COMPOSITIO MATHEMATICA

STEFAN COHN-VOSSEN

Existenz kürzester Wege

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 441-452
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__441_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Existenz kürzester Wege

von

Stefan Cohn-Vossen †

H. Hopf und W. Rinow haben für 2-dimensionale Riemannsche Räume folgenden Satz bewiesen [1]): Ein beliebiges Punktepaar p, q des Raumes R bezitzt stets entweder eine kürzeste, notwendig geodätische, Verbindung, oder man kann von p aus eine geodätische Linie L folgender Art finden: 1) L ist dem einseitig offenen Intervall $0 \leqq t < 1$ homöomorph. 2) Wenn eine Punktfolge auf L keinen Häufungspunkt auf L hat, so auch keinen in R, d.h. L ist in R abgeschlossen. 3) L enthält die kürzeste Verbindung jedes Punktepaars von L. 4) Für jeden Punkt x von L gilt $(px) + (xq) = (pq)$; dabei bedeutet (ab) die Abstandsfunktion in R, d.h. die untere Grenze der Längen aller a mit b verbindenden rektifizierbaren Bögen von R. Aus 4 folgt noch, daß 5) die Länge von L endlich, nämlich nicht größer als (pq) ist.

Nennen wir eine Kurve, die die Eigenschaften 1 bis 3 hat, einen Strahl, so können wir die „Hopf-Rinowsche Alternative" so aussprechen: Ein beliebiges Punktepaar hat entweder eine kürzeste Verbindung, oder jeder Punkt des Paars ist Ausgangspunkt eines auf den anderen Punkt gerichteten beschränkten Strahls. [2])

Stefan Cohn-Vossen ist am 25. Juni 1936 im Alter von 34 Jahren gestorben.

Insbesondere durch die außerordentlichen Fortschritte, welche die von ihm entdeckten Sätze über den Verlauf der geodätischen Linien und die Totalkrümmung offener Flächen (Comp. Math. 2 (1935); Recueil Math. Moscou (n. s.) 1 (1936)) für die Differentialgeometrie im Großen bedeuten, wird der Name dieses Mitarbeiters unserer Zeitschrift weiter leben.

Die Redaktion der Compositio Mathematica.

[1]) Comm. Math. Helv. 3 (1931); vgl. auch die Arbeit des Verf. „Kürzeste Wege und Totalkrümmung" [Compositio Math. 2 (1935)], sowie S. B. Myers, Riemannian Manifolds in the Large [Duke Math. Journ. 1 (1935)].

[2]) Die beiden Möglichkeiten schließen sich nicht gegenseitig aus. (Korr.)

Dabei haben wir die Eigenschaft 4 so formuliert, daß wir sagen, L gehe von p aus und sei auf q gerichtet.

In der vorliegenden Arbeit wird die Hopf-Rinowsche Alternative auf gewisse wesentlich allgemeinere Metriken übertragen. Die Abstandsfunktion braucht nicht symmetrisch zu sein, und im Kleinen wird zwar gefordert, daß jeder Punkt p eine kürzeste Verbindung mit jedem Punkt einer gewissen Umgebung $U(p)$ besitzt, aber diese kürzesten Verbindungen brauchen nicht eindeutig bestimmt zu sein.

Nimmt man noch an, daß der betrachtete Raum R im Kleinen kompakt ist, so läßt sich auch die Konsequenz ziehen, um derentwillen Hopf und Rinow ihre Alternative formuliert haben: Gibt es in R keinen beschränkten Strahl, so ist in R jede beschränkte unendliche Menge kompakt.

Die hier angewandten Beweismethoden sind verschieden von dem bekannten Hilbert-Carathéodoryschen Verfahren, das unter anderm Hopf und Rinow zum Beweis ihrer Alternative benutzt haben. Meine Methode dürfte auch im einfachsten Fall, d.h. unter schärferen Voraussetzungen, sich nicht komplizierter darstellen als die Hilbert-Carathéodorysche Konstruktion.

§ 1 enthält vorbereitende elementare Betrachtungen, wie sie im Fall symmetrischer Abstandsfunktion von Menger[2a]) angestellt worden sind. In § 2 wird die verallgemeinerte Hopf-Rinowsche Alternative bewiesen. In § 3 wird unter der Annahme, daß R im Kleinen kompakt ist, gezeigt: Wenn R keinen beschränkten Strahl besitzt, so ist jede beschränkte Menge in R kompakt. In § 4 wird u. a. gezeigt, daß man auch die Existenz kürzester Verbindungen im Kleinen nicht vorauszusetzen braucht, sondern sie aus einer scheinbar schwächeren Annahme folgern kann, wenn R im Kleinen kompakt ist. Auch dies ist im Fall symmetrischer Abstandsfunktion in den erwähnten Mengerschen Arbeiten enthalten.

