

COMPOSITIO MATHEMATICA

ANTON E. MAYER

Über Entfernungen zwischen Umgebungen sowie konvexen Hüllen

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 469-476

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__469_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Über Entfernungen zwischen Umgebungen sowie konvexen Hüllen

von

Anton E. Mayer

Wien

Die Entfernungen zwischen Punktmenge n werden durch Verwandlung in ihre abgeschlossenen Hüllen nicht geändert. Von diesem bereits bekannten Satz und von den übrigen Voraussetzungen (§ 1) ausgehend, wenden wir uns anderen einfachen Operationen zu (Bildung von Umgebungen und konvexen Hüllen, Tilgung innerer Punkte) und ermitteln deren Wirkung auf die Entfernungen zwischen Mengen (§§ 2, 3, 5). Ergebnisse dieser Untersuchungen werden auf ein Konkavitätsmaß (§ 4) und auf Kugeln (§ 6) angewendet, schließlich auf einen Minkowskischen Raum, dessen Elemente Kugeln sind.

§ 1. Entfernungen zwischen Mengen. Abgeschlossene Hüllen.

In einem Raum E seien Entfernungen erklärt, derart, daß zu jedem geordneten Punktepaar (a, b) aus E eine reelle Zahl $\varrho(a, b) \geq 0$ gehört, die folgenden Axiomen gehorcht:

$$(1) \quad \varrho(a, a) = 0,$$

$$(2) \quad \varrho(a, b) + \varrho(b, c) \geq \varrho(a, c).$$

Hingegen wird nicht verlangt, daß $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$ sei.

Wir betrachten nichtleere, beschränkte Teilmengen von E . Für jedes geordnete Paar (A, B) von Teilmengen werde eine Entfernung

$$(3) \quad \varrho(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \varrho(a, b)$$

festgesetzt ¹⁾.

¹⁾ D. ПОМПÉЖУ, Sur la continuité des fonctions de variables complexes [Annales Toulouse (2) 7 (1905), 265—315 (281) (betrifft abgeschlossene Mengen in der Euklidischen Ebene)].

Die drei ähnlich konstruierten Funktionen

$$\varrho(B, A) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \varrho(b, a),$$

$$\check{\varrho}(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \varrho(b, a),$$

$$\dot{\varrho}(B, A) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \varrho(a, b)$$

zu untersuchen, wäre überflüssig. Denn diese Funktionen stimmen formal mit $\varrho(A, B)$ überein, sobald die Bezeichnungen A und B vertauscht werden, oder wenn $\check{\varrho}(b, a)$ statt $\varrho(a, b)$ geschrieben wird, wobei die Axiome (1) und (2) weiterbestehen, oder falls beide Änderungen zugleich erfolgen.

Die Entfernung $\varrho(A, B) \geq 0$ ist eine Fortsetzung der Entfernung $\varrho(a, b)$ von einpunktigen auf ein- oder mehrpunktige Mengen. Es gilt auch

$$(1^*) \quad \varrho(A, A) = 0,$$

$$(2^*) \quad \varrho(A, B) + \varrho(B, C) \geq \varrho(A, C),$$

welche Regeln als Sonderfälle (1) und (2) enthalten. Um (2*) zu beweisen, beachte man, daß aus der Definition (3) hervorgeht: Für jedes $\delta > 0$ und zu jedem Punkt $a \in A$ gibt es einen Punkt $b \in B$ und einen Punkt $c \in C$, so daß $\varrho(a, b) < \varrho(A, B) + \delta$ und $\varrho(b, c) < \varrho(B, C) + \delta$ ist, also $\varrho(A, B) + \varrho(B, C) + 2\delta > \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$. Mittels (2) folgt nun (2*) ohne weiteres.

