

COMPOSITIO MATHEMATICA

S. SIDON

Über unvollständige Orthogonalsysteme

Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 373-379

http://www.numdam.org/item?id=CM_1937__4__373_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1937, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Über unvollständige Orthogonalsysteme ¹⁾

von
S. Sidon
Budapest

Hat das bezüglich des Intervalls $a < x < b$ orthogonale Funktionensystem $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, dessen Glieder für $a < x < b$ beschränkt sind, die Eigenschaft, daß jede Funktion $T(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$, wo die c_k beliebige reelle Konstanten bedeuten, für ein reelles $p > 2$ die Ungleichung

$$(1) \quad \int_a^b |T(x)|^p dx < C \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}$$

mit von $T(x)$ unabhängigem C ²⁾ erfüllt, während für jedes $\varepsilon > 0$

$$(2) \quad \overline{\lim}_a \frac{\int_a^b |T(x)|^{p+\varepsilon} dx}{\left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{\frac{p+\varepsilon}{2}}} = \infty$$

gilt ³⁾, so nenne ich p den charakteristischen Exponenten des

¹⁾ Für die in Betracht kommende Literatur siehe meine Noten: I. Bemerkungen über Fourier- und Potenzreihen [Acta Szeged 7 (1934), 85—94], insbesondere Einleitung und Teil 4. II. Über die Fourier-Konstanten der Funktionen der Klasse L_p für $p > 1$ [Acta Szeged 7 (1935), 175—176].

²⁾ C wird hier auch weiter diese Bedeutung haben.

³⁾ Auch das Erfülltsein von

$$(1') \quad \overline{\lim}_a \frac{\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \gamma_k \varphi_k(x) \right|^p dx}{n^{\frac{p}{2}}} < \infty,$$

wenn sämtliche $|\gamma_k| = 1$ oder

$$(1'') \quad \overline{\lim}_a \frac{\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \right|^p dx}{n^{\frac{p}{2}}} < \infty,$$

ist von Interesse.

nämlichen Systems. Gilt (1) für jedes reelle p , so sage ich, das System $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ habe den charakteristischen Exponenten ∞ .

Der charakteristische Exponent eines vollständigen normierten Orthogonalsystems ist 2, der des Systems $\cos x, \dots, \frac{\cos nx}{n^\alpha}, \dots$ ist $\frac{2}{1-2\alpha}$ wenn $\alpha < \frac{1}{2}$, ∞ , wenn $\alpha \geq \frac{1}{2}$.

Es lassen sich auch normierte, gleichmäßig beschränkte Orthogonalsysteme ⁴⁾ von beliebigem charakteristischen Exponenten > 2 angeben. Das System $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\left[\int_0^{2\pi} \psi_n^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}}, \dots$, wo $\psi_n(x) = \cos(2^n x) + \frac{\cos(2n+1)x}{n^\alpha}$, hat den charakteristischen

Exponenten $\frac{2}{1-2\alpha}$ wenn $\alpha < \frac{1}{2}$, ∞ , wenn $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Von den Teilsystemen des normierten trigonometrischen Orthogonalsystems sind solche von geradem ganzen charakteristischen Exponenten bekannt ⁵⁾. Wichtig wäre die Frage der Existenz von Teilsystemen jedes normierten vollständigen Orthogonalsystems von beliebigem charakteristischen Exponenten zu entscheiden.

Für ein bezüglich des Intervalls $a < x < b$ normiertes Orthogonalsystem $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ von charakteristischen Exponenten p gelten die Sätze:

A. Jede im Lebesgueschen Sinne integrierbare Funktion $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ gehört zur Klasse L_p .

B. Gehört $f(x)$ zur Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}$, so muß $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$, wo $c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx$, konvergieren ⁶⁾.

⁴⁾ Unter einem bezüglich des Intervalls $a < x < b$ gleichmäßig beschränkten Orthogonalsystem verstehe ich ein solches, dessen Funktionen für $a < x < b$ dem Betrage nach sämtlich unter einer gemeinsamen Schranke bleiben.

