COMPOSITIO MATHEMATICA

D. VAN DANTZIG

Zur topologischen Algebra. III. Brouwersche und Cantorsche Gruppen

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 408-426

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__408_0>

© Foundation Compositio Mathematica, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (http://http://www.compositio.nl/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Zur topologischen Algebra

III. Brouwersche und Cantorsche Gruppen

von

D. van Dantzig

Delft (Holland)

			Seite
§ 1.	Einleitung	[1]	408
§ 2.	Allgemeine Brouwersche und Cantorsche Gruppen TG. 36—46.	[3]	410
§ 3.	Beispiele und spezielle Brouwersche und Cantorsche Gruppen TG. 47—53	[8]	415
§ 4.	Die Ordnung einer Cantorschen Gruppe TG. 54—62	[11]	418
§ 5.	Abelsche Cantorsche Gruppen TG. 63—69	[13]	421
§ 6.	Zerlegung einer Cantorschen Gruppe in Sylowklassen TG. 70—75	[15]	423

§ 1. *Einleitung.*

Als zweite Anwendung der Komplettierungstheorie [1]) bringe ich hier die grundlegenden Sätze der Theorie der $\mathfrak{B}_\nu$-adischen und Cantorschen Gruppen, die ich in zwei früheren Arbeiten [2]) kurz angedeutet habe. Inzwischen hat mich Herr H. Freudenthal darauf aufmerksam gemacht, daß die Cantorschen Gruppen schon 1910 von L. E. J. Brouwer [3]) entdeckt wurden. Sie wurden von ihm eingeführt mittels eines Prozesses, der im wesentlichen mit dem $\mathfrak{B}_\nu$-adischen Komplettierungsprozeß übereinstimmt, weswegen ich vorschlage, die $\mathfrak{B}_\nu$-adischen Gruppen (in den Fällen, wo ausdrückliche Erwähnung der Normalteilerkette $\mathfrak{B}_\nu$ nicht nötig ist) auch mit dem Namen *Brouwersche Gruppen* zu bezeichnen. Der letztere Prozeß läßt sich kurz umschreiben als *Topologisierung* einer Gruppe $\mathfrak{G}$ nach den Nebenklassen einer Vielfachenkette von Normalteilern $\mathfrak{B}_\nu$ und nachträgliche *Komplettierung* [4]); falls alle $\mathfrak{B}_\nu$ endlichen Index haben, ist die kom-

[1]) D. van Dantzig, Zur topologischen Algebra, I. Komplettierungstheorie [Math. Ann. **107** (1932), 587—626], zitiert als I.

[2]) D. van Dantzig [3], [4]. Die Zahlen zwischen eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis in I, 623—626.

[3]) L. E. J. Brouwer, On the structure of perfect sets of points [Proceedings Akad. Amsterdam **12** (1910), 785—794].

[4]) Bei Brouwer l.c. wird die Gruppe (im Cantorschen Falle) als „Limes" der Faktorgruppen $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_\nu$ eingeführt, was im wesentlichen auf dasselbe hinauskommt. (Vgl. § 3, Satz TG. 53.)

plette Gruppe *Cantorsch*, d.h. mit der Cantorschen Menge homöomorph oder endlich.

Es stellt sich heraus, daß die meisten grundlegenden Sätze aus der Theorie der endlichen diskreten Gruppen sich auf Cantorsche Gruppen erweitern lassen, wobei die Rolle der ganzen rationalen Zahlen durch die universellen Zahlen [5]) übernommen wird. Umgekehrt bilden die Cantorschen Gruppen ein unentbehrliches Hilfsmittel zum Studium der Cantorschen Ringe (insbesondere der universellen Ringe über den algebraischen Zahlringen), wie ich in zwei früheren Arbeiten [6]) schon angedeutet habe, hier durch die Beispiele des § 3 weiter belege, aber erst in einer späteren Arbeit eingehend ausführen werde.

Außer in der obengenannten Brouwerschen Arbeit und der bekannten Henselschen Zahlentheorie finden sich Brouwersche Gruppen in der älteren Litteratur bei R. Baer [3], der einige elementare allgemeine Sätze darüber bewiesen hat, bei H. Prüfer [1, 2], der die Hauptsätze über Abelsche Cantorsche Gruppen für eine wichtige spezielle Klasse von solchen Gruppen bewiesen hat (vgl. dazu auch J. v. Neumann [1]) und bei H. Rauter [1], der entsprechendes für eine im wesentlichen noch engere Klasse von Gruppen getan hat (nämlich in unsrer Terminologie für diejenigen primoiden Abelschen Gruppen, die in *endlich viele* p-adische Gruppen direkt zerfallen). [6a]) Die anderen Sätze kommen m.W. zuerst hier oder in meinen beiden oben erwähnten Arbeiten vor. [6b])

Bzgl. der Beweismethode ist zu bemerken, daß sich mehrere der gruppentheoretischen Sätze, obwohl ich sie der Einfachheit halber *mit* Benutzung der entsprechenden Sätze für endliche

---

[5]) Vgl. für ihre Definition die zweite Arbeit dieser Reihe: Zur topologischen Algebra, II. Abstrakte $\mathfrak{b}_\nu$-adische Ringe [Compositio Math. 2 (1935), 201—223], zitiert als II. In der jetzt vorliegenden Arbeit sind *immer* die universellen Zahlen über dem Ring der *ganzen rationalen Zahlen* gemeint. Für deren weitere Eigenschaften vgl. D. van Dantzig, Nombres universels ou $\nu!$-adiques [Erscheint in den Annales de l'Ecole Norm.] zitiert als NU.

[6]) II und NU.

[6a]) Allgemeine Abelsche $\mathfrak{B}_\nu$-adische Gruppen wurden inzwischen in anderem Zusammenhang von J. W. Alexander & L. W. Cohen untersucht: A classification of the homology groups of compact spaces [Annals of Math. (2) 33 (1932), 538—566]; vgl. auch J. W. Alexander, On the homology groups of abstract spaces [ibid. 35 (1934), 130—151]; On the characters of discrete abelian groups [ibid., 389—395]; J. W. Alexander & L. Zippin, Discrete abelian groups and their character groups [ibid. 36 (1935), 71—85].

[6b]) Insbesondere habe ich 1931 die Sätze TG. 36, 37, 39, 40, 57, 59, 71, 72 erstmalig veröffentlicht [3].

Gruppen bewiesen habe, auch *ohne* diese beweisen ließen, wodurch ein großer Teil der Theorie der endlichen Gruppen gänzlich in die Theorie der Cantorschen Gruppen eingeordnet werden würde.

§ 2. *Allgemeine Brouwersche und Cantorsche Gruppen.*

TG. 36. *Eine kompakte Gruppe* $\mathfrak{G}$, *die von jeder Umgebung der Eins erzeugt wird, ist zusammenhängend* [7]).

Beweis. Wäre $\mathfrak{G}$ unzusammenhängend, so wäre

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}(F_1, F_2),\ F_1 = \overline{F}_1,\ F_2 = \overline{F}_2,\ \mathfrak{D}(F_1, F_2) = \bigcirc,\ 1 \varepsilon F_1,\ F_2 \neq \bigcirc.$$

Wäre für eine Umgebung U der Eins, die wir wegen TG. 12 gleich U^{-1} annehmen dürfen, $U^n \subset F_1$ für alle n, so wäre die von U erzeugte Gruppe, die nach Voraussetzung gleich $\mathfrak{G}$ sein muß, in F_1 enthalten, in Widerspruch zu $F_2 \neq \bigcirc$. Zu jedem U gibt es also eine größte Zahl $n = n(U)$ mit $U^n \subset F_1$, also auch ein Produkt $x = a_0 a_1 \ldots a_n$, $a_i \varepsilon U$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $x \varepsilon F_2$, während $y = a_1 a_2 \ldots a_n \varepsilon F_1$ ist. Setzt man $a_0 = a$, dann ist also $y \varepsilon F_1$, $a \varepsilon U$, $x = a y \varepsilon F_2$. Läßt man jetzt U eine gegen die Eins konvergierende Folge U_ν durchlaufen, dann findet man eine Folge $x_\nu = a_\nu y_\nu \varepsilon F_2$, $y_\nu \varepsilon F_1$, $a_\nu \to 1$.

Geht man auf eine konvergente Teilfolge $x_\nu \to x$ über, so ist $x \varepsilon \overline{F}_2 = F_2$, andererseits aber $x = \lim y_\nu \varepsilon \overline{F}_1 = F_1$, im Gegensatz zur Voraussetzung $\mathfrak{D}(F_1, F_2) = \bigcirc$.