Der Dreiecksrelation (2*) erteilen wir noch die Gestalten $\varrho(A, C) - \varrho(B, C) \leq \varrho(A, B)$ und $\varrho(B, C) - \varrho(A, C) \leq \varrho(B, A)$. Hiernach ist

$$(4) \quad | \varrho(A, C) - \varrho(B, C) | \leq \max(\varrho(A, B), \varrho(B, A)).$$

Sind A und B zueinander dicht ²⁾, so verschwindet die rechte Seite. Dies und eine zu (4) analoge Beziehung ergibt: *Die Entfernung $\varrho(A, B)$ bleibt ungeändert, wenn A und B durch beliebige Mengen der Dichtigkeitsklasse A bzw. B ersetzt werden, insbesondere durch die abgeschlossenen Hüllen ³⁾. Deshalb bedeutet es keinen wesentlichen Verzicht auf Allgemeinheit, wenn künftig stets angenommen wird, die gegebenen (nichtleeren, beschränkten) Mengen seien abgeschlossen.*

Für das Folgende genügen die Axiome (1) und (2) nicht mehr.

²⁾ In den Bennungen folge ich F. HAUSDORFF, Mengenlehre [Berlin u. Leipzig 1927].

³⁾ HAUSDORFF ²⁾, 146 (bezieht sich auf metrische Räume). Weitere Sätze über Mengenräume: HAUSDORFF ²⁾, 150; H. HAHN, Reelle Funktionen 1 [Leipzig 1932], 124.

Daher werde fortan E als *Minkowskischer Raum* vorausgesetzt (obzwar einige Überlegungen auch in allgemeineren Räumen zu Recht bestünden). Das bedeutet: Im n -dimensionalen affinen Raum sei die Abstandsfunktion $\varrho(a, b)$ definiert, für die nebst (1) und (2) noch $\varrho(a, b) > 0$ für $a \neq b$ gelte und schließlich $\varrho(a, b) = \varrho(a', b')$, falls es eine Schiebung $a \rightarrow a', b \rightarrow b'$ gibt.

§ 2. Umgebungen.

Die Menge aller Punkte x , für die $\varrho(a, x) < r$ ist ($r > 0$), heiße eine *Kugel* (oder *Umgebung*) mit dem Radius r . Wir bezeichnen sie kurz mit a_r . Dementsprechend nennen wir die Summe der Kugeln, für die $a \in A$ und r konstant ist, die *Umgebung* A_r der *Menge* A mit dem Radius r .

Würde $x \in a_r$ durch $\varrho(x, a) < r$ definiert, so ergäbe im nachstehenden diese Änderung nichts wesentlich Neues, da sie durch Vertauschen von A und B und von $\varrho(a, b)$ und $\varrho(b, a)$ rückgängig gemacht werden könnte.

Zu zwei vorgegebenen Mengen A, B seien die Umgebungen A_r, B_r erzeugt. Gemäß der Umgebungsdefinition existiert zu jedem Punkt $a' \in A_r$ ein Punkt $a \in A$, derart, daß $\varrho(a, a') < r$ ist. Wenn nun b einen beliebigen Punkt von B und b' den vierten Eckpunkt des Parallelogramms mit den Seiten aa' und ab bezeichnet, so ist $\varrho(b, b') = \varrho(a, a') < r$ also $b' \in B_r$; ferner ist $\varrho(a', b') = \varrho(a, b)$, mithin

$$\inf_{b \in B} \varrho(a, b) \geq \inf_{b' \in B_r} \varrho(a', b').$$

Dies besagt: *Die Entfernung $\varrho(A, B)$ zweier Mengen A, B ist nicht kleiner als die Entfernung $\varrho(A_r, B_r)$ ihrer mit gleichen Radien konstruierten Umgebungen A_r und B_r .*

Dabei kann einerseits $\varrho(A, B) > \varrho(A_r, B_r)$ sein, z.B. (in der Euklidischen Ebene) wenn A eine Kreisfläche und B die Begrenzung von A ist.

