{pmatrix}>0. \tag{11}$$

Dans ce cas on a dans toutes les relations (10) le signe $=$; en particulier

$$D\begin{pmatrix}p\,p+1\ldots n\\p\,p+1\ldots n\end{pmatrix}=d_{pp}D\begin{pmatrix}p+1\ldots n\\p+1\ldots n\end{pmatrix}>0.$$

En appliquant au mineur $D\begin{pmatrix}p\,p+1\ldots n\\p\,p+1\ldots n\end{pmatrix}$ la deuxième partie du théorème à démontrer, on voit que l'un des deux systèmes d'égalités

$$\begin{array}{ll}d_{ip}=0 & (i=p+1,\ldots,n)\\ d_{pk}=0 & (k=p+1,\ldots,n)\end{array} \tag{12}$$

est vérifié. En supposant par exemple que

$$d_{ip}=A\begin{pmatrix}1\ldots p-1\;i\\1\ldots p-1\;p\end{pmatrix}=0 \qquad (i=p+1,\ldots,n)$$

on trouve d'après 7°, ayant égard à (11), les égalités:

$$a_{ik}=0 \qquad (i=p+1,\ldots,n;\, k=1,2,\ldots,p)\,.$$

On établit de même les égalités

$$a_{ik}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,p;\, k=p+1,\ldots,n)$$

si (12) a lieu.

Le théorème est donc complètement démontré.

§ 2. Matrices oscillatoires.

Une matrice $A=\|a_{ik}\|_1^n$ sera dite *matrice oscillatoire* si elle est complètement non négative et s'il existe un nombre positif et entier $\varkappa$ tel que la matrice $A^\varkappa$ soit complètement positive. Cette dénomination est justifiée par le rôle que joue cette classe de matrices dans la théorie des oscillations de divers systèmes mécaniques.

Signalons quelques propriétés simples des matrices oscillatoires. Comme $|A^\varkappa|=|A|^\varkappa$ et $(A^p)^\varkappa=(A^\varkappa)^p$ on a:

1°. *Toute matrice oscillatoire est une matrice non singulière.*

2°. *Toute puissance A^p $(p=1,2,\ldots)$ d'une matrice oscillatoire est aussi oscillatoire.*

En vertu de la prop. 2 du § 1, on a aussi

3⁰. *La matrice A étant oscillatoire, si $A^{\varkappa}$ est complètement positive, $A^{\varkappa+1}$ l'est aussi.*

D'après les règles b) et c) du § 1, on voit que:

4⁰. *Si A est une matrice oscillatoire, il en est de même de la matrice $\tilde{A} = (A^*)^{-1}$.*

Un peu plus compliquée est la propriété donnée par la proposition suivante:

5⁰. *La matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ étant oscillatoire, il en sera de même de la matrice tronquée $\|A_{ik}\|_p^q$ $(1 \leqq p < q \leqq n)$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer le théorème pour la matrice $B = \|a_{ik}\|_2^n$.

Soit $A^{\varkappa}$ complètement positive, montrons que $B^{\varkappa}$ l'est aussi; en d'autres termes, il est à démontrer que, quels que soient les deux systèmes d'indices $2 \leqq {i_1 \atop k_1} < {i_2 \atop k_2} < \ldots < {i_p \atop k_p} \leqq n$, le mineur

$$(13) \qquad B^{(\varkappa)}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{\substack{2 \leqq \alpha_1' < \ldots < \alpha_p' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2 \leqq \alpha_1^{(\varkappa-1)} < \ldots < \alpha_p^{(\varkappa-1)}}} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ \alpha_1' & \alpha_2' & \ldots & \alpha_p' \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' & \ldots & \alpha_p' \\ \alpha_1'' & \alpha_2'' & \ldots & \alpha_p'' \end{pmatrix} \cdots A\begin{pmatrix} \alpha_1^{(\varkappa-1)} & \ldots & \alpha_p^{(\varkappa-1)} \\ k_1 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$$

est positif. Considérons pour cela le mineur de $A^{\varkappa}$:

$$A^{(\varkappa)}\begin{pmatrix} 1 & i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{\substack{\alpha_0' < \alpha_1' < \ldots < \alpha_p' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_0^{(\varkappa-1)} < \alpha_1^{(\varkappa-1)} < \ldots < \alpha_p^{(\varkappa-1)}}} A\begin{pmatrix} 1 & i_1 & \ldots & i_p \\ \alpha_0' & \alpha_1' & \ldots & \alpha_p' \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} \alpha_0' & \alpha_1' & \ldots & \alpha_p' \\ \alpha_0'' & \alpha_1'' & \ldots & \alpha_p'' \end{pmatrix} \cdots A\begin{pmatrix} \alpha_0^{(\varkappa-1)} & \alpha_1^{(\varkappa-1)} & \ldots & \alpha_p^{(\varkappa-1)} \\ 1 & k_1 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$$

Ce mineur étant positif, il y aura dans la somme un produit positif

$$A\begin{pmatrix} 1 & i_1 & \ldots & i_p \\ \xi_0' & \xi_1' & \ldots & \xi_p' \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} \xi_0' & \xi_1' & \ldots & \xi_p' \\ \xi_0'' & \xi_1'' & \ldots & \xi_p'' \end{pmatrix} \cdots A\begin{pmatrix} \xi_0^{(\varkappa-1)} & \xi_1^{(\varkappa-1)} & \ldots & \xi_p^{(\varkappa-1)} \\ 1 & k_1 & \ldots & k_p \end{pmatrix}.$$

Mais alors d'après la proposition du § 1 le produit

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_p \\ \xi_1' & \ldots & \xi_p' \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} \xi_1' & \ldots & \xi_p' \\ \xi_1'' & \ldots & \xi_p'' \end{pmatrix} \cdots A\begin{pmatrix} \xi_1^{(\varkappa-1)} & \ldots & \xi_p^{(\varkappa-1)} \\ k_1 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$$

est aussi positif. Ce dernier produit entrant dans la somme (13) rend cette somme positive.

Le théorème est donc démontré.

6°. *Les éléments* $a_{i,i+1}$, $a_{i+1,i}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ *d'une matrice* $A=\|a_{ik}\|_1^n$ *oscillatoire sont tous positifs.*

En effet, d'après 5° la matrice $A_i=\left\|\begin{matrix} a_{i,i} & a_{i,i+1} \\ a_{i+1,i} & a_{i+1,i+1}\end{matrix}\right\|$ est oscillatoire; il en résulte que $a_{i,i+1}$ ainsi que $a_{i+1,i}$ sont différents de zéro, car dans le cas contraire aucune puissance $A_i^{\varkappa}$ $(\varkappa=1, 2, \ldots)$ n'aurait tous ses éléments positifs.

Les propositions 1°, 6° nous donnent les conditions nécessaires pour qu'une matrice A complètement non négative soit oscillatoire. Nous allons montrer que ces conditions sont aussi suffisantes. Dans ce but nous avons à établir quelques propositions préliminaires.

LEMME 1. *Si dans une matrice rectangulaire*

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{matrix}\right\|$$

complètement non négative[7]) *les lignes d'indices* $i_1=1<i_2<i_3<\ldots<i_p=m$ *sont linéairement dépendantes, tandis que les* $p-1$ *premières ainsi que les* $p-1$ *dernières de ces lignes sont linéairement indépendantes, le rang de cette matrice est égal à* $p-1$.

Démonstration. On peut évidemment supposer que $p \leqq n$.