TG. 37. *Eine mikrokompakte Gruppe, die von jeder Umgebung der Eins erzeugt wird, ist zusammenhängend.* (Verschärfung von TG. 36.)

Beweis. Ist $\mathfrak{H}$ die Komponente der Eins, dann ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ wegen TG. 16, 20 (I, 609) [7a]) auch eine T-Gruppe, die wegen TG. 33 (I, 598) gleichfalls mikrokompakt, aber vollständig zusammenhangslos (also nulldimensional) ist. Wählt man nun in $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ für F_1 eine kompakte Umgebung von $\mathfrak{H}$ mit leerer Begrenzung, für F_2 ihr Komplement, so bleibt der Beweis von TG. 36 gültig. Also ist die Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ zusammenhängend. Sie besteht also aus nur einem Punkte, d.h. $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}$. Folglich ist $\mathfrak{G}$ zusammenhängend.

Bemerkung. Für nicht mikrokompakte Mengen gilt der Satz im allgemeinen nicht. *Gegenbeispiel*: die (additive) Gruppe der rationalen Zahlen wird von jeder Umgebung der Null erzeugt, ist aber nicht zusammenhängend.

TG. 38. *Definition.* Eine (geschlossene) *Cantorsche Gruppe*

---

[7]) Der Satz ist die Umkehrung von TG. 18 (I, 609) für kompakte Gruppen.

[7a]) Wie Herr H. Freudenthal (Einige Sätze über topologische Gruppen [Annals of Math. 37 (1936), 46—56]) bemerkt hat, gilt die *zweite* Hälfte des zitierten Satzes TG. 20 nur für *gebietstreue* Homomöomorphismen.

ist eine T-Gruppe, die entweder mit der (geschlossenen) Cantorschen Menge homöomorph oder endlich ist. Eine *offene Cantorsche Gruppe* ist eine T-Gruppe, die entweder mit der offenen Cantorschen Menge (T. 23. I, 597) oder mit einer diskreten Menge homöomorph ist.

TG. 39. *Eine offene oder geschlossene Cantorsche Gruppe* $\mathfrak{G}$ *enthält beliebig kleine offene Untergruppen.*

Beweis. Weil $\mathfrak{G}$ mikrokompakt und nulldimensional ist, gibt es beliebig kleine kompakte Umgebungen der Eins mit leerer Begrenzung. Es sei F_1 eine solche, F_2 die komplementäre Menge; dann ist der zweite Teil des Beweises von TG. 36 anwendbar. Die Voraussetzung, daß zu jeder Umgebung U der Eins eine größte Zahl $n(U)$ mit $U^{n(U)} \subset F_1$ existiert, führt also ebenso wie dort zu einem Widerspruch. Es gibt also eine Umgebung $U = U^{-1}$, für die kein $n(U)$ existiert, d.h. für die $U^\nu \subset F_1$ ist für *alle* ν. Dann ist aber die von U erzeugte Gruppe $\mathfrak{H}$ in F_1 enthalten. Als Vereinigung offener Mengen ist $\mathfrak{H}$ auch offen.

TG. 40. *Eine geschlossene Cantorsche Gruppe enthält beliebig kleine offene Normalteiler.*

Beweis. Wegen TG. 39 gibt es eine die Eins definierende Folge von offenen Untergruppen $\mathfrak{H}_\nu$. Es sei $\mathfrak{H}_{\nu n}$ die Vereinigung von allen Produkten von je n mit $\mathfrak{H}_\nu$ konjugierten Untergruppen:

$$\mathfrak{H}_{\nu n} = \underset{x_i \varepsilon \mathfrak{G}}{\mathfrak{S}} (x_1 \mathfrak{H}_\nu x_1^{-1} \cdot x_2 \mathfrak{H}_\nu x_2^{-1} \cdots x_n \mathfrak{H}_\nu x_n^{-1}).$$

Dann ist der von $\mathfrak{H}_\nu$ erzeugte Normalteiler gleich der Vereinigung $\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_{\nu 1}, \mathfrak{H}_{\nu 2}, \ldots)$. Wäre nun in einer Umgebung U der Eins, von der man annehmen kann, daß ihre Begrenzung leer ist, kein $\mathfrak{B}_\nu$ enthalten, so gäbe es zu jedem ν ein größtes n mit $\mathfrak{H}_{\nu n} \subset U$. Es gäbe also Elemente $y_\nu = x_\nu^{-1} h_\nu x_\nu \cdot z_\nu$, $x_\nu \varepsilon \mathfrak{G}$, $h_\nu \varepsilon \mathfrak{H}_\nu$, $z_\nu \varepsilon \mathfrak{H}_{\nu n}$, $y_\nu \not\varepsilon U$. Geht man dann über auf eine konvergente Teilfolge $x_\nu \to x$, $z_\nu \to z$, so wäre $\lim y_\nu = z$ wegen $h_\nu \to 1$, also $z \not\varepsilon U$. Es ist aber $z = \lim z_\nu \varepsilon \overline{U} = U$, weil U leere Begrenzung hat. Also muß für genügend großes n $\mathfrak{B}_n \subset U$ sein. Daß $\mathfrak{B}_n$ offen ist, ist klar.

Bemerkung. Satz TG. 40 gilt im allgemeinen nicht für *offene* Cantorsche Gruppen.

Gegenbeispiel: die Gruppe $\mathfrak{G} = \{x^{\bar{a}} y^k\}$ mit den Relationen

$$y^k x^{\bar{a}} y^{-k} = x^{p^k \bar{a}},$$

wo $\bar{a} = \sum_n^{+\infty} a_\nu p^\nu$ (p = Primzahl, n = beliebige (nicht notwendig positive) ganze rationale Zahl, $0 \leqq a_\nu \leqq p - 1$) alle gebrochenen p-adischen Zahlen und k alle ganzen rationalen Zahlen durch-

läuft, ist eine offene Cantorsche Gruppe, wenn man die Untergruppen $\mathfrak{H}_n = \{x^{\bar{a}}\}$ mit $\bar{a} \equiv 0(p^n)$ als (kompakte) Umgebungen der Eins definiert. Der von jedem $\mathfrak{H}_n$ erzeugte Normalteiler ist aber $\mathfrak{H} = \{x^{\bar{a}}\}$ mit *beliebigen* $\bar{a}$, also für $p \geqq 2$ in keiner kompakten Umgebung enthalten.

Korollar 1. Die Nebenklassen zu den $\mathfrak{B}_\nu$ bilden ein $\mathfrak{G}$ definierendes Umgebungssystem. Denn ist x ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$, so wird x durch die Folge von Umgebungen $\mathfrak{B}_\nu x$ definiert.

Korollar 2. Ist $\mathfrak{H}$ eine beliebige (z.B. abzählbare) in $\mathfrak{G}$ dichte Untergruppe, $\mathfrak{B}_{0\nu} = \mathfrak{D}(\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{H})$, so sind die $\mathfrak{B}_{0\nu}$ offene Normalteiler in $\mathfrak{H}$. Die Nebenklassen der $\mathfrak{B}_{0\nu}$ in $\mathfrak{H}$ bilden ein $\mathfrak{H}$ definierendes Umgebungssystem. $\mathfrak{G}$ ist die Komplettierung von $\mathfrak{H}$.

TG. 41. *Ist* $\mathfrak{H} = \mathfrak{B}_0$ *irgendeine abzählbare* [8]) *Gruppe,* $\mathfrak{B}_\nu$ *eine Folge von Normalteilern in* $\mathfrak{H}$ *mit* $\mathfrak{B}_{\nu+1} \subset \mathfrak{B}_\nu$, *deren Durchschnitt die Eins ist, dann genügen die Nebenklassen nach den* $\mathfrak{B}_\nu$ *den Umgebungsaxiomen* T. 1, ..., 5, (I, 594) *und sie definieren* $\mathfrak{H}$ *als* T-*Gruppe.*

Beweis. Die Gültigkeit von T. 1 bis 5 ist trivial. Es sei $x_\nu \to x$, $y_\nu \to y$, d.h. $x_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_{m_\nu} x$, $y_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_{n_\nu} y$, $m_\nu \to \infty$, $n_\nu \to \infty$, dann ist $x_\nu^{-1} \varepsilon x^{-1} \mathfrak{B}_{m_\nu} = \mathfrak{B}_{m_\nu} x^{-1}$, also $x_\nu^{-1} \to x^{-1}$ d.h. TG. 1 (I, 606) ist erfüllt. Weiter ist

$$x_\nu y_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_{m_\nu} x \mathfrak{B}_{n_\nu} y = \mathfrak{B}_{r_\nu} xy, \quad r_\nu = \min (m_\nu, n_\nu),$$

also $x_\nu y_\nu \to xy$, d.h. TG. 2 gilt auch.