Andererseits ergänzen wir den obigen Satz durch folgende Bemerkung: *Falls B konvex ist, wird $\varrho(A_r, B_r) = \varrho(A, B)$.*

Für den Beweis verwerten wir zunächst, daß $\varrho(a, B) = \inf_{b \in B} \varrho(a, b)$ eine *stetige* Funktion von a ist³⁾, was leicht aus (4) gefolgert werden kann (indem man dort für A und B einpunktige Mengen setzt). Daher gibt es mindestens einen Punkt $a^* \in A$, in welchem die Funktion $\varrho(a, B)$ ihr Maximum $m = \varrho(A, B)$ auf A erreicht. Die Kugel a_m^* ist zu B fremd, hat aber offensichtlich mit B einen oder mehrere Begrenzungspunkte gemein. Durch diese Begren-

zungspunkte kann, da sowohl B wie die Kugel konvex ist⁴⁾, eine Hyperebene H gelegt werden, die beide Mengen stützt, jedoch die inneren Punkte beider Mengen voneinander trennt⁵⁾. Mit G werde der von H begrenzte, zur Kugel a_m^* fremde Halbraum bezeichnet, mit s ein Stützpunkt der zu H gegensinnig parallelen stützenden Hyperebene an die Kugel.

Wir betrachten nun die Umgebungen A_r , B_r und G_r . Letztere ist wieder ein Halbraum. Er läßt sich aus G durch Parallelverschiebung in der Richtung $a^* \rightarrow s$ herstellen, wobei die Schiebungsstrecke die (in der Schiebungsrichtung mittels der Entfernungsfunktion ϱ gemessene) Länge r hat. Dieselbe Schiebung erzeugt aus der zu G fremden Kugel a_m^* eine Kugel a_m^{**} , die folglich zu G_r fremd ist. Weil die inneren Punkte von B in G enthalten sind, ist $B_r \subset G_r$. Daher ist die Kugel a_m^{**} auch zu B_r fremd, also $\inf_{b' \in B_r} \varrho(a^{**}, b') \geq m$. Hieraus ergibt sich, wenn man die Zugehörigkeit des Punktes a^{**} zur abgeschlossenen Hülle von A_r berücksichtigt, daß $\varrho(A_r, B_r) \geq m$ ist, w. z. b. w.

§ 3. Konvexe Hüllen.

Für die konvexe Hülle einer Menge A schreiben wir A_k . Mit $A \subseteq A_k$ und $B \subseteq B_k$ liefert die Definition (3) unmittelbar

$$(5) \quad \varrho(A, B_k) \leq \varrho(A, B) \leq \varrho(A_k, B).$$

Wo ist der Platz von $\varrho(A_k, B_k)$ in dieser Folge?

Wir schalten einen Hilfsatz ein: Liegt der Punkt a auf der Verbindungsstrecke der Punkte a' und a'' , ferner der Punkt b auf der Strecke $b'b''$, wobei $\varrho(a', a) : \varrho(a, a'') = \varrho(b', b) : \varrho(b, b'')$ sein soll, so ist

$$(6) \quad \varrho(a, b) \leq \max(\varrho(a', b'), \varrho(a'', b'')).$$

Zum Beweise bringe man den Punkt a einmal mittels der Schiebung $a' \rightarrow b'$ nach b^* , ein zweites Mal mittels der Schiebung $a'' \rightarrow b''$ nach b^{**} . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $bb'b^*$ und $bb''b^{**}$ schließen wir, daß b sich auf der Strecke b^*b^{**} befindet. Deshalb und weil alle Kugeln konvex sind, wird $\varrho(a, b) \leq \leq \max(\varrho(a, b^*), \varrho(a, b^{**}))$. Dies bedeutet dasselbe wie (6), da

⁴⁾ Vgl. St. GOŁAB u. H. HÄRLEN, Minkowskische Geometrie [Monatshefte Math. u. Phys. 38 (1931), 387—398]. Wir gebrauchen „konvex“ im weiteren Sinne, unterscheiden hier also nicht zwischen „konvex“ und „nirgends konkav“.