§ **1.** Die Punktmenge R sei ein Konvergenzraum. Darunter versteht man bekanntlich folgendes: gewissen unendlichen Punktfolgen p_n $(n = 1, \ldots, \infty)$ wird die Eigenschaft zugeschrieben, gegen einen Punkt p zu konvergieren, in Zeichen $p_n \to p$. Die Punkte p_n brauchen nicht durchweg voneinander verschieden zu sein. Von der Zuordnung $p_n \to p$ wird nur gefordert: 1) aus

---

[2a]) Untersuchungen über allgemeine Metrik [Math. Ann. **100** (1925) und **103** (1930)].

$p_n \to p$, $p_n \to q$ folgt $p = q$. 2) Sind alle p_n einer Folge mit einem und demselben Punkt p identisch, so ist $p_n \to p$. 3) Ist $p_n \to p$, so konvergiert auch jede unendliche Teilfolge der p_n gegen p.

Bekanntlich heißt ein Punkt q Häufungspunkt einer Menge $M \subset R$, wenn eine unendliche Folge aus M gegen q konvergiert. Eine Menge heißt kompakt, wenn jede unendliche Teilfolge einen Häufungspunkt hat; divergent heißt eine Folge ohne Häufungspunkt, abgeschlossen eine Menge, die alle ihre Häufungspunkte enthält.

Eine Menge B aus R heißt ein Bogen, wenn ein abgeschlossenes Intervall J so auf B abgebildet ist, daß konvergente Folgen aus J stets in konvergente Folgen von B übergehen. Wir nehmen für J stets das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$, wodurch eine Parameterdarstellung $x(t)$ für alle Punkte $x \subset B$ gegeben ist. Ganz entsprechend nennen wir eine Menge W einen Weg, wenn in der vorigen Definition J durch das einseitig offene Intervall $0 \leqq t < 1$ ersetzt wird; wieder ergibt sich eine Parameterdarstellung $x(t)$ für alle $x \subset W$.

Nunmehr sei für alle Punktepaare a, b von R eine Abstandsfunktion (ab) erklärt, die folgenden Axiomen[3]) genügt:

I. $(ab) > 0$ für $a \neq b$.[4])

II. Die Relationen $p_n \to p$, $(pp_n) \to 0$, $(p_n p) \to 0$ sind gleichbedeutend.

III. $(ab) + (bc) \geqq (ac)$, für alle Punkttripel a, b, c.

Aus II und III folgt bekanntlich die Stetigkeit der Abstandsfunktion, d.h. aus $p_n \to p$, $q_n \to q$ folgt: $(p_n q_n) \to (pq)$.

Wir sagen, x liegt zwischen a und b, geschrieben axb, wenn $(ax) + (xb) = (ab)$.

Einen Bogen $x(t)$ mit $x(0) = a$ und $x(1) = b$ nennen wir eine Strecke von a nach b, geschrieben ab, wenn für $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq t_3 \leqq 1$ stets $x(t_1)\, x(t_2)\, x(t_3)$ gilt. Hiernach ist jede zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge einer Strecke selbst eine Strecke.

Einen Weg $x(t)$ mit $x(0) = a$ nennen wir einen von a ausgehenden Strahl, wenn jeder Teilbogen des Weges eine Strecke ist und der Weg als Punktmenge in R abgeschlossen ist. Wenn die Abstände $(ax(t))$ eine endliche obere Grenze haben, heißt diese die Länge des Strahls, und der Strahl heißt beschränkt.

---

[3]) Vgl. auch Verf.s Axiomatik aus seiner Note: C. R. Acad. Sc. U. S. S. R. (n.s.) 3 (1935), 339—342. (Korr.)

[4]) Verlangt man von einer Abstandsfunktion von vornherein Realität und Nichtnegativität, so folgt übrigens I aus II und den Axiomen 1 und 2 der Konvergenzräume. (Korr.)

Wir brauchen im Folgenden einige Hilfssätze.

LEMMA 1. Gegeben $n \geqq 3$ Punkte a_1 bis a_n. Die Relationen

(1) $$a_i a_k a_m \text{ für alle } 1 \leqq i \leqq k \leqq m \leqq n$$

und

(2) $$(a_1 a_2) + (a_2 a_3) + \ldots + (a_{n-1} a_n) = (a_1 a_n)$$

sind gleichbedeutend.

Beweis: Aus (2) und III folgt für jedes zulässige Tripel i, k, m

(3) $$(a_1 a_i) + (a_i a_k) + (a_k a_m) + (a_m a_n) \leqq (a_1 a_n).$$

Wäre (1) für dieses Tripel falsch, so wäre

$$(a_i a_k) + (a_k a_m) > (a_i a_m),$$

also nach (3)

$$(a_1 a_i) + (a_i a_m) + (a_m a_n) < (a_1 a_n),$$

also nach III erst recht

$$(a_1 a_m) + (a_m a_n) < (a_1 a_n)$$

entgegen III; also folgt (1) aus (2).