TG. 42. $\mathfrak{H}$ *ist komplettierbar. Die Komplettierung* $\mathfrak{G} = \bar{\mathfrak{H}}$ *von* $\mathfrak{H}$ *ist nulldimensional.*

Beweis. Ist x_ν eine *beliebige* Folge aus $\mathfrak{H}$, $y_\nu \to 1$, also $y_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_{r_\nu}$, $r_\nu \to \infty$, so ist $x_\nu^{-1} y_\nu x_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_{r\nu}$, also $x_\nu^{-1} y_\nu x_\nu \to 1$.

Korollar. Wegen MG. 10 (I, 615) ist $\mathfrak{H}$ also nicht nur komplettierbar, sondern sogar metrisierbar. Eine Metrisierung erhält man, wenn man $\varphi(1) = 0$ und $\varphi(x) = \varepsilon_n$ setzt für $x \varepsilon \mathfrak{B}_n$, $x \not\varepsilon \mathfrak{B}_{n+1}$, wo ε_ν irgend eine monoton abnehmende Nullfolge von positiven Zahlen ist. Dann ist $\varphi(xy) \leqq \max (\varphi(x), \varphi(y))$, und diese Relation bleibt auch nach der Komplettierung erfüllt. Aus M. 9 und MG. 6 (I, 599 bzw. 611) folgt dann sofort, daß $\mathfrak{G}$ nulldimensional ist.

---

[8]) Die Bedingung, daß $\mathfrak{H}$ abzählbar ist, ist unwesentlich; sie dient nur, um die Gültigkeit des zweiten Abzählbarkeitsaxioms zu erzwingen. Letzteres kann aber wie immer wenn nötig durch die Hypothese oder die Bedingung der Wohlordnungsfähigkeit ersetzt werden und ergibt dann die entsprechend „verallgemeinerten" Sätze.

TG. 43. *Definition.* Die in TG. 42 definierte Gruppe $\mathfrak{G} = \overline{\mathfrak{H}}$ heißt die $\mathfrak{B}_\nu$-*adische Gruppe über* $\mathfrak{H}$ und wird mit $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_\nu)$ bezeichnet; $\mathfrak{B}_\nu$-adische Gruppen sollen auch allgemein *Brouwersche Gruppen* genannt werden.

Bemerkung 1. Falls $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}(\mathfrak{B}_\nu)$ nicht die Eins ist, definieren die Nebenklassen nach den $\mathfrak{B}_\nu$ nicht $\mathfrak{H}$ sondern $\mathfrak{H}/\mathfrak{B}$ als T-Gruppe. Wir behalten aber auch in diesem Falle für die Komplettierung $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_\nu)$ von $\mathfrak{H}/\mathfrak{B}$ die obengenannte Bezeichnung bei.

Bemerkung 2. TG. 41 und 42 bleiben gültig, falls man eine *topologische* Gruppe umtopologisiert nach den Nebenklassen nach einer Vielfachenkette von *offenen* Normalteilern (falls es eine solche Kette gibt). Die Limesbeziehungen in den Beweisen beziehen sich dann auf die *neue* Topologisierung. Auch in diesem Falle nennen wir die komplettierte Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_\nu)$ $\mathfrak{B}_\nu$-adisch über $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{G}$ ist also die Komplettierung eines eindeutigen (aber nur falls $\mathfrak{D}(\mathfrak{B}_\nu) = (1)$ ist *ein*-eindeutigen) homomorphen und *stetigen* (aber im allgemeinen nicht umkehrbar stetigen) Bildes von $\mathfrak{H}$. Falls die $\mathfrak{B}_\nu$ (in der ursprünglichen Topologisierung) beliebig klein werden, ist $\mathfrak{H}(\mathfrak{B}_\nu)$ einfach die Komplettierung von $\mathfrak{H}$.

Bemerkung 3. Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}(\mathfrak{B}_\nu)$, so ist $\mathfrak{G}(\overline{\mathfrak{B}}_\nu) = \mathfrak{G}$. Also: jede Brouwersche Gruppe ist $\mathfrak{B}_\nu$-adisch über sich selbst. Wir können deshalb $\mathfrak{H}$ weiterhin gänzlich außer Betracht lassen, $\mathfrak{H}$ durch $\mathfrak{G}$ ersetzen und $\mathfrak{B}_\nu = \overline{\mathfrak{B}}_\nu$ setzen: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$. Anders gesagt: jede topologische Gruppe, die beliebig kleine offene Normalteiler enthält, ist Brouwersch.

TG. 44. *Sind die sämtlichen Faktorgruppen* $\mathfrak{B}_{\nu+1}/\mathfrak{B}_\nu$ *endlich, so ist* $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$ *eine* (*geschlossene*) *Cantorsche Gruppe.*

Beweis. Weil $\mathfrak{G}$ wegen TG. 42 nulldimensional ist, ist nur noch zu beweisen, daß $\mathfrak{G}$ kompakt ist. Ist nun $x_\nu = x_{0\nu}$ eine beliebige Folge aus $\mathfrak{G}$, so gibt es für jedes n eine Teilfolge $x_{n\nu}$ von $x_{n-1,\nu}$, deren sämtliche Elemente mod $\mathfrak{B}_n$ gleich sind, also auch eine Teilfolge $y_\nu = x_{\nu\nu}$, für die $y_\nu \varepsilon y_n \mathfrak{B}_n$ $(\nu \geqq n)$ ist. Dann ist aber y_ν eine Fundamentalfolge; folglich ist die komplettierte Gruppe kompakt.

Bemerkung: Umgekehrt ist wegen TG. 40 jede Cantorsche Gruppe Brouwersch; daß dabei die Faktorgruppen endlich werden, folgt sofort aus der Kompaktheit.

TG. 45. *Homomöomorphiesatz-Isomöomorphiesatz. Sind* $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{B}'_\nu$ *zwei Ketten von abgeschlossenen Normalteilern in* $\mathfrak{G}$ *und gibt es eine Folge monoton wachsender Zahlen* ν_μ *derart, daß* $\mathfrak{B}'_\nu \subset \mathfrak{B}_m$ *ist für alle* $\nu \geqq \nu_m$, *so ist* $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$ *homomöomorphes Bild von* $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}'_\nu)$. *Gibt es eine zweite Folge monoton wachsender Zahlen* μ_ν, *derart daß über-*

dies $\mathfrak{B}'_\mu \subset \mathfrak{B}_n$ *ist für alle* $\mu \geqq \mu_n$, *so sind* $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$ *und* $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}'_\nu)$ *isomöomorph.*

Beweis. Entspricht genau den Beweisen von TR. 31, 32 (II, [7] 207).

Bemerkung. Man kann bei einer *Cantorschen* Gruppe immer zwischen je zwei aufeinanderfolgende $\mathfrak{B}_\nu$ endlich viele Untergruppen einschalten, derart daß diese zusammen mit den $\mathfrak{B}_\nu$ eine Kompositionsreihe bilden. Bei nicht kompakten Gruppen ist dies im allgemeinen nicht möglich. *Gegenbeispiel*: $\mathfrak{G}$ ist das direkte Produkt von abzählbar vielen unendlichen zyklischen Gruppen $\mathfrak{G}_1 \dot{\times} \mathfrak{G}_2 \dot{\times} \ldots$; $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{G}_n \dot{\times} \mathfrak{G}_{n+1} \dot{\times} \ldots$.