⁵⁾ T. BONNESEN u. W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper [Ergebn. Math. u. Grenzgebiete 3, 1 (1934)], 5.

infolge der Schiebungen $\varrho(a, b^*) = \varrho(a', b')$ und $\varrho(a, b^{**}) = \varrho(a'', b'')$ ist.

Nun fassen wir A und B_k ins Auge, außerdem die Menge A_\times , deren Elemente die Punkte auf den Verbindungsstrecken der Punktepaare von A sind. Zu jedem Punkt $a \in A_\times$ existieren also Punkte $a' \in A$ und $a'' \in A$, deren Verbindungsstrecke a enthält (gegebenenfalls wird $a' = a = a''$). Ist dann $b' \in B_k$ und $b'' \in B_k$, so gibt es dem Hilfsatz zufolge einen Punkt $b \in B_k$, für den die Ungleichung (6) besteht. Demgemäß gilt:

$$\inf_{b \in B_k} \varrho(a, b) \leq \max \left(\inf_{b' \in B_k} \varrho(a', b'), \inf_{b'' \in B_k} \varrho(a'', b'') \right);$$

folglich ist $\varrho(A_\times, B_k) \leq \varrho(A, B_k)$. Wegen $A_\times \supseteq A$ ist andererseits $\varrho(A_\times, B_k) \geq \varrho(A, B_k)$, mithin $\varrho(A_\times, B_k) = \varrho(A, B_k)$. Verbindet man alle Punktepaare von A_\times durch Strecken, verfährt mit der solcherart entstandenen Menge in gleicher Weise und so fort, so gelangt man nach endlich-vielen Schritten⁶⁾ zur konvexen Hülle A_k der Menge A . Infolgedessen ist auch $\varrho(A_k, B_k) = \varrho(A, B_k)$. Im Hinblick auf (5) können wir zusammenfassend sagen:

Die Entfernung $\varrho(A, B)$ zweier Mengen A, B ist nicht kleiner als die Entfernung $\varrho(A_k, B_k)$ ihrer konvexen Hüllen. Für konvexes B ist $\varrho(A_k, B_k) = \varrho(A, B)$.

Bei der Konstruktion konvexer Hüllen ergab sich also ein ähnlicher Sachverhalt wie bei der Bildung von Umgebungen.

Daß $\varrho(A_k, B_k) < \varrho(A, B)$ sein kann, lehrt das bereits in § 2 verwendete Beispiel.

§ 4. Ein Maß des Nicht-konvex-Seins.

Die Entfernung $\varrho(A_k, A)$ verschwindet, wenn A konvex ist, aber auch nur dann. Aus $\varrho(A_k, A) = 0$ folgt nämlich $A_k \subseteq A$, was zusammen mit der stets gültigen entgegengesetzten Ungleichung $A_k = A$ nach sich zieht. Dementsprechend ist $\varrho(A_k, A)$ als Maß der Konkavität von A geeignet.

Vertauscht man die Menge A mit ihrer Umgebung A_r , so nimmt die Konkavität ab oder wenigstens nicht zu: $\varrho(A_k, A) \geq \varrho(A_{rk}, A_r)$.

Dies kann aus § 2 geschlossen werden, sobald man weiß, daß bei jeder Menge A der Übergang zu einer Umgebung und die Herstellung der konvexen Hülle vertauschbare Operationen sind, daß also $A_{rk} = A_{kr}$ ist.

⁶⁾ Vgl. BONNESEN u. FENCHEL⁶⁾, 10.

Um das einzusehen, bezeichnen wir wieder mit A_{\times} die Menge der Punkte auf den Sehnen von A . Mittels einer leicht angebbaren Parallelverschiebung erkennt man, daß $A_{\times r} \subseteq A_{r \times}$ ist, während $A_{r \times} \subseteq A_{\times r}$ unschwer mit Hilfe von (6) festgestellt werden kann. Somit haben wir $A_{r \times} = A_{\times r}$ und hieraus ergibt sich $A_{rk} = A_{kr}$ durch wiederholtes Sehnenziehen (vgl. § 3).