Daß (2) aus (1) folgt, ist für $n = 3$ in der Definition von abc enthalten. Sei (1) $\rightarrow$ (2) schon für $n - 1$ wahr, dann folgt die Behauptung für n aus der Induktionsvoraussetzung und der in (1) enthaltenen Gleichung

$$(a_1 a_{n-1}) + (a_{n-1} a_n) = (a_1 a_n).$$

LEMMA 2. Aus (2) folgt $(a_{r_1} a_{r_2}) + (a_{r_2} a_{r_3}) + \ldots + (a_{r_{s-1}} a_{r_s}) = (a_{r_1} a_{r_s})$ für alle $1 \leqq r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_s \leqq n$.

Beweis: Aus (2) folgt (1), aus (1) die Behauptung.

LEMMA 3. ab und bc seien Strecken, und es sei abc. Dann ist $ab + bc$ eine Strecke ac.

Beweis: $ab + bc$ ist offenbar ein Bogen B. Er sei auf einen von a nach c anwachsenden Parameter bezogen, und x, y, z seien Punkte von B, die nach wachsenden Parameterwerten geordnet sind. Dann haben wir xyz zu zeigen. Das folgt aus der Voraussetzung direkt, wenn alle drei Punkte in ab oder alle in bc enthalten sind. Liegen x, y auf ab und z auf bc, so gilt $(bz) + (zc) = (bc)$, ferner nach Voraussetzung $(ab) + (bc) = (ac)$ und nach Lemma 1: $(ax) + (xy) + (yb) = (ab)$, also $(ax) + (xy) + (yb) + (bz) + (zc) = (ac)$, woraus nach Lemma 1 die Behauptung folgt. Im Fall $x \subset ab$, $y \subset bc$, $z \subset bc$ verläuft der Beweis entsprechend.

LEMMA 4. Es gelte (2) und $a_k a_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ seien Strecken. Dann ist $B = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{k+1}$ eine Strecke $a_1 a_n$.

Beweis: Für $n = 3$ nach Lemma 3. Ist die Behauptung für $n - 1$ wahr, so ist $B' = \sum_{k=1}^{n-2} a_k a_{k+1}$ nach (2) und Lemma 2 (für $r_i = i$ und $s = n - 1$) eine Strecke $a_1 a_{n-1}$, und nach (2) und Lemma 1 ist $a_1 a_{n-1} a_n$. Also ist nach dem vorigen Lemma $B' + a_{n-1} a_n$ eine Strecke $a_1 a_n$.

Lemma 5. $x(t)$, $0 \leqq t < 1$, sei ein Weg W. Sei t_n eine Folge mit $t_1 = 0$, $0 \leqq t_n < 1$, $t_n \to 1$, und sei $x(t_n) = a_n$ gesetzt. Sei ferner für jedes n der Teilbogen $0 \leqq t \leqq t_n$ von W eine Strecke $a_1 a_n$. Behauptung: Wenn die Folge a_n einen Häufungspunkt p hat, ist $W + p$ eine Strecke $a_1 p$. Wenn die Folge a_n divergiert, ist W ein Strahl.

Beweis: Nehmen wir zunächst die Existenz eines Häufungspunktes p an. Dann zeigen wir, daß $B = W + p$ ein Bogen ist. Das bedeutet: Für jede Folge t'_n, $0 \leqq t'_n < 1$, $t'_n \to 1$, ist $x(t'_n) \to p$.

Um dies zu beweisen, ordnen wir jedem hinreichend großen n zwei Zahlen n_1 und n_2, $n_1 < n_2$, zu, so daß erstens $t_{n_1} < t'_n < t_{n_2}$ ist und zweitens für $n \to \infty$ die Folgen der a_{n_1} und der a_{n_2} gegen p konvergieren. Da $a_1 a_{n_2}$ und mithin auch $a_{n_1} a_{n_2}$ eine Strecke ist, gilt $a_{n_1} x(t'_n) a_{n_2}$, und daher

$$(a_{n_1} x(t'_n)) \leqq (a_{n_1} a_{n_2}) \tag{4}$$

und folglich

$$(p x(t'_n)) \leqq (p a_{n_1}) + (a_{n_1} a_{n_2}) \leqq (p a_{n_1}) + (a_{n_1} p) + (p a_{n_2}). \tag{5}$$

Wegen $a_{n_1} \to p$ und $a_{n_2} \to p$ strebt jeder der drei Summanden auf der rechten Seite von (5) gegen 0; folglich strebt auch $(p x(t'_n))$ gegen 0, d.h. $x(t'_n) \to p$.[5])

Um zu zeigen, daß B eine Strecke ist, haben wir für drei beliebige nach wachsenden Parameterwerten geordnete Punkte x, y, z von B zu zeigen xyz. Ist z von p verschieden, so liegt das Tripel schon auf einer Strecke $a_1 a_n$, also xyz. Ist $z = p$, $y \neq p$, so folgt xyz aus xya_n (für hinreichend große n) und $a_n \to p$. Für $y = z = p$ ist nichts zu beweisen.