D'après les hypothèses de notre lemme, on peut écrire que

$$a_{i_p k}=\sum_{\nu=1}^{p-1}\lambda_\nu a_{i_\nu k}, \text{ où } \lambda_1 \neq 0\,.$$

Soit $i_h<j<i_{h+1}$; écrivons les égalités

$$A\begin{pmatrix} i_2 \ldots i_h\, j\, i_{h+1} \ldots i_p \\ k_1 \ldots\ldots\ldots\ldots k_p\end{pmatrix}=(-1)^{p-1}\lambda_1 A\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_h\, j\, i_{h+1} \ldots i_{p-1} \\ k_1 \ldots\ldots\ldots\ldots k_p\end{pmatrix} \tag{14}$$

$$A\begin{pmatrix} i_2 \ldots i_h\, i_{h+1} \ldots i_p \\ k_1^0 \ldots\ldots\ldots k_{p-1}^0\end{pmatrix}=(-1)^{p}\lambda_1 A\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_{p-1} \\ k_1^0 \ldots k_{p-1}^0\end{pmatrix}, \tag{15}$$

où $k_1<k_2<\ldots<k_p$ sont des indices quelconques et $k_1^0<k_2^0<\ldots<k_p^0$ sont choisis de manière que

$$A\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_{p-1} \\ k_1^0 \ldots k_{p-1}^0\end{pmatrix}\neq 0.$$

Comme d'une part tous les symboles $A\begin{pmatrix}\ldots\\ \ldots\end{pmatrix}$ dans les égalités (14) et (15) sont non négatifs, et que d'autre part le second

---

[7]) C'est-à-dire, à mineurs non négatifs.

membre de l'égalité (15) est différent de zéro, on conclut en comparant ces égalités que

$$A\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_h\, j\, i_{h+1} \ldots i_{p-1} \\ k_1 \ldots\ldots\ldots\ldots k_p \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leqq n.$$

Donc on voit que la ligne d'indice (quelconque) j est une combinaison linéaire des lignes d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_{p-1}$; donc le rang da la matrice $\|a_{ik}\|$ est égal à $p-1$.

LEMME 2. *La matrice rectangulaire*

$$A = \|a_{ik}\| \quad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$$

étant une matrice complètement non négative, si un mineur

$$A\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \ldots i_p \\ k_1\, k_2 \ldots k_p \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} i_1 = 1 < i_2 < \ldots < i_p = m; \\ k_1 = 1 < k_2 < \ldots < k_p = n \end{pmatrix}$$

et si les mineurs

$$A\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \ldots i_{p-1} \\ k_1\, k_2 \ldots k_{p-1} \end{pmatrix} \neq 0, \quad A\begin{pmatrix} i_2\, i_3 \ldots i_p \\ k_2\, k_3 \ldots k_p \end{pmatrix} \neq 0,$$

le rang de la matrice A est égal à $p-1$.

On obtient évidemment ce lemme par une double application du lemme précédent.

THÉORÈME 2. *Pour qu'une matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ complètement non négative soit oscillatoire, il faut et il suffit que* 1^0 *cette matrice soit non singulière et* 2^0 *les éléments $a_{i,\,i+1}$ et $a_{i+1,\,i}$* $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *soient positifs.*

Démonstration. Les conditions 1^0, 2^0 sont nécessaires d'après les propositions 1^0, 6^0 de ce §. Démontrons qu'elles sont aussi suffisantes.

Appelons un mineur

$$A\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \ldots i_p \\ k_1\, k_2 \ldots k_p \end{pmatrix} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

quasi-principal, si

$$(16) \qquad \begin{cases} 1 \leqq i_1, k_1 < i_2, k_2 < \ldots < i_p, k_p \leqq n \\ |i_1 - k_1| \leqq 1,\ |i_2 - k_2| \leqq 1, \ldots, |i_p - k_p| \leqq 1. \end{cases}$$

Montrons d'abord que si la matrice A satisfait aux conditions 1^0, 2^0, tous ses mineurs quasi-principaux sont positifs.

Les mineurs quasi-principaux d'ordre 1 sont positifs en vertu de la condition 2^0. Supposons donc que tous les mineurs quasi-principaux d'ordre $\leqq p-1$ sont positifs et montrons que le même fait a lieu pour les mineurs quasi-principaux d'ordre p. Admettons le contraire, à savoir

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = 0 \tag{17}$$

où les indices $i_1, i_2, \dots, i_p$; $k_1, k_2, \dots, k_p$ satisfont aux inégalités (16).

L'égalité (17) jointe à l'inégalité

$$A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{p-1} \\ k_1 & \dots & k_{p-1} \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_2 & \dots & i_p \\ k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} \neq 0$$

qui a lieu d'après notre supposition, permet d'appliquer le lemme 2 à la matrice rectangulaire

$$\|a_{ik}\| \qquad (i = i_1, i_1+1, \dots, i_p;\ k = k_1, k_1+1, \dots, k_p); \tag{18}$$

donc le rang de cette matrice est égal à $p-1$.

Posons $h = \mathrm{Max}\,(i_1, k_1)$; il suit des inégalités (16) que

$$i_1, k_1 \leqq h, \quad h + p - 1 \leqq i_p, k_p.$$

Par conséquent, le déterminant

$$A\begin{pmatrix} h, h+1, \dots, h+p-1 \\ h, h+1, \dots, h+p-1 \end{pmatrix}$$

étant un mineur d'ordre p de la matrice (18) est égal à zéro, ce qui se trouve en contradiction avec la proposition 6^0 du § 1.

Démontrons à présent que $B = A^{n-1}$ est complètement positive. Ecrivons pour cela l'identité:

$$B\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ k_1 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \Sigma A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ \alpha_1' & \dots & \alpha_p' \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} \alpha_1' & \dots & \alpha_p' \\ \alpha_1'' & \dots & \alpha_p'' \end{pmatrix} \cdots A\begin{pmatrix} \alpha_1^{(n-2)} & \dots & \alpha_p^{(n-2)} \\ k_1 & \dots & k_p \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Il est aisé de voir, que $i_1 < i_2 < \dots < i_p$; $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ étant deux systèmes d'indices arbitraires, on peut toujours choisir des systèmes particuliers $\alpha_1' < \alpha_2' < \dots < \alpha_p'$; $\alpha_1'' < \alpha_2'' < \dots < \alpha_p''$; $\dots$; $\alpha_1^{(n-2)} < \alpha_2^{(n-2)} < \dots < \alpha_p^{(n-2)}$ de façon que tous les facteurs du terme correspondant de la somme (19) soient quasi-principaux. Donc la somme (19) contient des termes différents de zéro et par suite cette somme est positive.

Au cours de la démonstration du th. 2 nous avons établi le

Théorème 3. *Dans toute matrice oscillatoire tous les mineurs quasi-principaux sont positifs.*

Ce théorème entraine à son tour le suivant:

Théorème 4. *Le produit* $A = A_1 A_2 \cdots A_m$ *de* $m \geqq n-1$ *matrices oscillatoires* A_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ *est une matrice complètement positive.*

Pour l'établir il faut appliquer à la matrice A le raisonnement dont nous nous sommes servis pour la matrice B dans la démonstration du théorème 2.

Comme cas particulier nous obtenons le

THÉORÈME 5. *A étant une matrice oscillatoire, l'exposant minimal $\varkappa$ pour lequel $A^{\varkappa}$ est une matrice complètement positive, n'est pas supérieur à $n-1$.*

Dans ce qui suit (voir le théorème 7), nous allons montrer qu'on ne peut pas améliorer la borne indiquée pour l'exposant minimal $\varkappa$; c'est-à-dire qu'il existe des matrices oscillatoires dont l'exposant minimal atteint la valeur $n-1$.

Si $C=AB$, $C^{\left[\frac{n}{2}\right]}=\underbrace{ABAB\cdots AB}_{m}$ $\left(m=2\left[\frac{n}{2}\right]\geqq n-1\right)$; donc nous trouvons le

THÉORÈME 6. *Le produit $C=AB$ de deux matrices oscillatoires est aussi oscillatoire et de plus $C^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ est complètement positive.*

§ 3. Exemples de matrices oscillatoires.

Indiquons d'abord quelques exemples de matrices complètement positives:

1°. Soient $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$ et $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n$ des nombres réels quelconques; démontrons que *la matrice*

$$A=\left\|e^{\alpha_i\beta_k}\right\|_1^n$$

est complètement positive.

En effet, quelles que soient les constantes réelles $c_1, c_2, \ldots, c_n$ la fonction $c_1e^{\alpha_1x}+c_2e^{\alpha_2x}+\ldots+c_ne^{\alpha_nx}$ n'a pas plus de $n-1$ zéros; d'où

$$|A|=\left|e^{\alpha_i\beta_k}\right|_1^n\neq 0.$$

Remarquons d'autre part que pour $\beta_k=k-1$ le déterminant $|A|$ devenant un déterminant de Vandermonde est positif; on en conclut, par des considérations de continuité, que $|A|$ est aussi positif pour $\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n$ quelconques.