Ein Beispiel (in der Euklidischen Ebene) für die Verringerung der Konkavität beim Anschwellen zu Umgebungen bietet jede Kreislinie. Ein Beispiel für die Konstanz der Konkavität, hinreichend kleinen Umgebungsradius vorausgesetzt, liefert die Summe einer langen und der beiden kurzen Seiten eines genügend schlanken Rechtecks.

§ 5. Tilgung innerer Punkte. Symmetrische Maßbestimmungen.

Wir haben früher einen Punkt $a^* \in A$ mit der Eigenschaft nachgewiesen, daß die Kugel a_m^* um diesen Punkt, deren Radius $m = \varrho(A, B)$ ist, und die Menge B keinen Punkt, jedoch einen Begrenzungspunkt b^* gemein haben. Ferner gibt es, falls B konvex ist, einen Halbraum $G \supset B$, der b^* als Begrenzungspunkt besitzt und der gleichfalls zur Kugel a_m^* fremd ist (vgl. § 2). In diesem Falle muß a^* ein Begrenzungspunkt von A sein. Eine zentrisch ähnliche Vergrößerung mit dem Zentrum b^* führt nämlich G in sich selbst über und daher die Kugel a_m^* in eine zu G fremde Kugel a_n^{**} mit dem Radius $n > m$, so daß also $\inf_{b \in B} \varrho(a^{**}, b) > \varrho(A, B)$ ist. Wenn nun a^* ein innerer Punkt von A wäre, so ergäbe ein genügend kleiner Vergrößerungsmaßstab: $a^{**} \in A$, im Widerspruch zur letzten Ungleichung.

Folglich dürfen bei der Ermittlung von $\varrho(A, B)$ die inneren Punkte der Menge A getilgt werden, wenn B konvex ist.

Die inneren Punkte von B zu unterdrücken, ist im allgemeinen nicht möglich, z.B. wenn (in der Euklidischen Ebene) A ein Radius der Kreisfläche B ist.

Um einen diesbezüglichen Satz zu gewinnen, muß die Klasse der untersuchten Räume abermals eingeschränkt werden, und zwar setzen wir von jetzt ab voraus, in dem zugrundegelegten Minkowskischen Raum E seien die Entfernungen symmetrisch:

$$\varrho(a, b) = \varrho(b, a) = \overline{ab}.$$

Dann wird man zweckmäßigerweise es nicht bei der unsymmetrischen Mengentfernung $\varrho(A, B)$ bewenden lassen, sondern eine symmetrische Funktion von A und B konstruieren, die den Relationen (1*) und (2*) genügt, etwa

$$\varrho(A, B) + \varrho(B, A) \quad (\text{D. Pompéju } ^1))$$

oder

$$\sqrt{\varrho^2(A, B) + \varrho^2(B, A)}$$

oder

$$(7) \quad \overline{AB} = \max(\varrho(A, B), \varrho(B, A)) \quad (\text{F. Hausdorff } ^3))$$

Wir wählen die letzte und nennen, um zu unterscheiden, \overline{AB} die *Abweichung* ²⁾ der Mengen A, B .

Wie die Sätze in den vorangegangenen Paragraphen zu formulieren sind, wenn an Stelle der Entfernungen die Abweichungen treten, bedarf kaum der Erläuterung. Hervorgehoben sei bloß, daß die erwähnte Abänderung für unser Konkavitätsmaß (§ 4) belanglos ist.

Wir behaupten: *Die Abweichung zweier konvexer Mengen A, B ist der Abweichung ihrer Begrenzungen A_g, B_g gleich.*

Jede konvexe Menge ist die konvexe Hülle ihrer Begrenzung. Somit ist $\overline{A_g B_g} \geq \overline{AB}$ (vgl. § 3). Daher wird der Beweis der eben ausgesprochenen Behauptung erbracht sein, wenn $\overline{A_g B_g} \leq \overline{AB}$ festgestellt ist. Zu diesem Zweck genügt es, für den beliebigen Punkt $a \in A_g$ und mit $r > \overline{AB}$ in der Kugel a_r einen Punkt $b \in B_g$ aufzufinden.