Wenn nun die Folge a_n keinen Häufungspunkt hat und divergiert, so muß dasselbe für jede Folge $x(t'_n)$ gelten, denn hätte eine solche Folge einen Häufungspunkt p, so wäre, wie soeben bewiesen (bei Vertauschung der Rollen von $x(t'_n)$ und a_n), $a_n \to p$. Also ist W abgeschlossen in R. Jeder Teilbogen von W ist in einem $a_1 a_n$ enthalten, also Strecke. Also ist W ein Strahl.

---

[5]) Dieser Absatz ist in der Korrektur abgeändert worden. (Korr.)

§ 2. Nun machen wir über die Metrik von R noch eine ziemlich einschränkende Annahme „im Kleinen":

IV. Zu jedem $p \subset R$ gibt es ein positives r folgender Art:

a) Ist q ein Punkt mit $(pq) \leqq r$, so existiert eine Strecke pq.

b) Ist q ein Punkt mit $(pq) > r$, so existiert ein Punkt x mit pxq und $(px) = r$.

Der Kürze halber werden wir bei beliebigen $s \geqq 0$ die Punktmenge der q mit $(pq) \leqq s$, also die sphärische Umgebung von p mit dem Radius s, mit $S_s(p)$ bezeichnen. Dann ist also IV eine Aussage über $S_r(p)$. Der Leser wird leicht selbst finden, daß $S_{r'}(p)$ für $0 \leqq r' < r$ dieselben Eigenschaften wie $S_r(p)$ hinsichtlich IV hat. Für Flächen folgt IVa aus der Existenz geodätischer Polarkoordinaten um jeden Punkt, ist aber schwächer, da die Eindeutigkeit der Strecken pq in Abhängigkeit von q nicht gefordert wird. Offensichtlich gilt IVa auch für geodätisch konvexe Bereiche auf Flächen, sowie allgemein für extremalkonvexe Bereiche in Räumen, in denen die Metrik durch ein Variationsproblem definiert wird, für das die Weierstraßsche Theorie gilt. Es genügt sogar, daß der Bereich sternkonvex um jeden Punkt ist; dann braucht er, wie z.B. das abgeschlossene Äußere eines Dreiecks in der Ebene, nicht (geodätisch) konvex zu sein.

IVb ist sicher erfüllt, wenn $S_r(p)$ kompakt ist und die Abstandsfunktion wie in der Differentialgeometrie durch die untere Grenze eines definiten Kurvenintegrals gegeben wird. Ist nämlich B_n eine Folge von Bögen von p nach q, für die das Integral gegen seine untere Grenze $(pq) > r$ strebt, und ist x_n ein Punkt von B_n mit $(px_n) = r$, so ist a fortiori $(px_n) + (x_nq) \to (pq)$. Die x_n haben wegen der Kompaktheit von $S_r(p)$ einen Häufungspunkt x, für den offenbar $(px) = r$ und $(px) + (xq) = (pq)$ gilt.

Satz 1. *Zu jedem Punktepaar a_1, a existiert entweder eine Strecke a_1a oder ein von a_1 ausgehender Strahl, dessen Punkte alle zwischen a_1 und a liegen.*

Beweis: Wir nehmen an, es existiere keine Strecke a_1a. Wir werden den gesuchten Strahl W aus einer Folge von Strecken a_ka_{k+1} zusammensetzen; $W = \sum_{k=1}^{\infty} a_ka_{k+1}$. Um die Punkte a_k zu konstruieren, gehen wir rekursiv vor. Sei a_{n-1} $(n \geqq 2)$ schon konstruiert und zwar so, daß $a_1a_{n-1}a$ und daß keine Strecke $a_{n-1}a$ existiert; für $n = 2$ ist a_1 ein solcher Punkt. Wir betrachten alle solche Punkte x, für die $a_{n-1}xa$, und für die eine Strecke $a_{n-1}x$ existiert, und setzen $\lim\sup\ (a_{n-1}x) = T_n$. Dann ist

$T_n \leqq (a_{n-1}a)$, andererseits $T_n > 0$, nämlich nicht kleiner als das positive r, das nach IV zu a_{n-1} gehört. Den Punkt a_n wählen wir nun als irgendeinen Punkt der Menge der x mit der einzigen Nebenbedingung $(a_{n-1}x) \geqq \frac{1}{2}T_n$. Dann existiert also eine Strecke $a_{n-1}a_n$; diese Strecke ist wegen $a_{n-1}a_n a$ „von a_{n-1} aus auf a gerichtet", und wegen $(a_{n-1}a_n) \geqq \frac{1}{2}T_n$ und der Maximaldefinition von T_n „nicht zu klein". In dieser Wahl liegt der Sinn des Verfahrens.

a_n hat die beiden von a_{n-1} vorausgesetzten Eigenschaften. Aus $a_1a_{n-1}a$ und $a_{n-1}a_na$ folgt nämlich $(a_1a_{n-1})+(a_{n-1}a_n)+(a_na)=(a_1a)$, also a_1a_na. Gäbe es ferner eine Strecke a_na, so wäre $a_{n-1}a_n + a_na$ wegen $a_{n-1}a_na$ und Lemma 3 eine Strecke $a_{n-1}a$, gegen die Induktionsvoraussetzung.