⁵⁾ Hat $\cos n_1 x, \sin n_1 x, \dots, \cos n_k x, \sin n_k x, \dots$ den charakteristischen Exponenten $2l$, wo $l > 1$ und ganz ist, so erfüllt, wenn $2^i < l$, i ganz, $\cos(2^i n_1 x), \sin(2^i n_1 x), \dots, \cos N_k x, \sin N_k x, \dots$ wo $N_k = \sum_{m=1}^{2^i} n_{k_m}$ (1'') mit dem Exponenten $\frac{l}{2^{i-1}}$. Für $i=1$ ist diese Tatsache schon in meiner „Über Fourier-Reihen mit Lücken“ [Compositio Mathematica 4 (1936), 78—81] enthalten. Dort ist auch eine Vermutung bezüglich des charakteristischen Exponenten von $\cos 2n_1 x, \sin 2n_1 x, \cos(n_1 + n_2)x, \dots$ ausgesprochen.

⁶⁾ Ist nur (1') oder (1'') erfüllt, so gilt $\sum_{k=1}^n |c_k| = O(n^{\frac{1}{2}})$, bzw. $\sum_{k=1}^n c_k = O(n^{\frac{1}{2}})$.

C. Für beliebige reelle Konstanten c_k gilt

$$\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right| dx > C \left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

woraus, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, die Existenz einer im Intervalle $a < x < b$ überall stetigen Funktion $f(x)$ mit $\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = \varepsilon_n$ folgt.

Bei den bisher untersuchten gleichmäßig beschränkten Orthogonalsystemen bezüglich eines Intervalls $a < x < b$ vom charakteristischen Exponenten p gilt für $\varepsilon > 0$ auch

$$\lim_E \frac{\int \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^{p+\varepsilon} dx}{\left(\sum_{k=1}^n c_k^2 \right)^{\frac{p+\varepsilon}{2}}} = \infty,$$

wenn E eine beliebige Menge von positivem Maße des Intervalls $a < x < b$ bedeutet.

In den folgenden Zeilen beweise ich, daß es zu jeder monoton wachsenden Funktion $H(k)$ mit $\lim H(k) = \infty$, $H(k) = O(\log k)$ ein bezüglich des Intervalls $0 < x < 2\pi$ normiertes, gleichmäßig beschränktes Orthogonalsystem gibt, für welches

$$(3) \quad \lim_0 \frac{\int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right]^4 dx}{\left(\sum_{k=1}^n H(k) c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}} < \infty,$$

$$(4) \quad \lim_0 \frac{\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^{4+\varepsilon} dx}{\left[\sum_{k=1}^n H(k) c_k^2 \right]^{2+\frac{\varepsilon}{2}}} = \infty \text{ für } \varepsilon > 0,$$

$$(5) \quad \lim_E \frac{\int \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx}{\left(\sum_{k=1}^n H(k) c_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}} < \infty, \text{ wenn } p > 2,$$

für gewisse E Mengen des Intervalls $0 < x < 2\pi$ vom Maße $2\pi - \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$, aber beliebig klein, gilt ⁷⁾.

Ich schicke folgende Hilfssätze voraus.

HILFSSATZ I: Für jedes Polynom $(n-1)$ -ter Ordnung $P(z)$ gilt, wenn l eine positive ganze Zahl bedeutet und $\alpha = \frac{2\pi}{n}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |P(e^{ik\alpha})|^{2l} < nC(l) \int_0^{2\pi} |P(e^{i\varphi})|^{2l} d\varphi,$$

wo $C(l)$ nur von l abhängt.

Beweis: Wird $[P(z)]^l = \sum_{j=0}^{l-1} z^{jn} P_j(z)$ gesetzt, wo die $P_j(z)$ Polynome höchstens $(n-1)$ -ter Ordnung sind, so gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |P(e^{ik\alpha})|^{2l} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sum_{j=0}^{l-1} P_j(e^{ik\alpha}) \cdot \sum_{j=0}^{l-1} \bar{P}_j(e^{ik\alpha}) \right|^2 \\ &< C(l) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{l-1} |P_j(e^{ik\alpha})|^2 < C(l) \cdot n \cdot \int_0^{2\pi} |P(e^{i\varphi})|^{2l} d\varphi. \end{aligned}$$