Tout mineur de A étant de la même structure que $|A|$, la matrice A est complètement positive.

Il est évident qu'on peut mettre la matrice A sous la forme d'une matrice de Vandermonde généralisée:

$$A=\left\|a_i^{\alpha_k}\right\|_1^n \qquad (0<a_1<a_2<\ldots<a_n;\ \alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n).$$

2^0. D'après la formule connue de Cauchy [8])

$$\left|\frac{1}{x_i+y_k}\right|_1^n = \frac{\prod\limits_{i<k}(x_i-x_k)\prod\limits_{i<k}(y_i-y_k)}{\prod\limits_{i,k=1}^{n}(x_i+y_k)}$$

la matrice

$$A = \left\|\frac{1}{x_i+y_k}\right\|_1^n \quad \textit{pour} \quad 0 < \begin{matrix} x_1 < x_2 < \ldots < x_n \\ y_1 < y_2 < \ldots < y_n \end{matrix}$$

est complètement positive.

3^0. *Matrices dé Jacobi.* Par une matrice de Jacobi, nous entendons une matrice J ayant la forme:

$$J = \left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & c_{n-1} & a_n \end{matrix}\right\| .$$

Théorème 7. *Pour que la matrice de Jacobi J soit oscillatoire il faut et il suffit que tous les a, b, c soient > 0 et que*

$$(20) \qquad a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & & . \\ . & \ddots & \ddots & \ddots & . \\ . & & \ddots & \ddots & . \\ . & & & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \ldots & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix} > 0.$$

Ces conditions étant remplies l'exposant minimal $\varkappa$ pour lequel $J^{\varkappa}$ est complètement positive est égal à $n-1$.

Démonstration. Les conditions sont nécessaires d'après les théorèmes 2 et 3. Elles sont aussi suffisantes. D'après le théorème 2 il reste à démontrer que la matrice J est complètement non négative. Envisageons la matrice symétrique

$$\bar{J} = \left\|\begin{matrix} a_1 & \sqrt{b_1c_1} & \ldots & \ldots & 0 \\ \sqrt{b_1c_1} & a_2 & \sqrt{b_2c_2} & & . \\ . & \sqrt{b_2c_2} & a_3 & \ddots & . \\ . & & \ddots & \ddots & . \\ . & & & \ddots & \sqrt{b_{n-1}c_{n-1}} \\ 0 & \ldots & \ldots & \sqrt{b_{n-1}c_{n-1}} & a_n \end{matrix}\right\|;$$

[8]) Voir, par exemple, Polya & Szegö, Aufgaben und Lehrsätze [Berlin, Springer (1925)] II, 98.

ses mineurs principaux coïncident avec les mineurs principaux correspondants de la matrice J. Or, la positivité de la forme quadratique correspondante à $\bar{J}$ étant assurée par les conditions (20), tous les mineurs principaux de $\bar{J}$ et par conséquent de J sont positifs.

Ceci étant établi, on utilise les inégalités $a, b, c > 0$ pour démontrer par la méthode d'induction de n à $n+1$ que tous les autres mineurs de J sont non négatifs.

La première partie du théorème est ainsi établie. Pour prouver la seconde, remarquons que si $\varkappa < n-1$, l'élément h_{1n} de la matrice $A^{\varkappa} = \left\|h_{ik}\right\|_1^n$ est nul, et par suite la matrice $A^{\varkappa}$ n'est pas complètement positive.

Le théorème est donc démontré.

4⁰. *Matrice à un couple. Par matrice à un couple* nous entendons toute matrice $L = \left\|l_{ik}\right\|_1^n$ dont les éléments admettent la représentation

$$l_{ik} = \begin{cases} \psi_i \chi_k & (i \leqq k) \\ \psi_k \chi_i & (i \geqq k), \end{cases}$$

où $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$; $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ sont des nombres quelconques.

Théorème 8. *La matrice L à un couple est oscillatoire quand et seulement quand les deux conditions suivantes sont remplies:*

1⁰. *Les $2n$ nombres $\psi_1, \ldots, \psi_n$; $\chi_1, \ldots, \chi_n$ sont différents de zéro et de même signe.*

2⁰. *Les rapports $\frac{\psi_i}{\chi_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ forment une suite croissante:*

$$\frac{\psi_1}{\chi_1} < \frac{\psi_2}{\chi_2} < \ldots < \frac{\psi_n}{\chi_n}.\text{[9]}$$

Démonstration. Les conditions sont nécessaires. En effet L étant oscillatoire, on a

$$l_{ii} = \psi_i \chi_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \; \frac{1}{l_{ii}\chi_{i+1}^2} \begin{vmatrix} l_{ii} & l_{i,i+1} \\ l_{i+1,i} & l_{i+1,i+1} \end{vmatrix} = \frac{\psi_{i+1}}{\chi_{i+1}} - \frac{\psi_i}{\chi_i} > 0.$$

Les conditions 1⁰, 2⁰ sont aussi suffisantes. D'après le théorème 2 il reste à démontrer que ses conditions étant remplies, la matrice L est complètement non négative et non singulière. Mais cela résulte des règles d'après lesquelles on peut calculer les mineurs de la matrice L.

---

[9]) Cette proposition est analogue à un théorème sur les noyaux à un couple, qu'on peut trouver dans l'article de M. Krein, Sur quelques applications ... cité dans [2]).

Règle 1. Si $1 \leqq i_1, k_1 < i_2, k_2 < \ldots < i_p, k_p \leqq n$, on a

$$L\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = \psi_{\alpha_1} \begin{vmatrix} \psi_{\alpha_1} & \psi_{\beta_1} \\ \chi_{\alpha_1} & \chi_{\beta_1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \psi_{\alpha_2} & \psi_{\beta_2} \\ \chi_{\alpha_2} & \chi_{\beta_2} \end{vmatrix} \ldots \begin{vmatrix} \psi_{\alpha_p} & \psi_{\beta_p} \\ \chi_{\alpha_p} & \chi_{\beta_p} \end{vmatrix} \chi_{\beta_p}$$

où

$$\alpha_j = \max(i_j, k_j), \ \beta_j = \min(i_j, k_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Règle 2. Si $1 \leqq \begin{matrix} i_1 < i_2 < \ldots < i_p \\ k_1 < k_2 < \ldots < k_p \end{matrix} \leqq n$ et la condition $1 \leqq i_1, k_1 < i_2, k_2 < \ldots < i_p, k_p \leqq n$ n'est pas remplie, alors

$$L\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = 0.$$

Le théorème est donc démontré.

Il est aisé de montrer, que si J est une matrice de Jacobi symétrique, $(J^*)^{-1}$ est une matrice L à un couple et inversement. On pourrait employer ce fait pour déduire le théorème 8 du théorème 7. De plus, en examinant les matrices $(J^*)^{-1}$ où J n'est pas symétrique, on pourrait obtenir une certaine généralisation du théorème 8.

Signalons les propriétés suivantes des matrices J et $(J^*)^{-1}$:

1⁰. *Dans une matrice J oscillatoire les seuls mineurs*

$$J\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$$

différents de zéro sont ceux pour lesquels

$$|i_1 - k_1| \leqq 1, \ |i_2 - k_2| \leqq 1, \ldots, |i_p - k_p| \leqq 1. \tag{21}$$

2⁰. *Dans une matrice $M = (J^*)^{-1}$ oscillatoire les seuls mineurs*

$$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$$

différents de zéro sont ceux pour lesquels

$$i_1, k_1 < i_2, k_2 < \ldots < i_p, k_p. \tag{22}$$

Ces deux propriétés (dont l'une est une conséquence de l'autre) présentent un certain intérêt, si l'on se rappelle que d'après le théorème 3 dans toute matrice oscillatoire A tous les mineurs

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$$

pour lesquels les indices i, k satisfont simultanément aux inégalités (21) et (22) sont toujours différents de zéro.