TG. 46. *Jordan-Hölderscher Satz. Ist* $\mathfrak{H}_\nu$ *eine die Cantorsche Gruppe* $\mathfrak{G}$ *definierende*[8a]) *Kompositionsreihe von offenen Untergruppen* (so daß $\mathfrak{H}_{\nu+1}$ Normalteiler in $\mathfrak{H}_\nu$, aber nicht notwendig in $\mathfrak{G}$ ist), *so sind die Primfaktoren* $\mathfrak{H}_\nu/\mathfrak{H}_{\nu+1}$ *bis auf die Reihenfolge bestimmt. Dabei sind die Multiplizitäten derart bestimmt, daß jeder Primfaktor in zwei Kompositionsreihen* $\mathfrak{H}_\nu$, $\mathfrak{H}'_\nu$ *entweder in gleicher endlicher Anzahl, oder je unendlich oft vorkommt.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{G} \supset \mathfrak{H}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{H}_k$ ein beliebiges Anfangssegment der Kompositionsreihe $\mathfrak{H}_\nu$, das r mit einer gegebenen einfachen Gruppe $\mathfrak{P}$ isomorphe Faktorgruppen $\mathfrak{H}_i/\mathfrak{H}_{i+1}$ enthält, und es sei $\mathfrak{H}'_0 = \mathfrak{G} \supset \mathfrak{H}'_1 \supset \ldots$ eine zweite Kompositionsreihe. Wegen TG. 40 gibt es in $\mathfrak{G}$ eine $\mathfrak{G}$ definierende Folge von offenen Normalteilern $\mathfrak{B}_\nu$. Es sei $\mathfrak{H}_{n\nu} = (\mathfrak{H}_\nu, \mathfrak{B}_n)/\mathfrak{B}_n = \mathfrak{H}_\nu\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_n$.

Beim Homomorphismus $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n$ ist die Faktorgruppe $\mathfrak{H}_{ni}/\mathfrak{H}_{n,i+1}$ Bild der *einfachen* Gruppe $\mathfrak{H}_i/\mathfrak{H}_{i+1}$, also entweder isomorph mit dieser Gruppe oder leer [8b]). Im letzteren Fall ist $\mathfrak{H}_{ni} = \mathfrak{H}_{n,i+1}$, also $\mathfrak{H}_i \subset \mathfrak{B}_n\,\mathfrak{H}_{i+1}$. Durch Wahl eines genügend kleinen $\mathfrak{B}_n$ (nämlich $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{H}_k$) kann man erreichen, daß dies für kein $i < k$ zutrifft. Schaltet man jetzt zwischen $\mathfrak{H}_{nk}$ und $\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_n = 1$ eine Kompositionsreihe ein, so enthält die aus dieser und $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n = \mathfrak{H}_{n0} \supset \mathfrak{H}_{n1} \supset \ldots \supset \mathfrak{H}_{nk}$ zusammengesetzte Reihe mindestens r mit $\mathfrak{P}$ isomorphe Faktoren, weil dies schon für letztere Reihe zutrifft. Weil nun für genügend großes μ $\mathfrak{H}'_\mu \subset \mathfrak{B}_n$ ist, die Faktoren der Reihe $\mathfrak{H}'_{n0} = \mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n \supset \mathfrak{H}'_{n1} \supset \ldots \supset \mathfrak{H}'_{n\mu} = 1$ (wo $\mathfrak{H}'_{ni} = (\mathfrak{H}'_i, \mathfrak{B}_n)/\mathfrak{B}_n$ ist) einfach oder leer sind und der Jordan-Höldersche Satz G. 13 (I, 600) für die *endliche* Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n$ gilt, muß auch die zuletzt genannte Kompositionsreihe mindestens

---

[8a]) Die $\mathfrak{H}_\nu$ konvergieren also gegen die Eins.

[8b]) Eine Gruppe heiße *leer*, falls sie außer der Eins kein einziges Element enthält.

r mit $\mathfrak{P}$ isomorphe Faktoren enthalten. Weil aber die Faktoren der Reihe $\mathfrak{H}'_0 = \mathfrak{G} \supset \mathfrak{H}'_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{H}'_\mu$ einfach sind, muß auch *diese* Reihe mindestens r mit $\mathfrak{P}$ isomorphe Faktoren enthalten. Die Gesamtzahl *aller* mit $\mathfrak{P}$ isomorphen unter den $\mathfrak{H}'_\nu/\mathfrak{H}'_{\nu+1}$ kann also nicht kleiner als die entsprechende Anzahl unter den $\mathfrak{H}_\nu/\mathfrak{H}_{\nu+1}$ sein. Weil auch das Umgekehrte gilt, ergibt sich die Aussage des Satzes.

§ 3. *Beispiele und spezielle Brouwersche Gruppen.*

Beispiel 1. Sind von einem gewissen n ab alle $\mathfrak{B}_\nu$ gleich: $\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{B}$ für $\nu \geqq n$, so ist $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$ einfach die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$.

Beispiel 2. Jeder $\mathfrak{b}_\nu$-adische Ring ist eine Brouwersche Gruppe bzgl. der Addition.

TG. 47. *Die Einsteiler*[8c]) *in einem $\mathfrak{b}_\nu$-adischen Ring bilden eine Brouwersche Gruppe.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{B}_n$ die Menge aller Einsteiler[8c]) von der Gestalt $1 + x$, $x \varepsilon \mathfrak{b}_n$. Ist $(1+x)^{-1} = y$, so ist $1 = (1+x)y$, $\therefore y = 1 - xy$, $xy \varepsilon \mathfrak{b}_n$, $\therefore y \varepsilon \mathfrak{B}_n$.

Ist $1+z$, $z \varepsilon \mathfrak{b}_n$ ein zweites Element von $\mathfrak{B}_n$, so ist $x+z+xz \varepsilon \mathfrak{b}_n$, $\therefore (1+x)(1+z) \varepsilon \mathfrak{B}_n$. Ist u ein beliebiger Einsteiler[8c]), so ist $u^{-1}(1+x)u = 1 + u^{-1}xu \varepsilon \mathfrak{B}_n$, weil $u^{-1}xu \varepsilon \mathfrak{b}_n$ ist. Also ist $\mathfrak{B}_n$ ein Normalteiler in $\mathfrak{G}$ und offenbar eine offene Menge.

Korollar 1. Ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{b}_\nu)$ direkte Summe von primitiven Ringen, $\eta = \sum_r^{\wedge} e$, (wo die Summation über irgendeine Teilmenge der Menge $\underset{1}{e}, \underset{2}{e}, \ldots$ zu erstrecken ist) ein beliebiges Idempotent, so bilden die Teiler von η eine Brouwersche Gruppe.[9])

Korollar 2. Die n-reihigen Matrices mit Bestimmungszahlen aus einem $\mathfrak{b}_\nu$-adischen Ring, deren Determinante ein Einsteiler ist, bilden eine Brouwersche Gruppe. Der Normalteiler $\mathfrak{B}_n$ besteht hier aus allen Matrices $\mathsf{E} + \mathsf{M}$, wo E die Einsmatrix und $\mathsf{M} \equiv 0(\mathfrak{b}_n)$ (d.h. alle Bestimmungszahlen von M gehören zu $\mathfrak{b}_n$) ist.

TG. 48. *Jede abgeschlossene Gruppe Γ von in ihrer Gesamtheit gleichmäßig stetigen Automorphismen einer Brouwerschen Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$ ist selbst Brouwersch.* Dabei ist die Gleichmäßigkeit im folgenden Sinne gemeint: Ist $\mathfrak{B}_n^\sigma$ das Bild von $\mathfrak{B}_n$ beim Automorphismus σ, $\mathfrak{B}_n^\Gamma$ die Vereinigung aller $\mathfrak{B}_n^\sigma$, $\sigma \varepsilon \Gamma$, so werden die $\mathfrak{B}_\nu^\Gamma$ für $\nu \to \infty$ beliebig klein, d.h. es gibt eine monoton wachsende Zahlenfolge ν_μ, derart daß $\mathfrak{B}_\nu^\Gamma \subset \mathfrak{B}_n$ ist für $\nu \geqq \nu_n$.

[8c]) Es sind hier *zweiseitige* Einsteiler gemeint.

[9]) Vgl. hierzu TR. 39 (II, [13] 213) und NU, § 5.

Beweis. Es sei H_n die Menge aller σ für die $x^{\sigma-1} = x^\sigma x^{-1} \varepsilon \mathfrak{B}_n$ ist (für alle $x \varepsilon \mathfrak{G}$). Dann ist für $\sigma \varepsilon \mathsf{H}_n$, $y = (x^{\sigma^{-1}})^{-1} = (x^{-1})^{\sigma^{-1}}$: $x^{\sigma^{-1}-1} = y^{-1}y^\sigma \varepsilon y^{-1}\mathfrak{B}_n y = \mathfrak{B}_n$, also $\sigma^{-1} \varepsilon \mathsf{H}_n$. Ist auch $\tau \varepsilon \mathsf{H}_n$, so ist für $y = x^\sigma$: $x^{\sigma\tau-1} = y^\tau y^{-1} \cdot x^\sigma x^{-1} = y^{\tau-1}x^{\sigma-1} \varepsilon \mathfrak{B}_n^2 = \mathfrak{B}_n$, also $\sigma\tau\varepsilon\mathsf{H}_n$. Ist ϱ ein *beliebiger* Automorphismus, so ist für $y = x^\varrho$: $x^{\varrho\sigma\varrho^{-1}-1} = y^{\sigma\varrho^{-1}} \cdot y^{-\varrho^{-1}} = (y^\sigma y^{-1})^{\varrho^{-1}} \varepsilon \mathfrak{B}_n^{\varrho^{-1}} \subset \mathfrak{B}_k$ für $n \geqq \nu_k$. Also ist $\varrho\mathsf{H}_n\varrho^{-1} \subset \mathsf{H}_k$, d.h. der durch H_n erzeugte Normalteiler B_n ist in H_k enthalten, d.h. die B_ν werden beliebig klein.