HILFSSATZ II: Für ein beliebiges Polynom $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ gilt, wenn $l > 0$ und ganz ist, die von J. E. Littlewood herrührende Ungleichung

$$\frac{1}{z^n} \sum_{l=0}^{2^n-1} \int_0^{2\pi} \left| \sum a_k \gamma_k^{(l)} e^{ik\varphi} \right|^{2l} d\varphi < C \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2 \right)^l,$$

wo die $\gamma_k^{(l)}$ voneinander unabhängig die Werte ± 1 annehmen und C eine absolute Konstante bedeutet. ⁸⁾

HILFSSATZ III: Zu einer beliebigen Folge von komplexen Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n$ mit $|\alpha_k| \leq 1$ und einem beliebigen $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ gibt es, wenn die positive ganze Zahl K hinreichend groß ist, ein die folgenden Bedingungen erfüllendes Polynom $2nK$ -ter Ordnung $P(z)$:

$$\begin{aligned} |P(z)| &< 1 + \varepsilon \text{ für } |z| \leq 1, \\ \left| \frac{P(z)}{z^{nK}} - \alpha_{k+1} \right| &< \varepsilon \text{ für } |z| = 1, \quad \frac{2k\pi}{n} + \delta < \arg z < \frac{2(k+1)\pi}{n} - \delta, \\ &k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

⁷⁾ Das System $\frac{\varphi_1(x)}{[H(1)]^{\frac{1}{2}}}, \dots, \frac{\varphi_n(x)}{[H(n)]^{\frac{1}{2}}}, \dots$ hat also den charakteristischen Exponenten 4.

⁸⁾ Mit \bar{X} bezeichnen wir hier, wie üblich, die Konjugierte der komplexen Zahl X .

⁹⁾ J. E. LITTLEWOOD: On the mean values of the power series [Journ. London M. S. 5 (1930), 179—182].

Beweis: Es bezeichne $F(x)$ die im Intervalle $0 < x < 2\pi$ auf die folgende Weise definierte Funktion:

$$F(x) = \alpha_{k+1} \text{ für } \frac{2k\pi}{n} + \delta < x < \frac{2(k+1)\pi}{n} - \delta,$$

$$F(x) = \alpha_k + \frac{\alpha_k + 1 - \alpha_k}{2\delta} \left(x + \delta - \frac{2k\pi}{n} \right) \text{ für } \frac{2k\pi}{n} - \delta < x < \frac{2k\pi}{n} + \delta.$$

Gilt für das trigonometrische Polynom Kn -ter Ordnung $T(x)$ $|F(x) - T(x)| < \varepsilon$ überall im Intervalle $0 < x < 2\pi$, so hat das durch $P(z) = z^{nk} T(\arg z)$ für $|z| = 1$ definierte Polynom $P(z)$ die gewünschte Eigenschaft.

Wir können nun ein (3), (4) und (5) erfüllendes, normiertes, gleichmäßig beschränktes Orthogonalsystem konstruieren.

Es sei für die Folge positiver ganzer Zahlen $M_1, M_2, \dots, M_k, \dots$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{H(M_k)} < \infty$. $P_{k1}(z), \dots, P_{km}(z), \dots, P_{kM_k}(z)$ sei eine Folge nach Hilfssatz III existierender Polynome von der $N = K \cdot 2^{M_k} \left(1 + \frac{1}{M_k}\right)$ -ten Ordnung, wo K eine hinreichend große positive gerade ganze Zahl bedeutet, für welche

$$|P_{km}(z)| < 1 + \frac{1}{M_k^2} \text{ für } |z| = 1$$

$$\left| \frac{P_{km}(z)}{z^{\frac{N}{2}}} - \gamma_{kml} e^{-\frac{2\pi i Kl(m-1)}{NM_k}} \right| < \frac{1}{M_k^2},$$

wenn

$$\frac{2\pi K \left(l + \frac{K^2}{N^2} \right)}{N} < \arg z < \frac{2\pi K \left(l + 1 - \frac{K^2}{N^2} \right)}{N},$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, 2^{M_k} - 1,$$

wo die γ_{kml} sämtliche in Betracht kommende Variationen von ± 1 durchlaufen,

$$\left| \frac{P_{km}(z)}{z^{\frac{N}{2}}} - e^{-\frac{2\pi i Kl(m-1)}{NM_k}} \right| < \frac{1}{M_k^2},$$