5⁰. *Matrices de Hankel.* Démontrons à présent le

Théorème 9. *Une matrice $S = \|s_{i+k}\|_1^n$ de Hankel est oscillatoire dans le cas et seulement dans le cas, où les deux formes quadratiques*

$$(23) \qquad \sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}\xi_i\xi_k \quad \text{et} \quad \sum_{i,k=0}^{n-2} s_{i+k+1}\xi_i\xi_k$$

sont positives définies. Si S est oscillatoire elle est complètement positive.

Démonstration. Les conditions sont nécessaires d'après le théorème 2. Pour prouver la suffisance des conditions, remarquons que si les deux formes quadratiques (23) sont positives définies on peut [10]) choisir d'une infinité de manières $2n$ nombres positifs $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ de telle façon que

$$(24) \qquad s_i = \sum_{j=1}^{n} \varrho_j \alpha_j^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, 2n-2).$$

En posant maintenant

$$t_{ik} = \alpha_k^i \sqrt{\varrho_k} \qquad (i=0, 1, \ldots, n-1;\ k=1, 2, \ldots, n)$$

on déduit de (24):

$$S = TT',$$

où $T = \|t_{ik}\|$ $(i=0, 1, \ldots, n-1; k=1, 2, \ldots, n)$ et T' est la matrice transposée de T.

Mais d'après la première partie de ce § la matrice $\|\alpha_k^i\|$ $(i=0, 1, \ldots, n-1;\ k=1, 2, \ldots, n)$ est complètement positive et par suite il en est de même pour T et donc pour T', car les facteurs $\sqrt{\varrho_k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ sont pris positifs. Donc S est complètement positive et par suite oscillatoire. Le théorème est ainsi démontré.

§ 4. Valeurs caractéristiques d'une matrice complètement non négative.

Dans ce qui va suivre nous nous servirons des théorèmes de Kronecker et de Perron. On peut les formuler de la manière suivante:

Théorème de Kronecker. $A = \|a_{ik}\|_1^n$ étant une matrice

---

[10]) Stieltjes, Recherches sur les fractions continues [Annales de Toulouse 8 (1894)], et aussi O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen [Leipzig (1929)], 412 et 393.

quelconque, les valeurs caractéristiques de la p-ième matrice adjointe $C_p(A)$ sont égales aux produits des valeurs caractéristiques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de A prises p à p.

Comme on le sait, on entend par la p-ième matrice adjointe $C_p(A)$ la matrice dont les éléments sont tous les mineurs $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix}$ d'ordre p, pris par exemple dans un ordre „lexicographique".

Théorème de Perron. Toute matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$, dont les éléments a_{ik} sont positifs, a une valeur caractéristique ϱ („valeur maximale"), possédant les propriétés suivantes:

a) La valeur ϱ est positive et simple.

b) La valeur ϱ est supérieure aux modules de toutes les autres valeurs caractéristiques de A.

c) Les coordonnées du vecteur propre correspondant à ϱ sont toutes différentes de zéro et de même signe [11]).

En s'appuyant sur ces deux théorèmes on peut établir le

Théorème 10. *Les valeurs caractéristiques de toute matrice A oscillatoire sont toutes simples et positives.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ toutes les valeurs caractéristiques de la matrice A ordonnées par grandeurs de module: $|\lambda_1| \geqq |\lambda_2| \geqq \ldots \geqq |\lambda_n|$.

Considérons d'abord le cas où A est une matrice complètement positive. Dans ce cas la matrice adjointe est une matrice à éléments positifs; en appliquant à cette matrice les théorèmes de Kronecker et de Perron on trouve

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p > 0 \quad (p=1, 2, \ldots, n); \quad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p > |\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{p-1}\lambda_{p+1}| \quad (p=1, 2, \ldots, n-1),$$

car le produit $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p$ est évidemment la valeur maximale de $C_p(A)$. D'où

$$\lambda_p > 0 \quad (p=1, 2, \ldots, n) \quad \text{et} \quad \lambda_p > \lambda_{p+1} \quad (p=1, 2, \ldots, n-1).$$

Donc le théorème est démontré pour le cas considéré.

Passons au cas général où A est oscillatoire quelconque.

Soit m un nombre entier, quelconque $\geqq n-1$. Cela posé, les matrices A^m et A^{m+1} sont complètement positives. Par conséquent leurs valeurs caractéristiques respectives λ_p^m $(p=1, 2, \ldots, n)$ et λ_p^{m+1} $(p=1, 2, \ldots, n)$ satisfont aux inégalités

---

[11]) O. Perron, Jacobischer Kettenbruchalgorithmus [Math. Ann. 64 (1907), 1—76] 47.

$$\lambda_1^m > \lambda_2^m > \ldots > \lambda_n^m > 0; \ \lambda_1^{m+1} > \lambda_2^{m+1} > \ldots > \lambda_n^{m+1} > 0$$

d'où

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0$$

c.q.f.d.

La notion de matrice oscillatoire peut être généralisée de la manière suivante:

Une matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ sera dite oscillatoire de degré d si tous les mineurs de A d'ordre $\leqq d$ sont non négatifs et si une certaine puissance $A^\varkappa$ a tous ses mineurs d'ordre $\leqq d$ positifs.

La méthode qui nous a conduit au théorème 10 permet d'établir le théorème plus général:

THÉORÈME 11. *Toute matrice oscillatoire de degré d a d valeurs caractéristiques positives et simples qui sont supérieures aux modules de toutes les autres valeurs caractéristiques.*

Pour étudier le spectre d'une matrice complètement non négative générale établissons le

LEMME. *Toute matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ complètement non négative et de rang r peut être indéfiniment approchée par une matrice complètement non négative de même rang et dont tous les mineurs d'ordre $\leqq r$ sont positifs.*

Démonstration. Considérons la matrice de Jacobi:

$$J_\varepsilon = \begin{Vmatrix} 1 & \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & & \vdots \\ 0 & \varepsilon & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \varepsilon \\ 0 & \cdots & \cdots & \varepsilon & 1 \end{Vmatrix}.$$

Pour ε assez petit tous les mineurs principaux de J sont positifs [12]) et par suite J_ε est oscillatoire (voir théorème 7). Mais alors

$$I_\varepsilon = J_\varepsilon^{n-1}$$

est complètement positif.

Posons à présent

$$A_\varepsilon = I_\varepsilon A I_\varepsilon, \text{ alors } \lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon = A.$$

D'autre part, de l'identité

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \ldots i_p \\ k_1 \, k_2 \ldots k_p \end{pmatrix} = \sum I_\varepsilon \begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \ldots i_p \\ \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_p \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_p \\ \beta_1 \, \beta_2 \ldots \beta_p \end{pmatrix} I_\varepsilon \begin{pmatrix} \beta_1 \, \beta_2 \ldots \beta_p \\ k_1 \, k_2 \ldots k_p \end{pmatrix}$$

---

[12]) Il est aisé de voir que ce sera vrai pour $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{n+1}}$.

on conclut que tous les mineurs de A_ε d'ordre $\leqq r$ sont positifs tandis que tous les mineurs d'ordre $> r$ sont égaux à zéro. Le lemme est donc démontré.

En partant de ce lemme on établit au moyen de raisons de continuité, le

THÉORÈME 12. *Toutes les valeurs caractéristiques d'une matrice complètement non négative sont non négatives.*

§ 5. Vecteurs propres des matrices oscillatoires.

1. A chaque nombre caractéristique λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n;$ $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n)$ d'une matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ oscillatoire correspond un vecteur propre $\overset{j}{u} = (u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj})$ déterminé à un scalaire multiplicatif près par le système des équations

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_{kj} = \lambda_j u_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

La matrice $U = \|u_{ij}\|_1^n$ des coordonnées des vecteurs propres sera dite *matrice fondamentale.* D'apres (25), la matrice fondamentale U satisfait à la relation caractéristique suivante

$$AU = U \|\lambda_i \delta_{ik}\|_1^n \qquad \left(\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}\right) \tag{26}$$

La matrice U étant non singulière, considérons encore la matrice V inverse et transposée de U:

$$V = (U')^{-1}.$$

En multipliant l'égalité (26) une fois à gauche et une fois à droite par la matrice U^{-1} et en passant aux matrices transposées, on obtient

$$A'V = V \|\lambda_j \delta_{ik}\|_1^n;$$

donc V est la matrice fondamentale pour A'.