Bemerkung. Bei Ersetzung der gleichmäßigen Stetigkeit durch Stetigkeit ohne weiteres gilt der Satz nicht. *Gegenbeispiel*: Es sei $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt von unendlich vielen Gruppen der Ordnung p: $\mathfrak{G} = \{x_1^{i_1}x_2^{i_2} \ldots\}$, $i_n = 0, 1, \ldots, p-1$; $x_i^p = 1$. $\mathfrak{B}_n$ sei die Menge aller $x \varepsilon \mathfrak{G}$, für die $i_1 = \ldots = i_n = 0$ ist. Dann ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$ Cantorsch. Jede Permutation der x_ν bestimmt einen Automorphismus. Falls nur endlich viele der x_ν ihre Stelle wechseln, ist der Automorphismus stetig. Es sei also Γ die Gruppe aller Permutationen von je endlich vielen x_ν. Dann ist Γ (abgesehen von einem Normalteiler vom Index 2) *einfach*, also a fortiori nicht Brouwersch. Das Beispiel zeigt, daß auch Beschränkung auf *Cantorsche* Gruppen $\mathfrak{G}$ nicht hinreicht.

TG. 49. *Jede kompakte Gruppe $\mathfrak{G}$ von topologischen Transformationen einer Cantorschen Menge M in sich ist Brouwersch* (also sogar Cantorsch).

Beweis. M sei überdeckt mit einem System von endlich vielen offenen und abgeschlossenen paarweise fremden Teilmengen $U_1, \ldots, U_n$. Die Transformationen aus $\mathfrak{G}$, die jedes U_i invariant lassen, bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, zu der jede „genügend kleine" (d.h. der Eins genügend benachbarte) Transformation von $\mathfrak{G}$ gehört, d.h. also eine *offene* Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Weil dies für beliebig kleine Überdeckungen von M gilt, folgt aus dem Beweis von TG. 40, daß $\mathfrak{G}$ Brouwersch ist.

Korollar. Jede kompakte Gruppe von Automorphismen einer Cantorschen Gruppe ist selbst Cantorsch. Dies folgt übrigens auch aus TG. 48.

TG. 50. *Definition.* Eine *gemessene* Cantorsche Menge ist eine Cantorsche Menge M, zu der eine Folge von natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots$, und eine Zerlegung jeder Menge n-ter Stufe in a_{n+1} Mengen $(n+1)$-ter Stufe definiert ist, derart daß M selbst die einzige Menge nullter Stufe ist, und daß zu jeder Überdeckung von M mit endlich vielen Umgebungen $U_1, \ldots, U_k$ ein solches n existiert, daß jede Menge n-ter Stufe ganz in einem U_i enthalten

ist. Setzt man $b_0 = 1$, $b_n = a_n b_{n-1}$, so definiert die Vielfachenkette der b_ν erstens ein formales *Potenzprodukt* $\prod_0^\infty p_r^{\alpha_r}$, wo $p_0 = 2$, $p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$ die (z.B. natürlich geordneten) Primzahlen und α_r entweder die höchste in irgendeinem b_n aufgehende Potenz von p_r oder $= \infty$ ist, (nämlich wenn keine solche Potenz existiert), die *formale Ordnung von M* genannt, und zweitens ein *Ideal* $\mathfrak{b} = [(b_1), (b_2), \ldots]$ [10]) im Ring $\mathfrak{J}$ der universellen Zahlen [5]), das *Ordnungsideal* oder kurz die *Ordnung* von M genannt. Offenbar wird jede Cantorsche Gruppe durch die Nebenklassen nach ihren Normalteilern gemessen. Das *Maß* einer jeden Menge n-ter Stufe sei die Zahl $1/b_n$. Eine *Permutation* einer gemessenen Cantorschen Menge M ist eine topologische Transformation von M in sich, die für jedes n jede Menge n-ter Stufe in eine ebensolche überführt.

TG 51. *Brouwerscher Satz.* [11]) *Die Permutationen einer gemessenen Cantorschen Menge bilden eine Brouwersche (sogar Cantorsche) Gruppe.*

Beweis. Wegen TG. 49 ist nur zu beweisen, daß die Gruppe der Permutationen kompakt ist. Es sei dazu eine beliebige Folge σ_ν von Permutationen gegeben, und es sei aus derselben eine Teilfolge $\sigma_{n\nu}$ bestimmt, derart, daß jedes $\sigma_{n1}\sigma_{n\nu}^{-1}$ alle Mengen n-ter Stufe invariant läßt. (Man kann $\sigma_{0\nu} = \sigma_\nu$ setzen.) Weil es nur endlich viele Permutationen der Mengen $(n+1)$-ter Stufe gibt, muß eine von ihnen unendlich oft vorkommen; es sei $\sigma_{n+1,\nu}$ die entsprechende Teilmenge der $\sigma_{n\nu}$, so daß jedes $\sigma_{n+1,\mu}\ \sigma_{n+1,\nu}^{-1}$ alle Teilmengen $(n+1)$-ter Stufe invariant läßt. Ist nun x ein beliebiger Punkt von M, M_n die x enthaltende Menge n-ter Stufe, so beweist man leicht, daß die $\sigma_{\nu\nu}M_\nu$ genau einen Punkt x' enthalten, und daß die Transformation $x \to x'$ eine topologische ist, und zwar $= \lim \sigma_{\nu\nu}$.

TG. 52. *Jede kompakte transitive Gruppe $\mathfrak{G}$ von topologischen Transformationen einer Cantorschen Menge M bestimmt eine Messung derselben, bzgl. der die Transformationen Permutationen sind.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$. Bzgl. des Normalteilers $\mathfrak{B}_n$ zerfällt M in eine Menge von Transitivitätsbereichen M_{ni}. Jedes M_{ni} ist offenbar ganz in einem $M_{n-1,j}$ enthalten. Es sei $x \varepsilon M$ beliebig, $M_n = \mathfrak{B}_n x$ sein Transitivitätsbereich, $y \varepsilon M_n$, $\therefore \mathrm{E}\sigma\varepsilon\mathfrak{B}_n$, $\sigma x = y$. Ist weiter $y = \lim y_\nu$, so gibt es wegen der Transitivität von $\mathfrak{G}$ Transformationen $\tau_\nu \varepsilon \mathfrak{G}$ mit $\tau_\nu x = y_\nu$; wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{G}$

[10]) D.h. die Menge aller *universellen* Zahlen, die $\equiv 0(b_\nu)$ für alle ν sind.

[11]) l.c., § 4.

gibt es eine konvergente Teilfolge $\tau_\nu \to \tau$, $\therefore \tau x = y$. Weiter ist für fast alle ν $\tau_\nu \tau^{-1} \varepsilon \mathfrak{B}_n$, $\therefore \sigma_\nu = \tau_\nu \tau^{-1} \sigma \varepsilon \mathfrak{B}_n$, $\sigma_\nu x = y_\nu$, $\therefore y_\nu \varepsilon \mathfrak{B}_n x$, d.h. M_n ist *offen*. Weil dies für alle M_{ni} gilt und diese paarweise fremd (und auch abgeschlossen) sind, gibt es nur endlich viele M_{ni} bei gegebenem n. Ist $x \varepsilon M_{ni}$, $y \varepsilon M_{nj}$, $\sigma x = y$, $\sigma \varepsilon \mathfrak{G}$, so ist $\sigma M_{ni} = \sigma \mathfrak{B}_n x = \mathfrak{B}_n \sigma x = \mathfrak{B}_n y = M_{nj}$, d.h. jede Transformation von $\mathfrak{G}$ vertauscht die M_{ni} untereinander, ist also eine Permutation. Gleichzeitig folgt daraus, daß die Anzahlen der Mengen M_{ni} n-ter Stufe die in je einer Menge $(n-1)$-ter Stufe enthalten sind, gleich sind.