wenn

$$\frac{2\pi K \left(l + \frac{K^2}{N^2} \right)}{N} < \arg z < \frac{2\pi K \left(l + 1 - \frac{K^2}{N^2} \right)}{N},$$

$$l = 2^{M_k}, 2^{M_k} + 1, \dots, 2^{M_k} \left(1 + \frac{1}{M_k} \right).$$

Durch Anwendung der Hilfssätze I und II ergibt sich, wenn I eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet und $\frac{2\pi}{IM_k N} = \alpha$, $\frac{2\pi}{M_k} = \beta$ gesetzt wird

$$\begin{aligned} & \frac{2n}{IM_k^2 N} \sum_{r=0}^{IM_k N-1} \sum_{s=0}^{M_k-1} \left| \sum_{m=1}^{M_k} c_{km} e^{im(r\alpha+s\beta)} P_{km}(e^{iM_k r\alpha}) \right|^4 \\ &= \frac{2\pi}{IM_k N} \left(\sum_{t=0}^{KI-1} \sum_{q=0}^{2M_k-1} \sum_{s=0}^{M_k-1} \left| \sum_{m=1}^{M_k} G(m, q, s, t) \right|^4 \right. \\ & \left. + \sum_{t=0}^{KI-1} \sum_{q=2M_k}^{2M_k(1+\frac{1}{M_k})} \sum_{s=0}^{M_k-1} \left| \sum_{m=1}^{M_k} G(m, q, s, t) \right|^4 \right) < C \left(\sum_{m=1}^{M_k} c_{km}^2 \right)^2, \end{aligned}$$

wo

$$G(m, q, s, t) = c_{km} \cdot e^{im(IKq+t)\alpha+s\beta} \cdot P_{km} [e^{i(KIq+t)M_k\alpha}];$$

hingegen ist für $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim}_{k=\infty} \frac{2\pi}{INM_k^{3+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{r=0}^{T_k IN-1} \sum_{s=0}^{M_k-1} \left| \sum_{m=1}^{M_k} e^{im(r\alpha+s\beta)} P_{km}(e^{iM_k r\alpha}) \right|^{4+\varepsilon} = \infty.$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^{M_k} c_{km} e^{i(m-1)\varphi} P_{km}(e^{iM_k\varphi}) \right|^4 d\varphi < C \left(\sum_{m=1}^{M_k} c_{km}^2 \right)^2, \\ & \overline{\lim}_{k=\infty} \frac{1}{M_k^{2+\frac{\varepsilon}{2}}} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{m=1}^{M_k} e^{i(m-1)\varphi} P_{km}(e^{iM_k\varphi}) \right|^{4+\varepsilon} d\varphi = \infty. \end{aligned}$$

Leicht ergibt sich auch

$$\overline{\lim}_E \frac{\int \left| \sum_{m=1}^{M_k} c_{km} P_{km}(e^{i\varphi}) \right|^p d\varphi}{\left(\sum_{m=1}^{M_k} c_{km}^2 \right)^{\frac{p}{2}}} < \infty$$

für jedes $p > 2$,

wo E eine Menge des Intervalls $0 < x < 2\pi$ vom Maße $2\pi - \varepsilon$ (mit $\varepsilon > 0$, beliebig klein) bedeutet.

Das aus der Doppelfolge der trigonometrischen Polynome

$$T_{11}(x), \dots, T_{k1}(x), \dots, T_{kM_k}(x), \quad T_{k+1,1}(x), \dots, T_{k+1,m}(x) \dots,$$

wo

$$T_{km}(x) = \Re[e^{i(n_k+m)x} P_{km}(e^{iM_k x})]$$

und n_k die Ordnung von $T_{k-1M_{k-1}}$ bedeutet, durch Normierung entstehende Orthogonalsystem ist bezüglich des Intervalls $0 < x < 2\pi$ von der gewünschten Beschaffenheit. ¹⁰⁾

(Eingegangen den 15. Juni 1936.)

¹⁰⁾ Der Übergang zu einem beliebigen Intervall ist trivial. An Stelle von 4 kann ein beliebiger Exponent > 2 treten. Erwünscht ist natürlich die Reduktion des Faktors $H(k)$ auf 1.