Enonçons à présent le théorème suivant:

THÉORÈME 13. *$A = \|a_{ik}\|_1^n$ étant une matrice oscillatoire et $U = \|u_{ik}\|_1^n$ sa matrice fondamentale, pour chaque p fixé $\leqq n$ tous les mineurs*

$$U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} \qquad (1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqq n).$$

sont différents de zéro et de même signe. La matrice $V = (U')^{-1}$ a la même propriété.

Démonstration. La matrice oscillatoire A et la matrice complètement positive $A^{\varkappa}$ ayant la même matrice fondamentale U on peut supposer, pour étudier U, que A est complètement positive.

Il suit de la relation (26) que

$$\sum_{k_1<k_2<\ldots<k_p} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} U\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_p U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix}.$$

Cette égalité montre que les mineurs $U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqq n)$ peuvent être regardés comme les coordonnées d'un vecteur propre de la matrice adjointe $C_p(A)$ correspondante à la racine maximale $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_p$. Mais la matrice $C_p(A)$ étant une matrice à élements positifs, il résulte du théorème de M. Perron que tous ces nombres sont différents de zéro et de même signe.

Le même fait a lieu pour V, car la matrice A' est comme A une matrice complètement positive.

Le théorème est donc démontré.

Corollaire 1. *A étant oscillatoire, on peut choisir les vecteurs propres $\overset{j}{u}(u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ de manière qu'on ait simultanément*

$$(27) \quad U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} > 0, \quad V\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} > 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqq n; \\ p = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Démonstration. En effet, d'après le théorème 13, il est clair qu'on peut choisir des vecteurs propres de façon que

$$U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} > 0 \quad (1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqq n;\ p = 1, 2, \ldots, n).$$

Mais alors, d'après le même théorème 13 et la relation

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} = 1$$

(qui résulte de $UV' = E$) on aura aussi pour V les inégalités exigées.

Corollaire 2. *Pour une matrice oscillatoire A on peut choisir les vecteurs propres $\overset{j}{u}(u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj})$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ de manière que*

$$(28) \quad U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} > 0, \quad (-1)^{np+\Sigma i_k} \cdot U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ n & n-1 & \ldots & n-p+1 \end{pmatrix} > 0$$

$$(1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqq n;\ p = 1, 2, \ldots, n).$$

Démonstration. En effet, les inégalités (27) et (28) sont équivalentes, parce que d'après le théorème connu sur le déterminant réciproque

$$V\begin{pmatrix} j_1\, j_2 \dots j_{n-p} \\ 1\; 2 \dots n-p \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{np+\Sigma i_k} U\begin{pmatrix} i_1\; i_2 & \dots i_p \\ n\; n-1 & \dots n-p+1 \end{pmatrix}}{U\begin{pmatrix} 1\; 2 \dots n \\ 1\; 2 \dots n \end{pmatrix}},$$

où $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-p}$ forment conjointement le système des indices $1, 2, \dots, n$.

2. Pour pousser plus loin l'étude de la matrice fondamentale U, il nous faudra introduire quelques notions nouvelles.

Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ une suite finie de nombres réels, on sait ce qu'on doit entendre sous le nombre de variations de signe dans cette suite lorsque tous les $u_i \neq 0$. Si quelques-uns des termes de la suite sont égaux à zéro, on peut attribuer arbitrairement à chacun de ces termes l'un ou l'autre signe; après cela, on pourrait compter le nombre de variations dans notre suite. Le maximum (minimum) possible de ce nombre sera appellé le nombre *maximal* (*minimal*) des variations dans la suite $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Si les nombres maximaux et minimaux des variations dans une suite $u_1, u_2, \dots, u_n$ sont égaux à un même nombre r on dira que la suite $u_1, u_2, \dots, u_n$ possède *exactement* r variations. Ce cas se présente quand et seulement quand $u_1 u_n \neq 0$ et deux termes consécutifs quelconques u_i et u_{i+1} ne s'annulent pas simultanément.

LEMME 1. *Si les coordonnées des vecteurs* $\overset{j}{u}(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj})$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ *satisfont aux inégalités*

$$(29) \qquad U\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \dots i_p \\ 1\; 2 \dots p \end{pmatrix} > 0 \qquad (1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_p = n;\ p = 1, 2, \dots, m)$$

le nombre maximal des variations dans la suite de coordonnées de tout vecteur $u = c_1 \overset{1}{u} + c_2 \overset{2}{u} + \dots + c_p \overset{p}{u}$ $(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_p^2 > 0)$ *ne surpasse pas* $p - 1$ $(p = 1, 2, \dots, m)$.

Démonstration. Considérons d'abord le cas particulier: $c_1 = c_2 = \dots = c_{p-1} = 0,\ c_p = 1$ $(u = \overset{p}{u})$. Admettons, contrairement à ce qu'on doit démontrer, que le nombre maximal des variations dans la suite

$$(30) \qquad u_{1p}, u_{2p}, \dots, u_{np}$$

est supérieur à $p - 1$. Alors après avoir attribué aux coordonnées nulles des signes convenablement choisis, on pourra extraire de la suite (30) une suite partielle

$$(31) \qquad u_{\nu_1 p}, u_{\nu_2 p}, \ldots, u_{\nu_{p+1} p}$$

telle que tous deux termes consécutifs aient des signes contraires.

Cela étant posé, considérons les déterminants

$$U\begin{pmatrix}\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p\\ 1\ 2 \ldots p\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{p+i} u_{\nu_i p} U\begin{pmatrix}\nu_1 \ldots \nu_{i-1} & \nu_{i+1} & \ldots \nu_p\\ 1 \ldots i-1 & i & \ldots p-1\end{pmatrix}$$

$$U\begin{pmatrix}\nu_2 \nu_3 \ldots \nu_{p+1}\\ 1\ 2 \ldots p\end{pmatrix} = \sum_{i=2}^{p+1} (-1)^{p+i-1} u_{\nu_i p} U\begin{pmatrix}\nu_2 \ldots \nu_{i-1} & \nu_{i+1} & \ldots \nu_{p+1}\\ 1 \ldots i-2 & i-1 & \ldots p-1\end{pmatrix}.$$

Ces déterminants sont positifs. D'autre part, chaque somme ne contient pas de termes de signes différents. Par conséquent, tous les termes des deux sommes sont non négatifs. Cela étant établi, la comparaison des deux sommes nous donne

$$u_{\nu_2 p} = u_{\nu_3 p} = \ldots = u_{\nu_p p}.$$

Or

$$U\begin{pmatrix}\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p\\ 1\ 2 \ldots p\end{pmatrix} = (-1)^{p+1} u_{\nu_1 p} U\begin{pmatrix}\nu_2 \ldots \nu_p\\ 1 \ldots p-1\end{pmatrix} > 0,$$

$$U\begin{pmatrix}\nu_2 \nu_3 \ldots \nu_{p+1}\\ 1\ 2 \ldots p\end{pmatrix} = u_{\nu_{p+1} p} U\begin{pmatrix}\nu_2 \ldots \nu_p\\ 1 \ldots p-1\end{pmatrix} > 0;$$

d'où

$$(-1)^{p+1} u_{\nu_1 p} u_{\nu_{p+1} p} > 0.$$

Mais cela est en contradiction avec l'hypothèse que deux termes consécutifs quelconques de la suite (31) sont de signes contraires.

Le lemme étant démontré pour le cas particulier $u = \overset{p}{u}$, passons au cas général $u = c_1 \overset{1}{u} + c_2 \overset{2}{u} + \ldots + c_p \overset{p}{u}$.

Il est évident qu'il suffit de considérer le cas où $c_p > 0$. Mais dans ce cas il est aisé de voir que la suite de vecteurs $\overset{1}{u}, \overset{2}{u}, \ldots, \overset{p-1}{u}$, u satisfait aussi aux conditions du lemme.

Le lemme est donc démontré.