TG 53. *Es sei $\mathfrak{G}_\nu$ eine Folge von abzählbaren Gruppen, derart daß $\mathfrak{G}_n$ homomorphes Bild ist von $\mathfrak{G}_{n+1}$. Dann existiert eine Brouwersche Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$, derart daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n \cong \mathfrak{G}_n$ ist.* (Brouwersche Erzeugungsweise von $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$.)[11a])

Beweis. Es sei σ_n der Homomorphismus, der $\mathfrak{G}_{n+1}$ auf $\mathfrak{G}_n$ abbildet; $\sigma_n^{-1} 1 = \mathfrak{N}_{n+1}$ ist ein Normalteiler in $\mathfrak{G}_{n+1}$, $\mathfrak{G}_{n+1}/\mathfrak{N}_{n+1} \cong \mathfrak{G}_n$. Wir betrachten solche Folgen $\{x_\nu\} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, daß $x_n \varepsilon \mathfrak{G}_n$ und $\sigma_n x_{n+1} = x_n$, also $x_{n+1} \varepsilon \sigma_n^{-1} x_n$ ist. Dann ist auch $x_n^{-1} \varepsilon \mathfrak{G}_n$ und $\sigma_n x_{n+1}^{-1} = x_n^{-1}$, d.h. $\{x_\nu^{-1}\}$ ist eine ebensolche Folge. Ist $\{y_\nu\}$ eine Folge mit derselben Eigenschaft, dann ist auch $x_n y_n \varepsilon \mathfrak{G}_n$, und $\sigma_n(x_{n+1} y_{n+1}) = (\sigma_n x_{n+1})(\sigma_n y_{n+1}) = x_n y_n$, d.h. $\{x_\nu y_\nu\}$ ist eine ebensolche Folge. Es sei nun $\mathfrak{G}$ die Menge aller dieser Folgen mit dem Kompositionsgesetz $\{x_\nu\}\{y_\nu\} = \{x_\nu y_\nu\}$. Offenbar ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe. Es sei $\mathfrak{B}_n$ die Menge aller Folgen $\{x_\nu\}$, für die $x_n = 1$ (also auch $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 1$) ist. Offenbar ist $\mathfrak{B}_n$ ein Normalteiler in $\mathfrak{G}$ und ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n \cong \mathfrak{G}_n$. Topologisierung nach den Nebenklassen zu den $\mathfrak{B}_\nu$ ergibt also $\mathfrak{G}$ als die gesuchte Brouwersche Gruppe.

Bemerkung 1. Umgekehrt ist klar, daß jede Brouwersche Gruppe entsprechend diesem Satz erzeugt werden kann.

Bemerkung 2. Sind alle $\mathfrak{G}_\nu$ endlich, so wird $\mathfrak{G}$ Cantorsch.

§ 4. *Die Ordnung einer Cantorschen Gruppe.*

TG. 54. *Definition.* Eine *monothetische Gruppe*[12]) ist die Komplettierung einer zyklischen T-Gruppe.

Bemerkung. Die monothetischen Gruppen in der topologischen

[11a]) Bei Brouwer (l.c.) bewiesen für den Fall, wo die $\mathfrak{G}_\nu$ endlich sind, und demzufolge $\mathfrak{G}$ kompact (also Cantorsch) ist. L. Pontrjagin, Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième problème de Hilbert [C. R. **198** (1934), 238—240], hat diese Erzeugungsweise verallgemeinert auf den Fall, wo die $\mathfrak{G}_\nu$ *beliebige kompakte* Gruppen sind. Der Limes ist dann auch kompakt, aber i.A. natürlich nicht Cantorsch.

[12]) D. van Dantzig [2].

Algebra entsprechen den zyklischen Gruppen der gewöhnlichen Algebra.

Beispiele monothetischer Gruppen.

1. Endliche zyklische Gruppen.
2. Diskrete zyklische Gruppen.
3. Die *Kreisgruppe*, d.i. die multiplikative Gruppe aller Zahlen $e^{i\varphi}$; die Untergruppe der Zahlen $e^{ik\varrho}$ liegt dicht in $\mathfrak{G}$, falls π/ϱ irrational ist (z.B. $\varrho = 1$). (k durchläuft die ganzen rationalen Zahlen.)
4. Die *n-dimensionale Torusgruppe*, d.i. die additive Gruppe der Vektoren $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, wo die ξ_i alle reellen Zahlen modulo 1 durchlaufen. Die Untergruppe$(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n)$ liegt dicht in $\mathfrak{G}$, falls alle a_i und alle a_i/a_j für $i \neq j$ irrational sind. Für $n = 1$ erhält man die Kreisgruppe (bis auf Isomorphie).
5. Jede additive Gruppe von b_ν-adischen Zahlen (d.h. irgend ein b_ν-adischer Ring über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen).
6. Die *b_ν-adische Solenoide*[13]), d.h. die Menge aller Paare (ξ, x), wo ξ die reellen, x die b_ν-adischen Zahlen durchläuft, mit dem Kompositionsvorschrift $(\xi, x) + (\eta, y) = (\xi+\eta, x+y)$ und der Relation $(1, 0) = (0, 1)$.

TG 55. *Jede monothetische Gruppe $\mathfrak{G}$ ist Abelsch.*

Beweis. Ist x ein erzeugendes Element der überall dichten zyklischen Untergruppe, so hat jedes Element von $\mathfrak{G}$ die Gestalt $y = \lim x^{m_\nu}$. Ist $z = \lim x^{n_\nu}$ ein zweites Element, so ist $yz = \lim x^{m_\nu+n_\nu} = zy$.

TG. 56. *Jede monothetische Cantorsche Gruppe ist b_ν-adisch* (d.h. für eine gewisse Vielfachenkette b_ν isomorph mit der additiven Gruppe der b_ν-adischen Zahlen).

Beweis. Jede Untergruppe der erzeugenden zyklischen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ besteht aus allen Potenzen einer gewissen Potenz von x. Die Durchschnitte von $\mathfrak{G}_0$ mit einer die Eins definierenden Normalteilerfolge $\mathfrak{B}_\nu$ bestehen also aus den Potenzen gewisser x^{b_ν}, wo wegen $\mathfrak{B}_{n+1} \subset \mathfrak{B}_n$ auch $b_{n+1} \equiv 0(b_n)$ ist. Weil $\mathfrak{G}$ komplett ist, ergibt sich der Isomorphismus sofort.

TG 57. *Definition.* Die *Ordnung* (formale Ordnung bzw. Ordnungsideal) $\mathfrak{o}(\mathfrak{G})$ einer Cantorschen Gruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathfrak{B}_\nu)$ ist die Ordnung der durch die $\mathfrak{B}_\nu$ und ihre Nebenklassen gemessenen Cantorschen Menge $\mathfrak{G}$. (Vgl. TG. 50.) Wegen des Isomorphiesatzes TG. 45 ist $\mathfrak{o}(\mathfrak{G})$ von der Wahl der $\mathfrak{B}_\nu$ unabhängig. Der *Index* (formale Index bzw. Indexideal) $\mathfrak{i}(\mathfrak{H})$ einer abgeschlossenen

---

[13]) Vgl. l.c. [12]).

Untergruppe $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ ist die Ordnung der durch die $\mathfrak{H}\mathfrak{B}_\nu$ und ihre Nebenklassen gemessenen (rechten oder linken) Faktormenge $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$. Die *Ordnung* eines Elementes $x \varepsilon \mathfrak{G}$ ist die Ordnung der durch x erzeugten monothetischen Gruppe.

TG. 58. *Hat eine Untergruppe $\mathfrak{H}$ einer Cantorschen Gruppe $\mathfrak{G}$ im gewöhnlichen Sinne endliche Ordnung bzw. endlichen Index, so erzeugen diese das Ordnungsideal bzw. das Indexideal.* Beweis klar.

TG. 59. *Ist $\mathfrak{o}$ die Ordnung, $\mathfrak{i}$ der Index einer Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, so ist die Ordnung $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{G}$ gleich $\mathfrak{o}\mathfrak{i}$.*

Beweis. Ist o_n bzw. i_n die Ordnung bzw. der Index von $\mathfrak{H}\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_n$ bzgl. $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n$, so ist die Ordnung g_n von $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n$ gleich $o_n i_n$, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Bemerkung. $\mathfrak{i}$ ist durch $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{o}$ i.A. *nicht* eindeutig bestimmt. Insbesondere ist zwar $p^\infty : p^n = p^\infty$ für endliches n, aber $p^\infty : p^\infty$ unbestimmt.