Um zu zeigen, daß $W = \sum_k a_ka_{k+1}$ ein Strahl ist, ziehen wir Lemma 5 heran. Die Voraussetzung des Lemmas ist erfüllt. Daß nämlich W ein Weg ist, ist klar. Daß $\sum_{k=1}^{n} a_ka_{k+1} = W_n$ für jedes n eine Strecke a_1a_n ist, folgt aus Lemma 4, wenn wir (2) für unsere a_1 bis a_n beweisen. Nach Lemma 2 ist (2) bewiesen, wenn wir

$$(a_1a_2) + \ldots + (a_{n-1}a_n) + (a_na) = (a_1a) \tag{6}$$

beweisen. (6) ist für $n = 2$ die oben bewiesene Relation a_1a_na. Gilt (6) für $n-1$, so folgt (6) für n durch Hinzunahme von $a_{n-1}a_na$. — Somit ist Lemma 5 in der Tat auf W anwendbar.

Wäre also W kein Strahl, so gäbe es einen Punkt p derart, daß $a_n \to p$, und daß $W + p$ eine Strecke a_1p wäre. Jedes a_k bestimmt auf dieser Strecke eine Teilstrecke a_kp. Aus $a_n \to p$ und a_1a_na folgt a_1pa, hieraus und aus a_1a_kp folgt $(a_1a_k)+(a_kp)+(pa)=(a_1a)$, also a_kpa. Nun kann p nicht mit a zusammenfallen, sonst wäre a_1p eine Strecke a_1a, während wir voraussetzten, daß keine solche Strecke existiert. Demnach gibt es nach IV ein solches x, daß eine Strecke px existiert und daß pxa. Hieraus und aus a_kpa würde folgen $(a_kp)+(px)+(xa)=(a_ka)$, also a_kpx und a_kxa. Wegen a_kpx ist nach Lemma 3 $a_kp + px$ eine Strecke a_kx. Wegen a_kxa ist $(a_kx) \leqq T_{k+1}$, also wegen $(a_kx) \geqq (px)$:

$$T_k \geqq (px) > 0 \quad \text{für alle } k \geqq 2. \tag{7}$$

Nun ist aber $(a_ka_{k+1}) \geqq \frac{1}{2}T_{k+1}$, also $\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} T_k \leqq \sum_{k=1}^{\infty} (a_ka_{k+1}) \leqq (a_1p)$, also $T_k \to 0$ für $k \to \infty$, im Widerspruch zu (7). Also ist W ein Strahl.

Bleibt a_1xa für einen beliebigen Punkt x von W zu zeigen. Nun kann man zu jedem gegebenen Punkt x ein n so finden, daß x auf der Teilstrecke a_1a_n von W liegt. Also a_1xa_n. Hieraus und aus a_1a_na folgt $(a_1x) + (xa_n) + (a_na) = (a_1a)$, also a_1xa.

Aus Satz 1 können wir eine Folgerung ziehen. Wir nennen eine Punktfolge a_n eine Fundamentalfolge, wenn zu jedem positiven ε ein N existiert, so daß $(a_ra_s) < \varepsilon$ für alle r, s mit $N \leqq r \leqq s$. Ist nun W wie im vorigen Beweis konstruiert, und sind a_n die dort definierten Punkte, so bilden diese Punkte offenbar eine Fundamentalfolge, denn $\sum_{k=1}^{\infty} (a_ka_{k+1})$ liegt wegen (6) unter der endlichen Schranke (a_1a). Also enthält W eine divergente Fundamentalfolge; die a_n haben ja keinen Häufungspunkt. Wie üblich, nennen wir R „vollständig", wenn jede Fundamentalfolge konvergiert. Somit haben wir die

Folgerung aus Satz 1: *Erfüllt R die Axiome I bis IV, und ist R überdies vollständig, so bestimmt jedes Punktepaar a_1, a eine Strecke a_1a.*

Die Vollständigkeit zieht also in diesem Fall eine Art Konvexität nach sich.