THÉORÈME 14. *Les* $\overset{k}{u} = (u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{nk})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *étant les vecteurs propres d'une matrice oscillatoire* A *correspondants aux valeurs caractéristiques* λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n;$ $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n)$ *le nombre des variations de toute combinaison linéaire* $c_p \overset{p}{u} + c_{p+1} \overset{p+1}{u} + \ldots + c_q \overset{q}{u}$ $(1 \leqq p \leqq q \leqq n)$ *est compris entre les limites* $p-1$ *et* $q-1$.

En particulier le nombre des variations de tout vecteur propre $\overset{k}{u}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *est exactement égal à* $k - 1$.

Démonstration. D'après le lemme précédent, le nombre maximal des variations du vecteur $u = c_p \overset{p}{u} + \ldots + c_q \overset{q}{u}$ ne surpasse pas $q - 1$. D'autre part, les vecteurs $\overset{k}{u}{}^* = (u^*_{1k}, u^*_{2k}, \ldots, u^*_{nk})$ où $u^*_{ik} = (-1)^{n+i} u_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ ont, d'après le corollaire 2 du théorème 13 la propriété que

$$U^* \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ n & n-1 & \ldots & n-r+1 \end{pmatrix} \geqq 0 \quad (1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqq n).$$

Donc, en vertu du lemme 1, que nous appliquerons maintenant aux vecteurs $\overset{n}{u}{}^*, \overset{n-1}{u}{}^*, \ldots, \overset{1}{u}{}^*$ pris dans l'ordre indiqué, le nombre maximal des variations du vecteur

$$u^* = c_q \overset{q}{u}{}^* + \ldots + c_p \overset{p}{u}{}^*$$

ne surpasse pas $n - p$. Mais il est évident que la somme du nombre maximal des variations de u^* et du nombre minimal des variations de u est égale à $n - 1$. Par conséquent le nombre minimal des variations de u est égal à $p - 1$.

Le théorème est donc démontré.

3. A présent nous allons étendre les résultats précédents aux matrices oscillatoires de degré d quelconque. Dans ce but il nous faut d'abord établir les deux lemmes suivants:

LEMME 2. *Si les coordonnées des vecteurs* $\overset{k}{u} = (u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{nk})$ $(k = 1, 2, \ldots, m;\ m \leqq n)$ *satisfont aux inégalités*

$$U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} > 0 \quad (p = 1, 2, \ldots, m),$$

pour tout système de $m - 1$ *couples d'indices* $(\mu_i, \mu_i + 1)$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1;\ 1 \leqq \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_{m-1} < n)$ *on peut construire un vecteur* $u = c_1 \overset{1}{u} + \ldots + c_m \overset{m}{u}$ *dont toutes les coordonnées* u_i *sont différentes de zéro et tel que*

$$u_{\mu_i} u_{\mu_i+1} < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Démonstration. Considérons le système de $2m - 2$ équations à $2m - 1$ inconnues $c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, d_{m-1}$

$$(32) \qquad \begin{aligned} u_{\mu_i} &= \sum_{k=1}^{m} c_k u_{\mu_i k} = d_i \\ u_{\mu_i+1} &= \sum_{k=1}^{m} c_k u_{\mu_i+1, k} = -d_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Soit à partir de ce moment $c_1, \ldots, c_m, d_1, \ldots, d_{m-1}$ une solution non triviale de ce système homogène. Dans cette solution au moins un des $c_k \neq 0$ et, par conséquent, le vecteur $u = c_1 \overset{1}{u} + c_2 \overset{2}{u} + \ldots + c_m \overset{m}{u} \neq 0$.

Il est évident qu'on peut attribuer aux coordonnées $u_i = 0$ du vecteur u des signes tels que signe $u_{\mu_i} = -$ signe u_{μ_i+1} $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$; cela posé, on peut affirmer, d'après le lemme 1, que

$$\text{signe } u_\nu = \text{signe } u_{\nu+1} \text{ pour tout } \nu \neq \mu_i; \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

D'autre part, signalons le fait suivant:

Si une suite quelconque $u_1, u_2, \ldots, u_n$ contient des termes $= 0$ ainsi que des termes $\neq 0$ et si les signes attribués aux termes $= 0$ correspondent au cas où la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n$ présente le nombre maximal de variations, au moins l'une de ces variations est donnée par un couple $(u_\nu, u_{\nu+1})$ contenant un terme égal à zéro et l'autre différent de zéro.

Il en découle que toutes les coordonnées du vecteur u sont différentes de zéro, car $m-1$ est le nombre maximal de variations de signe dans la suite des coordonnées $u_1, u_2, \ldots, u_n$ (voir lemme 1) et dans (32) $|u_{\mu_i}| = |u_{\mu_i+1}| = |d_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$.

Donc le lemme est démontré.

Lemme 3. *Si les coordonnées des vecteurs* $\overset{j}{u}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ *satisfont aux conditions* (29) *et si un vecteur* $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq 0$ *est orthogonal à tous les vecteurs* $\overset{j}{u}$

$$v_1 u_{1j} + v_2 u_{2j} + \ldots + v_n u_{nj} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{33}$$

le nombre minimal h *des variations dans la suite des coordonnées* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *n'est pas inférieur à* m.

Démonstration. Admettons le contraire, c'est-à-dire que $h < m$. h étant le nombre minimal des variations, on peut attribuer aux termes nuls dans la suite $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des signes $+$ et $-$ de manière que cette suite n'ait que h variations, se réalisant dans les couples (v_{μ_i}, v_{μ_i+1}) $(i = 1, 2, \ldots, h)$.

Formons maintenant d'après le lemme 2 un vecteur $u = c_1 \overset{1}{u} + c_2 \overset{2}{u} + \ldots + c_{h+1} \overset{h+1}{u}$ dont toutes les coordonneés u_i étant différentes de zéro forment une suite à h variations exactement, ces variations se produisant entre u_{μ_i} et u_{μ_i+1} $(i = 1, 2, \ldots, h)$. Pour un tel vecteur u on aura d'une part en vertu de (33) que

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = 0,$$

et d'autre part que tous les produits $u_i v_i$ différents de zéro sont de même signe.

Nous sommes parvenus à une contradiction. Le lemme est donc démontré.

THÉORÈME 15. *Soit $A = \|a_{ik}\|_1^n$ une matrice oscillatoire de degré d; soient $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_d$ ses valeurs caractéristiques positives et simples surpassant les modules de toutes les autres valeurs caractéristiques (voir le théorème* 11).

Cela étant, on peut normer les vecteurs propres $\overset{j}{u} = (u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj})$ et $\overset{j}{v} = (v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{nj})$ $(j = 1, 2, \dots, d)$ des matrices A et A' correspondants aux valeurs caractéristiques λ_j $(j = 1, 2, \dots, d)$ de façon que ces vecteurs forment un système biorthogonal

$$(34) \qquad (\overset{j}{u}, \overset{k}{v}) = u_{1j} v_{1k} + u_{2j} v_{2k} + \dots + u_{nj} v_{nk} = 0,$$

et que les inégalités

$$(35) \qquad U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} > 0, \quad V\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} > 0 \qquad (p = 1, 2, \dots, d)$$

aient lieu.

Le nombre des variations de toute combinaison linéaire $c_p \overset{p}{u} + \dots + c_q \overset{q}{u} \neq 0$ $(1 \leqq p \leqq q \leqq n)$ est compris entre les limites $p - 1$ et $q - 1$. En particulier le nombre des variations du vecteur $\overset{p}{u}$ est égal exactement à $p - 1$.

Démonstration. On peut normer les vecteurs propres $\overset{j}{u}$ et $\overset{j}{v}$ $(j = 1, 2, \dots, d)$ de façon qu'ils forment un système biorthogonal, parce que les valeurs caractéristiques $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ sont simples. Ayant les relations (34) on obtient évidemment

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} = 1.$$

Pour établir (35) il ne reste qu'à répéter les raisonnements dont nous nous sommes servis dans le théorème 13 et le corollaire 1.

Le nombre maximal des variations de la combinaison $c_p \overset{p}{u} + \dots + c_q \overset{q}{u} \neq 0$ ne surpasse pas $q - 1$, d'après le lemme 1.

D'autre part, cette combinaison étant orthogonale aux vecteurs $\overset{1}{v}, \overset{2}{v}, \dots, \overset{p-1}{v}$ le nombre minimal des variations de cette combinaison ne dépasse pas $p - 1$.