Korollar. Die Ordnung einer Untergruppe, insbesondre also eines Elementes von $\mathfrak{G}$ ist ein Teiler der Ordnung von $\mathfrak{G}$.

TG. 60. *Ist x ein beliebiges Element einer Cantorschen Gruppe $\mathfrak{G}$, $c = \lim c_\nu$ (c_ν ganz rational) eine beliebige universelle Zahl, so gibt es in $\mathfrak{G}$ ein eindeutig bestimmtes Element $x^c = \lim x^{c_\nu}$.*

Beweis. Ist g_n die Ordnung von $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n$, so ist sicher $x^{g_n} \varepsilon \mathfrak{B}_n$ für jedes $x \varepsilon \mathfrak{G}$. Ist nun $c_{\nu+1} - c_\nu \equiv 0(g_\nu)$ (was man immer wegen TR. 29 (II, [5] 205) ohne Beschränkung annehmen kann), so ist $x^{c_{\nu+1}}(x^{c_\nu})^{-1} = x^{g_\nu k_\nu} \varepsilon \mathfrak{B}_\nu$, d.h. die Folge x^{c_ν} ist eine Fundamentalfolge und definiert eindeutig ein Element $x^c \varepsilon \mathfrak{G}$.

Bemerkung 1. Offenbar ist x^c unabhängig von der Wahl der c approximierenden Folge c_ν. Weiter ist $x^{c+d} = x^c \cdot x^d$, $x^{c \cdot d} = (x^c)^d = (x^d)^c$.

Bemerkung 2. Ist x mit y vertauschbar, so ist $x^c \cdot y^c = y^c \cdot x^c = (xy)^c$.

TG. 61. *Ist x ein beliebiges Element einer Cantorschen Gruppe $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{c}$ ein Ideal in $\mathfrak{J}$*[13a]*, so ist $x^{\mathfrak{c}} = \{x^c\}$ eine Abelsche Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Es ist $x^{\mathfrak{c}_1} \cdot x^{\mathfrak{c}_2} = x^{\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2}$, $(x^{\mathfrak{c}_1})^{\mathfrak{c}_2} = x^{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2}$, $x^{\mathfrak{c}} y^{\mathfrak{c}} = (xy)^{\mathfrak{c}}$, letzteres falls x und y vertauschbar sind.*

Die Beweise sind klar. Zu beachten ist, daß $x^{\mathfrak{c}_1} . x^{\mathfrak{c}_2} = (x^{\mathfrak{c}_1}, x^{\mathfrak{c}_2})$ im gruppentheoretischen Sinne (das Kompositum der beiden Gruppen), $\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{c}_2 = (\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ im idealtheoretischen Sinne (das KGV der beiden Ideale) zu verstehen ist.

TG. 62. *x^c hängt gleichmäßig stetig von $x \varepsilon \mathfrak{G}$ und $c \varepsilon \mathfrak{J}$ ab.*

Beweis. Zu beweisen ist, daß aus $c - d \equiv 0(\nu!)$, $xy^{-1} \varepsilon \mathfrak{B}_\mu$, $\nu \geqq \nu_n$,

[13a]) $\mathfrak{J}$ ist der Ring der (ganzen rationalen) universellen Zahlen.

$\mu \geqq \mu_n$ folgt: $x^c y^{-d} \varepsilon \mathfrak{B}_n$. Wir setzen $\mu_n = n$ und $\nu_n = g_n$. Dann ist $x^c . y^{-d} = x^{c-d} . x^d y^{-d}$. Der erste Faktor ist eine Potenz von $x^{\nu!}$, also wegen $\nu! \equiv 0\,(\nu_n!) = (g_n!) \equiv 0\,(g_n)$ auch von x^{g_n}, liegt also in $\mathfrak{B}_n$. Weil $\mathfrak{B}_n$ Normalteiler ist, folgt aus $xy^{-1} \varepsilon \mathfrak{B}_n$ für jedes ganze rationale k $x^k y^{-k} \varepsilon \mathfrak{B}_n$, also, weil $\mathfrak{B}_n$ abgeschlossen ist, auch für $d = \lim k_\nu$ $x^d y^{-d} \varepsilon \mathfrak{B}_n$. Also ist $x^c y^{-d} \varepsilon \mathfrak{B}_n^2 = \mathfrak{B}_n$.

§ 5. *Abelsche Cantorsche Gruppen.*

TG. 63. *Definition.* Eine Cantorsche Gruppe heißt *primoid*, falls ihr Ordnungsideal primär ist, also ihre formale Ordnung eine endliche oder unendliche Potenz einer Primzahl ist.

TG. 64. *Definition.* Die *Charakteristik* $\chi(\mathfrak{G})$ einer Cantorschen Gruppe ist der GGT aller Ideale $\mathfrak{a}$ (im Ring $\mathfrak{J}$ der universellen Zahlen) für welche $x^{\mathfrak{a}} = 1$ für alle $x \varepsilon \mathfrak{G}$ ist.

TG. 65. *Die Charakteristik einer Gruppe ist ein Teiler ihrer Ordnung.*

Beweis. Ist $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}(\mathfrak{G})$, so ist wegen TG. 59 $x^{\mathfrak{o}} = 1$ für alle $x \varepsilon \mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{o} \equiv (0)\ (\chi(\mathfrak{G}))$.

Bemerkung. Der Satz folgt wegen TG. 59 (Korollar) auch aus: Die Charakteristik einer Gruppe ist das KGV der Ordnungen ihrer Elemente.

TG. 66. *Ist χ_n die Charakteristik von $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n$, so ist $\chi(\mathfrak{G}) = [(\chi_\nu)]$.*

Beweis. Wegen $1 \varepsilon \mathfrak{B}_\nu$ ist $\chi(\mathfrak{G}) \equiv 0\ ([\chi_\nu])$ trivial. Es sei also $a \equiv 0\ ([\chi_\nu])$, $a \varepsilon \mathfrak{J}$. Dann ist für alle $x \varepsilon \mathfrak{G}$ und alle n $x^a \varepsilon \mathfrak{B}_n$, also $x^a = 1$. Also ist $a \equiv 0\ (\chi(\mathfrak{G}))$.

TG. 67. *Definition.* Eine T-Gruppe heißt *direktes Produkt* von den (endlich oder abzählbar vielen) Untergruppen $\overset{1}{\mathfrak{G}}, \overset{2}{\mathfrak{G}}, \ldots$, falls jedes Element $x \varepsilon \mathfrak{G}$ in einer und nur einer Weise als ein Produkt $x = \overset{1}{x}\overset{2}{x} \cdots$ (d.h., falls die Anzahl der $\overset{r}{\mathfrak{G}}$ unendlich ist, $x = \lim\limits_{\nu \to \infty} \overset{1}{x} \cdots \overset{\nu}{x}$) von Elementen $\overset{r}{x} \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$ geschrieben werden kann, und zwar so, daß sämtliche $\overset{r}{x}$ (bei gegebenem x) mit einander vertauschbar sind, und daß die $\overset{r}{x}$ für jedes r stetig von x abhängen (d.h. es ist $\overset{r}{x} = \lim \overset{r}{x}_\nu$, falls $x = \lim x_\nu$ ist).

Bemerkung 1. Daraus folgt, daß alle $\overset{r}{\mathfrak{G}}$ elementweise mit einander vertauschbar sind. Denn sind $y \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$, $z \varepsilon \overset{s}{\mathfrak{G}}$ $(r \neq s)$ beliebig gewählt, so muß wegen der Eindeutigkeit der Faktorzerlegung von $x = yz$ $\overset{r}{x} = y$, $\overset{s}{x} = z$, also y und z vertauschbar sein.

Bemerkung 2. Jedes $\overset{r}{\mathfrak{G}}$ ist abgeschlossen. Denn ist $x = \lim x_\nu$, $x_\nu \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$, also $x_\nu = \overset{r}{x}_\nu$, so ist für alle $s \neq r$ $\overset{s}{x} = \lim \overset{s}{x}_\nu = 1$, also $x = \overset{r}{x} \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$.

TG. 68. *Ist* $\widehat{\mathfrak{G}} = \widehat{\prod} \overset{r}{\mathfrak{G}}$ [14]) *das Produkt von irgendeiner Teilmenge der* $\overset{r}{\mathfrak{G}}$, $\breve{\mathfrak{G}} = \breve{\prod} \overset{s}{\mathfrak{G}}$ *das Produkt aller anderen, so ist* $\mathfrak{G}$ *direktes Produkt von* $\widehat{\mathfrak{G}}$ *und* $\breve{\mathfrak{G}}$.