In der Kugel a_r kommt gemäß (7) jedenfalls ein Punkt $b^* \in B$ vor. Ist nicht schon b^* selbst Begrenzungspunkt von B und sind auch alle Punkte der Strecke ab^* , der Punkt a inbegriffen, innere Punkte der Menge B , so befindet sich auf jeder in a beginnenden Halbgeraden ein (und nur ein) Begrenzungspunkt von B . Zu einer durch den Punkt a gehenden Stützhyperebene an A legen wir nun eine parallele Hyperebene, die die Kugel a_r im Punkte s stützen möge. Auf dem zu A fremden Teil der Geraden as liege der Punkt $b \in B_g$. Dann ist $\overline{ab} < r$; sonst wäre nämlich $\inf_{a^* \in A} a^*b > \overline{AB}$, entgegen der Definition (7).

§ 6. Abweichung zweier Kugeln. Kugeln als Raumelemente.

Bei der Bestimmung der Abweichung zweier Kugeln a_r und a'_r , ist es der Konvexität halber gestattet, bloß die Begrenzungen in Betracht zu ziehen (siehe § 5). Es ist auch erlaubt, die Radien beider Kugeln um die gleiche Strecke zu verkürzen. Denn die ursprünglichen Kugeln lassen sich als Umgebungen der ver-

²⁾ Übereinstimmend mit HARN ³⁾. Hingegen spricht W. BLASCHKE, Kreis und Kugel [Leipzig 1916], 60, vom Nachbarschaftsmaß zweier Mengen.

kleinerten Kugeln auffassen (somit wird § 2 anwendbar). Insbesondere darf eine der gegebenen Kugeln, nämlich jene mit dem kleineren Radius, auf einen Punkt zusammenschrumpfen, wenn dementsprechend der Radius der anderen Kugel um die Länge des kleineren Radius verringert wird. So erkennt man augenblicklich, daß

$$(8) \quad \overline{a'_r, a''_r} = \overline{a'a''} + |r' - r''|$$

ist.

Schließlich deuten wir noch die *Kugeln als Elemente eines metrischen Raumes* M und die Abweichungen (8) als Abstände in diesem metrischen Raum. Man kann unschwer einsehen, daß M zu einem *Minkowskischen Halbraum isometrisch* (kongruent) ist.

Um das zu zeigen, ordnen wir jeder Kugel a_r einen Punkt a in einem $(n + 1)$ -dimensionalen affinen Halbraum \mathfrak{M} zu, derart, daß die ersten n Koordinaten von a mit den Koordinaten des Kugelmittelpunktes a (im bisher zugrundegelegten Minkowskischen Raum E) übereinstimmen, während als $(n + 1)$ te Koordinate des Punktes a der Kugelradius r aufgefaßt wird⁸⁾. Erklärt man als Abstand zweier Punkte a', a'' aus \mathfrak{M} die Abweichung $\overline{a'_r, a''_r}$, der entsprechenden Kugeln, so ist die Maßbestimmung in \mathfrak{M} eine Minkowskische. Denn sie hängt offensichtlich nur von den Koordinatendifferenzen der Punkte a', a'' ab und ist in den Koordinatendifferenzen positiv homogen vom ersten Grad. Somit ist eine eindeutige abstandstreue Abbildung zwischen M und einem Minkowskischen Halbraum, nämlich \mathfrak{M} , nachgewiesen.

(Eingegangen den 11. Januar 1935.)

⁸⁾ Die Zuordnung ist eine mehrdimensionale, Minkowskische Verallgemeinerung der Zyklographie. [Lehrbuch der Zyklographie: E. MÜLLER, Vorlesungen über darstellende Geometrie 2 (herausgeg. von J. L. KRAMES), Leipzig u. Wien 1929.]