Le théorème est donc démontré.

Remarque. Il est à remarquer que les résultats de ce § ainsi que du § précédent peuvent être étendus dans un certain sens aux matrices dont tous les mineurs du même ordre quelconque ont le même signe.

4. En terminant ce § peut-être serait-il intéressant d'indiquer une caractérisation spectrale complète de celles des matrices A dont une certaine puissance $A^\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots$) est complètement positive.

THÉORÈME 16. *Pour qu'il existe un exposant entier positif $\varkappa$ tel que la matrice $A^\varkappa$ soit une matrice complètement positive, il faut et il suffit que:*

1⁰. *Les valeurs caractéristiques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matrice $A = \|a_{ik}\|_1^n$ soient toutes réelles et de modules inégaux différents de zéro:* $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$.

2⁰. *Les vecteurs propres* $\overset{j}{u}(u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{nj})$ *correspondants puissent être choisis de manière que:*

$$(36)\qquad U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} > 0, \quad V\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ 1 & 2 & \ldots & p \end{pmatrix} > 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \leqq i_1 < \ldots < i_p \leqq n; \\ p = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

où

$$U = \|u_{ik}\|_1^n \text{ et } V = (U')^{-1}.$$

Démonstration. Les conditions sont suffisantes. En effet, si la matrice $A^\varkappa$ est complètement positive, ses valeurs caractéristiques $\lambda_1^\varkappa, \lambda_2^\varkappa, \ldots, \lambda_n^\varkappa$ sont toutes positives et distinctes, donc tous les modules $|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|$ sont inégaux entre eux et $\neq 0$; par suite chaque λ_i est réel, car dans le cas contraire à tout λ_i complexe correspondrait la valeur caractéristique conjuguée. Cela étant, les matrices A et $A^\varkappa$ ont les mêmes matrices fondamentales, ce qui d'après le théorème 15 implique la condition 2⁰.

Les conditions sont aussi suffisantes. Posons $A^\nu = \|a_{ik}^{(\nu)}\|_1^n$. En vertu de la relation: $AU = U\|\lambda_i \delta_{ik}\|_1^n$, on a

$$A = U\|\lambda_i \delta_{ik}\|_1^n U^{-1};$$

d'où

$$(37)\qquad A^\nu = U\|\lambda_i^\nu \delta_{ik}\| U^{-1} = U\|\lambda_i^\nu \delta_{ik}\| V'.$$

En égalant les éléments correspondants des deux membres on obtient:

$$(38)\qquad a_{ik}^{(\nu)} = \lambda_1^\nu u_{i1} v_{k1} + \lambda_2^\nu u_{i2} v_{k2} + \dots + \lambda_n^\nu u_{in} v_{kn} =$$
$$= \lambda_1^\nu \left[u_{i1} v_{k1} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^\nu u_{i2} v_{k2} + \dots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^\nu u_{in} v_{kn} \right].$$

Les inégalités (36) donnent pour $p = 1 : u_{i1} > 0$ et $v_{k1} > 0$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ d'où, ayant d'après 1° $|\lambda_1| > |\lambda_p|$ $(p = 2, 3, \dots, n)$, on conclut aisément de (38), que pour tout ν pair et suffisamment grand, on a

$$a_{ik}^{(\nu)} > 0 \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

De l'égalité (37) il suit aussi que

$$A^{(\nu)} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1}^{(\nu)} & \dots & a_{i_1 k_p}^{(\nu)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p k_1}^{(\nu)} & \dots & a_{i_p k_p}^{(\nu)} \end{vmatrix} =$$
$$= \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p} \lambda_{\alpha_1}^\nu \lambda_{\alpha_2}^\nu \dots \lambda_{\alpha_p}^\nu \, U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix}.$$

Par des considérations analogues aux précédentes, on s'assure que pour ν suffisamment grand le signe de la somme coïncide avec celui du „terme majeur"

$$\lambda_1^\nu \lambda_2^\nu \dots \lambda_p^\nu \, U \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_p \\ 1 & 2 & \dots & p \end{pmatrix},$$

qui pour ν pair et $i_1 < i_2 < \dots < i_p$; $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ est d'après (36) positif.

Or il est évident qu'il existe un $N > 0$ tel que pour tout $\varkappa = 2\mu > N$ la matrice $A^\varkappa$ soit complètement positif.

Le théorème est donc démontré [13]).

Remarque. Chemin faisant, nous avons démontré que si une puissance quelconque de la matrice A est complètement positive, il existe un nombre N tel que pour tout $\varkappa = 2\mu > N$ la matrice $A^\varkappa$ est une matrice complètement positive. Dans le cas où les valeurs caractéristiques de la matrice A sont positives, on peut rejeter la condition que $\varkappa$ soit pair.

---

[13]) Par des considérations analogues on peut aussi établir le théorème suivant: Pour qu'il existe un polynôme réel $\varphi(x)$ tel que $\varphi(A)$ soit complètement positive, il faut et il suffit que:

1°. Toutes les valeurs caractéristiques de A soient réelles et distinctes entre elles.

2°. Les vecteurs propres $\overset{j}{u}(u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj})$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ puissent être choisi de façon que les inégalités (36) aient lieu. Si l'on impose au polynome $\varphi(x)$ la condition d'être de la forme $(x+a)^\varkappa$ on aura pour les valeurs caractéristiques de A les inégalités: $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$.

§ 6. Etude de la matrice $\lambda E - A$ où A est oscillatoire.

$A = \|a_{ik}\|_1^n$ étant une matrice quelconque, désignons par B_t la matrice qu'on déduit de A en y remplacant l'élément a_{11} par $a_{11} + t$.

Comme pour $t > 0$

$$B_t\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} \geqq A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix},$$

on peut affirmer que:

I. *Si A est une matrice oscillatoire il en est de même de B_t* $(t>0)$.

L'équation caractéristique de B_t s'écrit

$$(39) \qquad |\lambda E - B_t| \equiv D(\lambda) - tA_{11}(\lambda) = 0,$$

où $D(\lambda) = |\lambda\delta_{ik} - a_{ik}|_1^n$ et $A_{11}(\lambda) = |\lambda\delta_{ik} - a_{ik}|_2^n$.

Il est aisé aussi de voir que:

II. *Si A est une matrice oscillatoire il en est de même de la matrice déduite de A en multipliant une ligne ou une colonne de A par un nombre positif.*

Désignons par $B^{(t)}$ la matrice qu'on déduit de A en multipliant la première ligne de A par le nombre $\frac{1}{1+t} > 0$. L'équation caractéristique de $B^{(t)}$ s'écrit:

$$(40) \qquad (1+t)\,|\lambda E - B^{(t)}| \equiv D(\lambda) + t\lambda A_{11}(\lambda) = 0.$$

Après ces préliminaires démontrons le

Théorème 17. *Si $A = \|a_{ik}\|_1^n$ est une matrice oscillatoire, $A_{ik}(\lambda)$ étant le complément algébrique de l'élément $\lambda\delta_{ik} - a_{ik}$ de la matrice $\|\lambda\delta_{ik} - a_{ik}\|_1^n$, la suite*

$$(41) \qquad A_{11}(\lambda),\ A_{12}(\lambda),\ \dots,\ A_{1n}(\lambda)$$

est une suite de Sturm dans l'intervallè $(0, \infty)$.

Démonstration. Pour établir ce théorème il suffit de démontrer, que la série (41) jouit des trois propriétés suivantes:

1°. Il existe deux nombres positifs tels que λ passant d'un de ces nombres à l'autre la série perd $n-1$ variations.

2°. Le dernier terme $A_{1n}(\lambda)$ conserve son signe pour $0 < \lambda < \infty$.

3°. Si pour un $\lambda > 0$ le terme intérieur $A_{1i}(\lambda)$ $(1 < i < n)$ s'annule, les deux termes voisins $A_{1,i-1}(\lambda)$ et $A_{1,i+1}(\lambda)$ sont différents de zéro et de signes contraires pour cette valeur de λ.