§ 3. Wir nehmen jetzt das Axiom hinzu, daß R im Kleinen kompakt ist, fordern also

V. Zu jedem $p \subset R$ gibt es ein positives s, so daß $S_s(p)$ kompakt ist.

Dann gilt

Satz 2. *Zu jeder divergenten Punktfolge p^m und jedem Punkt a gibt es einen von a ausgehenden Strahl der Länge $\leqq \limsup (ap^m)$.*

Beweis. Wir werden diesen Strahl W wieder in der Form $W = \sum_{k=1}^{\infty} a_ka_{k+1}$ darstellen, wobei wir $a_1 = a$ setzen. Wir nehmen an, der Punkt a_k und eine gewisse Teilfolge p^{m_k} von p^m seien schon konstruiert; für $k = 1$ soll diese Teilfolge die gegebene Folge selbst sein. Sei nun R_k die (eventuell unendliche) obere Grenze aller solcher Zahlen r, daß $S_r(a_k)$ kompakt ist. Nach V ist R_k positiv. Wir bestimmen r_k durch die Forderung $2r_k = \min(1, R_k)$. Dann ist r_k positiv endlich. Da p^{m_k} als Teilfolge der divergenten Folge p^m divergiert, liegen fast alle p^{m_k} außerhalb der kompakten Menge $S_{r_k}(a_k)$. Die Teilfolge der p^{m_k}, für die $(a_kp^{m_k}) > r_k$ gilt, bezeichnen wir vorübergehend mit p^x. Mit W^x bezeichnen wir gemäß Satz 1 entweder eine Strecke a_kp^x oder einen von a_k ausgehenden auf p^x gerichteten Strahl. Dann ist die Länge von

$W^x > r_k$. Das folgt, falls W^x eine Strecke ist, direkt aus der Konstruktion, falls W^x ein Strahl ist, daraus, daß W^x dann eine divergente, also außerhalb $S_{r_k}(a_k)$ gelegene Punktfolge enthält. Somit kann man auf W^x einen Punkt a^x_{k+1} mit $(a_k a^x_{k+1}) = r_k$ finden. Die Punkte a^x_{k+1} liegen in der kompakten Menge $S_{r_k}(a_k)$, haben also einen Häufungspunkt. Diesen nennen wir a_{k+1} und bezeichnen mit $p^{m_{k+1}}$ diejenige Teilfolge von p^x, also von p^{m_k}, für die $a^x_{k+1} \to a_{k+1}$.

Dann ist $(a_k a_{k+1}) = r_k$. Also existiert eine Strecke $a_k a_{k+1}$, denn sonst gäbe es nach Satz 1 innerhalb $S_{r_k}(a_k)$ einen Strahl, also eine divergente Punktfolge.

Unser Verfahren definiert also einen Weg $W = \sum_{k=1}^{\infty} a_k a_{k+1}$. Um Lemma 5 auf W anwenden zu können, beweisen wir zunächst (2) für jedes (feste!) n. Nun ist nach III

$$(8) \qquad (a_1 a_n) \geqq (a_1 p^{m_n}) - (a_n p^{m_n}) \text{ für alle } m_n.$$

Andererseits $(a_k a_{k+1}) \leqq (a_k a^x_{k+1}) + (a^x_{k+1} a_{k+1}) = (a_k p^x) - (a^x_{k+1} p^x) + (a^x_{k+1} a_{k+1})$. Also wegen $(a^x_{k+1} p^x) \geqq (a_{k+1} p^x) - (a_{k+1} a^x_{k+1})$

$$(a_k a_{k+1}) \leqq (a_k p^x) - (a_{k+1} p^x) + (a_{k+1} a^x_{k+1}) + (a^x_{k+1} a_{k+1}),$$

also weil für $k < n$ die Folge p^{m_n} in p^x enthalten ist,

$$(9) \quad (a_1 a_2) + \ldots + (a_{n-1} a_n) \leqq (a_1 p^{m_n}) - (a_n p^{m_n}) + \sum_{k=2}^{n} [(a_k a_k^{m_n}) + (a_k^{m_n} a_k)],$$

also nach (8)

$$(a_1 a_2) + \ldots + (a_{n-1} a_n) \leqq (a_1 a_n) + \sum_{k=2}^{n} [(a_k a_k^{m_n}) + (a_k a_k^{m_n})], \text{ für alle } m_n.$$

Für $m_n \to \infty$ streben aber alle Summanden der rechtsstehenden Summe wegen $a_k^{m_n} \to a_k$ und II gegen Null, also gilt

$$(a_1 a_2) + \ldots + (a_{n-1} a_n) \leqq (a_1 a_n),$$

und hier kann wegen III nur das Gleichheitszeichen stehen. Somit gilt (2), und mit Rücksicht auf Lemma 4 ist Lemma 5 ist anwendbar. Wäre also W kein Strahl, so gäbe es ein p mit $a_k \to p$. Nun sei r nach V so gewählt, daß $S_r(p)$ kompakt ist. Für $(p a_k) \leqq \frac{1}{2} r$, also für fast alle k, ist nach III $S_{\frac{1}{2}r}(a_k) \subset S_r(p)$, also kompakt. Somit ist für fast alle k: $R_k \geqq \frac{1}{2} r$, $r_k \geqq \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} r)$. Im Widerspruch dazu haben wir $r_k = (a_k a_{k+1}) \to 0$ wegen $(a_k a_{k+1}) \leqq (a_k p) + (p a_{k+1})$ und $a_k \to p$. W ist also ein Strahl.

Aus (2) und (9) folgt für jedes n:

$$(a_1 a_n) \leqq \limsup_{m_n \to \infty} (a_1 p^{m_n}),$$

und das enthält die behauptete Längenabschätzung für W.

Folgerung 1. Ist R nicht kompakt, d.h. enthält R eine divergente Punktfolge, so geht von jedem Punkt ein Strahl aus.

Folgerung 2. Entweder von keinem oder von allen Punkten von R gehen Strahlen aus.

Beweis: Gibt es in R einen Strahl, so enthält R eine divergente auf diesem Strahl gelegene Punktfolge.

Folgerung 3. *Enthält R keinen Strahl endlicher Länge, so ist in R jede beschränkte Menge kompakt.*

Beweis: Enthält R eine beschränkte nicht kompakte Menge, so ist in dieser eine beschränkte divergente Folge enthalten, also gibt es nach Satz 2 einen Strahl endlicher Länge.

Folgerung 4. *Ist R vollständig, so ist jede beschränkte Menge in R kompakt.*

Beweis: Ist R vollständig, so enthält R keinen endlichen Strahl.

§ 4. Wir untersuchen kurz die gegenseitige Beziehung der Axiome I bis V. Jedenfalls sind sie widerspruchsfrei, da im euklidischen Raum realisiert.

Wegen I siehe Fußnote [4]).

Daß II von den übrigen unabhängig ist, lehrt folgendes Beispiel. R sei kompakt. Wir definieren $(ab) = 1$ für $a \neq b$, und $(aa) = 0$. Dann ist II nicht erfüllt. I, III und V sind erfüllt. IV ist erfüllt, wenn man z.B. $r = \frac{1}{2}$ setzt. Dann besteht $S_r(p)$ nur aus dem Punkt p.

Auf die Unabhängigkeit von III kommen wir später zurück.

Die Unabhängigkeit des Axioms IV von den übrigen lehrt folgendes Beispiel: R ist die Zahlengerade $-\infty < t < \infty$. Wir setzen $(tt') = \sqrt{|t - t'|}$. Dann gilt für $t < t' < t''$ stets $(tt') + (t't'') > (tt'')$, also nie $tt't''$, so daß IV nicht gilt. Die übrigen Axiome sind sichtlich erfüllt.

Die Unabhängigkeit von V lehrt folgendes Beispiel: R sei eine euklidische x, y-Ebene, aus der die Punkte $y = 0$, $x > 0$, also ein Strahl bis auf seinen Ausgangspunkt, entfernt sind. Als Abstand wird der euklidische Abstand gewählt. V ist nicht erfüllt, weil der Punkt $(0, 0)$ keine kompakte Umgebung besitzt. Die andern Axiome sind sichtlich erfüllt.

Um die Unabhängigkeit von III zu beweisen, wählen wir für R die euklidische Ebene, bezeichnen mit $r(ab)$ den euklidischen

Abstand und definieren: $(ab) = r(ab)$ für $r(ab) \leqq 1$, $(ab) = [r(ab)]^2$ für $r(ab) \geqq 1$. Dann ist (ab) als stetige Funktion von $r(ab)$ stetig. Ist b der Mittelpunkt der euklidischen Strecke ac der Länge 2, so ist $(ab) = (bc) = 1$, $(ac) = 4$, also ist III verletzt. I, II, V sind trivialerweise erfüllt. Wählen wir in IV $r = \frac{1}{2}$, so gilt IVa offensichtlich. Daß auch IVb gilt, folgt aus der Stetigkeit unserer Abstandsfunktion. Ist nämlich K die Kreislinie um den Mittelpunkt p mit dem Radius $\frac{1}{2}$, und liegt q außerhalb K, so sei s der Schnittpunkt der euklidischen Strecke pq mit K, und t sei der Schnittpunkt von K mit der Verlängerung dieser Strecke über p hinaus. Dann ist $(ps) = r(ps) = r(pq) - r(sq) = r(pq) - (sq) \leqq (pq) - (sq)$ für $r(sq) \leqq 1$; $(ps) = r(pq) - r(sq) = \frac{(pq) - (sq)}{r(pq) + r(sq)} < (pq) - (sq)$ für $r(sq) > 1$; also in jedem Fall $(ps) \leqq (pq) - (sq)$. Anderseits ist $(pt) > 0 > (pq) - (tq)$. Die stetige Funktion $f(x) = (pq) - (xq) - (px)$ hat also die Eigenschaft $f(s) \geqq 0, f(t) < 0$, es gibt also auf K ein x mit $f(x) = 0$, d.h. $(px) + (xq) = (pq)$, d.h. IVb ist erfüllt.