Soient $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ les valeurs caractéristiques de la matrice A. En remarquant que pour $\lambda = \lambda_i$ la série (41) fournit la suite des coordonnées du vecteur propre correspondant à λ_i, on en conclut d'après le théorème 15 que la suite

$$(42) \qquad A_{11}(\lambda_i),\ A_{12}(\lambda_i),\ldots,A_{1n}(\lambda_i)$$

a exactement $i-1$ variations.

En prenant $i=1$ ou n on obtient la propriété 1^0.

La deuxième propriété résulte de ce que A étant une matrice complètement non négative et non singulière, le polynôme

$$(-1)^{n-1}A_{1n}(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & \cdot \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdot & & & \ddots & a_{n-1,n-1}-\lambda \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{n1}\lambda^{n-2}+\sum_{i>1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{ii} \\ a_{n1} & a_{ni}\end{vmatrix}\lambda^{n-3}+\ldots$$

a tous ses coefficients non négatifs et $A_{1n}(\lambda_1)\neq 0$.

Passons à la troisième propriété. Quel que soit le nombre positif λ_0 tel que $A_{11}(\lambda_0)\neq 0$ on peut toujours trouver un $t>0$ tel que λ_0 soit une racine de l'une des équations (39) ou (40). Mais t étant ainsi choisi, λ_0 sera une valeur caractéristique de B_t ou bien de $B^{(t)}$. Les matrices A, B_t, $B^{(t)}$ ne différant que par les éléments de la première ligne, la suite

$$A_{11}(\lambda_0),\ A_{12}(\lambda_0),\ldots,A_{1n}(\lambda_0)$$

fournit le vecteur propre de B ou bien de $B^{(t)}$ correspondant à λ_0. En appliquant à ce vecteur le théorème 15 nous obtenons la propriété 3^0 pour tout $\lambda_0>0$ tel que $A_{11}(\lambda_0)\neq 0$.

Il reste à considérer le cas où $\lambda_0>0$ et $A_{11}(\lambda_0)=0$.

Mais dans ce cas il résulte des relations

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda_0\delta_{ik}-a_{ik})A_{1k}(\lambda_0)=\sum_{k=2}^{n}(\lambda_0\delta_{ik}-a_{ik})A_{1k}(\lambda_0)=0 \qquad (i=2,3,\ldots,n)$$

que la suite $A_{12}(\lambda_0),\ A_{13}(\lambda_0),\ldots,A_{1n}(\lambda_0)$ $(A_{1n}(\lambda_0)\neq 0)$ forme un vecteur propre de la matrice $\|a_{ik}\|_2^n$. Donc en appliquant aussi à ce vecteur le théorème 15, on s'assure que pour les valeurs de λ exceptionnelles en question la propriété 3^0 subsiste.

Le théorème est ainsi démontré.

Corollaire 1. *Si la matrice $A=\|a_{ik}\|_1^n$ est oscillatoire, les zéros de deux polynomes consécutifs quelconques de la suite*

$$|\lambda - a_{11}|, \quad \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}, \ldots$$

se séparent.

Démonstration. En effet il suffit d'après le théorème de démontrer la proposition pour les deux derniers polynômes de cette série $D(\lambda)$ et $A_{11}(\lambda)$.

Lorsque λ passe de λ_{i+1} à λ_i la suite de Sturm (41) perd exactement une variation de signe; donc entre λ_{i+1} et λ_i se trouve toujours un zéro de $A_{11}(\lambda)$, et par conséquent un seulement.

Corollaire 2. *Si la matrice* $A = \|a_{ik}\|_1^n$ *est oscillatoire,* $U = \|u_{ik}\|_1^n$ *étant sa matrice fondamentale,* $V = (U')^{-1} = \|v_{ik}\|_1^n$, *les inégalités*

(43) $$u_{1j} v_{1j} > 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

sont vérifiées.

Démonstration. D'après la relation

$$A = U \|\lambda_i \delta_{ik}\| U^{-1}$$

on a

$$(\lambda E - A)^{-1} = U \left\| \frac{\delta_{ik}}{\lambda - \lambda_i} \right\| U^{-1} = U \left\| \frac{\delta_{ik}}{\lambda - \lambda_i} \right\| V'.$$

D'où

$$\frac{A_{11}(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{u_{1j} v_{1j}}{\lambda - \lambda_j}.$$

En vertu du corollaire précédent tous les résidus $\frac{A_{11}(\lambda_j)}{D'(\lambda_j)} = u_{1j} v_{1j}$ sont de même signe; d'autre part ayant $UV' = E$, on voit que $\sum_{j=1}^{n} u_{1j} v_{1j} = 1$. La proposition est ainsi démontrée.

En terminant ce § démontrons le

Théorème 18. *Si* $A = \|a_{ik}\|_1^n$ *est une matrice oscillatoire,* λ_1 *étant la plus grande et* λ_n *la plus petite valeur caractéristique de* A, *on a:*

(44) $$\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ik}} > 0, \quad (-1)^{i+k} \frac{\partial \lambda_n}{\partial a_{ik}} > 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)\text{[14]}.$$

---

[14]) La première des inégalités (44) comme l'a montré déjà Frobenius, a lieu pour la classe de matrices oscillatoires de degré 1. Pour les matrices de Jacobi symétriques ces inégalités ont été signalées dans l'article de M. Krein, Sur le spectre des matrices de Jacobi etc. [Rec. Math. **40** (1933), 460].

Démonstration. Les matrice U et V étant les mêmes que dans le corollaire 2, on a

$$V'AU = \left\| \lambda_i \delta_{ik} \right\|_1^n ;$$

d'où

$$\lambda_j = \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs} u_{sj} v_{rj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

En différentiant cette inégalité par rapport à a_{ik} on a

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{ik}} = u_{kj} v_{ij} + \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs} u_{sj} \frac{\partial v_{rj}}{\partial a_{ik}} + \sum_{r,s=1}^{n} a_{rs} \frac{\partial u_{sj}}{\partial a_{ik}} v_{rj} .$$

En vertu des relations

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs} u_{sj} = \lambda_j u_{rj}, \quad \sum_{r=1}^{n} a_{rs} v_{rj} = \lambda_j v_{sj}$$

on obtient

$$(45) \qquad \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{ik}} = u_{kj} v_{ij} + \lambda_j \frac{\partial}{\partial a_{ik}} \sum_{r=1}^{n} u_{rj} v_{rj} = u_{kj} v_{ij}, \quad \text{car } \sum_{r=1}^{n} u_{rj} v_{rj} = 1 .$$

Donc, d'après le théorème 15

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial a_{ik}} = u_{k1} v_{i1} > 0 .$$

D'autre part, d'après le même théorème, signe $u_{kn} = (-1)^{k-1}$ signe u_{1n} et signe $v_{in} = (-1)^{i-1}$ signe v_{1n} ; donc, en vertu du corollaire 2

$$\text{signe} \frac{\partial \lambda_n}{\partial a_{ik}} = \text{signe} \left[(-1)^{i+k} u_{1n} v_{1n} \right] = (-1)^{i+k} .$$

Le théorème est établi.

De même on démontre le

Théorème 19. *Si $A = \left\| a_{ik} \right\|_1^n$ est une matrice oscillatoire de valeurs caractéristiques $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ on a:*

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{11}} > 0, \ \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{nn}} > 0; \ (-1)^{j-1} \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{1n}} > 0, \ (-1)^{j-1} \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{n1}} > 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Démonstration. La première inégalité se déduit de (43), car d'après (45)

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{11}} = u_{1j} v_{1j} .$$

Cela étant, on en déduit par raison de symétrie la deuxième inégalité. Pour obtenir les inégalités restantes il suffit de remarquer que

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{1n}} = u_{nj}\, v_{1j}\,, \quad \frac{\partial \lambda_j}{\partial a_{n1}} = u_{1j}\, v_{nj}$$

et

$$\text{signe}\, v_{nj} = (-1)^{j-1}\, \text{signe}\, v_{1j} = (-1)^{j-1}\, \text{signe}\, u_{1j}$$
$$\text{signe}\, u_{nj} = (-1)^{j-1}\, \text{signe}\, u_{1j} = (-1)^{j-1}\, \text{signe}\, v_{1j}\,.$$

(Reçu le 27 juillet 1936.)