Das Axiom IV ist in seiner Formulierung zwar dem Hauptziel dieser Arbeit — der Verallgemeinerung der Hopf-Rinowschen Alternative — aber nicht den Erfordernissen der Axiomatik angepaßt; eine Aufspaltung in zwei Axiome liegt nahe. Wir wollen nun IV durch ein Axiom ersetzen, das nicht wesentlich über IVb hinausgeht und in IV offenbar enthalten ist: IV'. Zu jedem $p \subset R$ gibt es ein positives r_0, so daß zu jedem $q \subset R$ und jedem $r \leqq \min(r_0, (pq))$ ein x mit pxq und $(px) = r$ existiert. Es wird also auch im Kleinen nicht die Existenz von Strecken gefordert. Daher dürfte es erwähnenswert sein, *daß IV aus I, II, III, IV', V folgt.* Da IV' bei Verkleinerung von r_0 offenbar wahr bleibt, dürfen wir wegen V voraussetzen, daß $S_{r_0}(p)$ kompakt ist; dann genügt es zu zeigen, daß IVa mit r_0 statt r gilt. Sei ein $x \subset S_{r_0}(p)$ gegeben. Dann verschaffen wir uns zunächst zu jedem positiven k eine Kette von Punkten x_i^k $(i = 0, 1, \ldots, 2^k)$, so daß $x_0^k = p$ und $x_{2^k}^k = x$, und so daß $(x_i^k x_{i+1}^k) = \frac{1}{2^k}(px)$. Man findet diese Punkte sukzessiv nach absteigendem i (mit $x_{2^k}^k = x$ beginnend), indem man nach IV' x_{i-1}^k durch $px_{i-1}^k x_i$ und $(px_{i-1}^k) = (px_i^k) - \frac{1}{2^k}(px)$ bestimmt. Aus der Konstruktion folgt

$$\sum_{i=0}^{2^k} (x_i^k x_{i+1}^k) = (x_0^k x_{2^k}^k) = (px). \tag{10}$$

Aus (10) folgt nach unserer Konstruktion $(px^k_{2^{k-1}}) = \frac{1}{2}(px)$ und $px^k_{2^{k-1}}\, x$ für jedes k. Wegen der Kompaktheit von $S_{r_0}(p)$ gibt es einen Punkt $x_{\frac{1}{2}}$ und eine Teilfolge der k, für die $x^k_{2^{k-1}} \to x_{\frac{1}{2}}$. Es gilt $px_{\frac{1}{2}}x$ und $(px_{\frac{1}{2}}) = (x_{\frac{1}{2}}x) = \frac{1}{2}(px)$. Sodann gibt es Punkte $x_{\frac{1}{4}}$ und $x_{\frac{3}{4}}$ und eine Teilfolge der vorigen Teilfolge der k, für die $x^k_{2^{k-2}} \to x_{\frac{1}{4}}$ und $x^k_{3\cdot 2^{k-2}} \to x_{\frac{3}{4}}$ gilt; aus (10) folgt $(px_{\frac{1}{4}}) = (x_{\frac{1}{4}}x_{\frac{1}{2}}) = (x_{\frac{1}{2}}x_{\frac{3}{4}}) = (x_{\frac{3}{4}}x) = \frac{1}{4}(px)$. Es dürfte klar sein, wie das Verfahren weitergeht. Durch sukzessive Auswahl von Teilfolgen erhält man Punkte x_d für jeden Dualbruch $0 \leqq d \leqq 1$ ($x_0 = p$, $x_1 = x$ gesetzt), so daß für zwei solche Dualbrüche d, d' stets

$$(11) \qquad (x_d x_{d'}) = (d' - d)(px), \qquad 0 \leqq d \leqq d' \leqq 1.$$

Ist nun d eine beliebige reelle Zahl zwischen 0 und 1, und d_n eine gegen d konvergente Folge von Dualbrüchen, so haben die Punkte x_{d_n} wegen der Kompaktheit von $S_{r_0}(p)$ einen Häufungspunkt, und wegen (11) nur einen. Bezeichnen wir diesen mit x_d, so ist auf diese Weise die Punktmenge x_d für alle $0 \leqq d \leqq 1$ erklärt, und (11) gilt auch, wenn d, d' keine Dualbrüche sind. Aus (11) folgt, daß x_d einen Bogen, und zwar eine Strecke px durchläuft, wenn d von 0 bis 1 wächst.

Ob IV schon aus I, II, III, IV′ ohne V folgt, weiß ich nicht.

(Eingegangen den 27. Juli 1935.)