Beweis. Ist $\widehat{\prod} \overset{r}{x} = \widehat{x}$, $\breve{\prod} \overset{s}{x} = \breve{x}$, so ist wegen der Vertauschbarkeit aller $\overset{r}{x}$ für jedes $x \varepsilon \mathfrak{G}$ $x = \widehat{x}\breve{x}$. Ist weiter $x = \widehat{y}\breve{z}$, $\widehat{y} = \widehat{\prod} \overset{r}{y}$, $\breve{z} = \breve{\prod} \overset{s}{z}$, so ist wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung von $x = \widehat{\prod} \overset{r}{x} . \breve{\prod} \overset{s}{x} = \widehat{\prod} \overset{r}{y} . \breve{\prod} \overset{s}{z}$ $\overset{r}{y} = \overset{r}{x}$, $\overset{s}{z} = \overset{s}{x}$ für alle r bzw. s. Also ist die Darstellung eindeutig. Auch folgt sofort die Abgeschlossenheit von $\widehat{\mathfrak{G}}$ und $\breve{\mathfrak{G}}$.

Bemerkung. Entsprechend beweist man, daß $\mathfrak{G}$ direktes Produkt aller $\overset{\varrho}{\mathfrak{G}}'$ ist, wenn jedes $\overset{\varrho}{\mathfrak{G}}'$ Produkt von irgend einer Teilmenge der $\overset{r}{\mathfrak{G}}$ ist, und diese Teilmengen paarweise fremd sind und zusammen alle $\overset{r}{\mathfrak{G}}$ enthalten.

TG. 69. *Jede Abelsche Cantorsche Gruppe ist direktes Produkt von primoiden Gruppen.*

Beweis. Es seien $\underset{r}{e}$ die Einheiten im Ring $\mathfrak{J}$ der universellen Zahlen[14a]), $1 = \sum_r \underset{r}{e}$. Dann ist für jedes $x \varepsilon \mathfrak{G}$ $x = \prod \overset{r}{x}$, wo $\overset{r}{x} = x^{\overset{e}{r}}$ ist (vgl. TG. 60). Die $\overset{r}{x}$ bilden für jedes r eine Gruppe $\overset{r}{\mathfrak{G}}$. Denn ist $x \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$, $y \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$, $\therefore x = u^{\overset{e}{r}}$, $y = v^{\overset{e}{r}}$, so ist $x^{-1} = u^{-\overset{e}{r}} = (u^{-1})^{\overset{e}{r}}$, $xy = (uv)^{\overset{e}{r}}$, $\therefore x^{-1} \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$, $xy \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$. Ist weiter $x_\nu \to x$, $\therefore x x_\nu^{-1} \varepsilon \mathfrak{B}_n$ $(\nu \geqq \nu_n)$, so ist $\overset{r}{x}\overset{r}{x}_\nu^{-1} = (x x_\nu^{-1})^{\overset{e}{r}} \varepsilon \mathfrak{B}_n$, $\therefore \overset{r}{x}_\nu \to \overset{r}{x}$. (vgl. TG. 62). Ist schließlich $x = \prod x_r$, $x_r \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$, $\therefore x_r = y_r^{\overset{e}{r}}$, so ist $\overset{r}{x}^{\overset{e}{r}} = \prod x_s^{\overset{e}{r}} = \prod y_s^{\overset{e}{s}\overset{e}{r}} = (\prod_{s \neq r} y_s^0) y_r^{\overset{e}{r}} = x_r$, $\therefore \overset{r}{x} = x_r$, also ist die Zerlegung eindeutig, folglich direkt.

Bemerkung 1. Die direkten Faktoren $\overset{r}{\mathfrak{G}}$ sind offenbar (ev. bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt.

---

[14]) Mit $\widehat{\Sigma}$ bzw. $\widehat{\prod}$ bezeichnen wir Summen bzw. Produkte über irgend eine wohlbestimmte Teilmenge der r, mit $\breve{\Sigma}$ bzw. $\breve{\prod}$ Summen bzw. Produkte über *alle* anderen r.

[14a]) Vgl. II, 213.

Bemerkung 2. $\overset{r}{\mathfrak{G}}$ kann auch definiert werden als die Gruppe aller Elemente, deren Ordnung ein Teiler von $\overset{r}{\mathfrak{z}} = (p_r^\infty)$ [15]) ist. In der Tat, ist $x \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$, so ist $x = \overset{e}{y}{}^r$, $\therefore\ x^{\overset{r}{\mathfrak{z}}} = y^{\overset{r}{\mathfrak{z}}\overset{e}{r}} = y^0 = 1$ (vgl. TG. 61); ist $x^{\overset{r}{\mathfrak{z}}} = 1$, so ist $x^{\overset{e}{s}} = 1 \quad (s \neq r)$, $\therefore\ x = \overset{r}{x} \varepsilon \overset{r}{\mathfrak{G}}$.

§ 6. *Zerlegung einer Cantorschen Gruppe in Sylowklassen.*

TG. 70. *Definition.* Eine *Sylow-Untergruppe* einer Cantorschen Gruppe ist eine primoide Untergruppe, deren Index zu ihrer Ordnung teilerfremd ist. Eine *Sylowklasse* von der Ordnung $\mathfrak{q} = (p^{\mathfrak{a}}) \quad (1 \leqq \mathfrak{a} \leqq \infty)$ ist die Menge aller Elemente, deren Ordnung ein Teiler von $\mathfrak{q}$ ist.

TG. 71. *Ist* $\mathfrak{q}$ *einer der größten primären Faktoren der Ordnung* $\mathfrak{g}$ *einer Cantorschen Gruppe* $\mathfrak{G}$, *so enthält* $\mathfrak{G}$ *eine Sylow-Untergruppe* $\mathfrak{H}$ *von der Ordnung* $\mathfrak{q}$.

Beweis. Es sei $q_n = p^{k_n} = [\mathfrak{q}, g_n]$ die höchste in g_n aufgehende Potenz der zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Primzahl p. Dann enthält bekanntlich die endliche Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n$ eine Sylow-Untergruppe $\mathfrak{S}_n$ von der Ordnung q_n. Setzt man $\mathfrak{H}_{0n} = \mathfrak{S}_n \mathfrak{B}_n$, so ist $\mathfrak{H}_{0n}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Index $r_n = g_n/q_n \not\equiv 0(p)$ und von der Ordnung $p^{k_n} \,.\, \mathfrak{o}(\mathfrak{B}_n)$. Für alle $k \leqq n$ ist dann der Index von $\mathfrak{H}_{0n}\mathfrak{B}_k/\mathfrak{B}_k$ ein Teiler von r_n, also $\not\equiv 0(p)$; folglich ist auch $\mathfrak{H}_{0n}\mathfrak{B}_k/\mathfrak{B}_k$ eine Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_k$.

Es seien nun die Gruppen $\mathfrak{H}_{n-1,\nu}$ als Teilfolge der Folge $\mathfrak{H}_{0\nu}$ schon definiert. Darunter kommen modulo $\mathfrak{B}_n$ nur endlich viele verschiedene vor (weil $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n$ endlich ist). Eine derselben muß also unendlich oft vorkommen; die entsprechende Teilfolge der $\mathfrak{H}_{n-1,\nu}$ sei $\mathfrak{H}_{n\nu}$, so daß $\mathfrak{H}_{n\nu}\mathfrak{B}_n = \mathfrak{H}_{n,1}\mathfrak{B}_n$ ist. Also ist für jedes n und alle $\nu \geqq n$ $\mathfrak{H}_{\nu 1}\mathfrak{B}_n = \mathfrak{H}_{n1}\mathfrak{B}_n$. Setzt man nun $\mathfrak{H} = \mathfrak{D}(\mathfrak{H}_{\nu 1}\mathfrak{B}_\nu)$, so ist für alle n auch $\mathfrak{H}\mathfrak{B}_n = \mathfrak{H}_{n1}\mathfrak{B}_n$, $\therefore\ \mathfrak{H}\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_n = \mathfrak{H}_{n1}\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_n$, $\therefore\ o(\mathfrak{H}\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_n) = q_n$, $i(\mathfrak{H}\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_n) = r_n$. Folglich ist $\mathfrak{o}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{q} = \lim(q_\nu)$, $\mathfrak{i}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{q} = \mathfrak{r} = \lim(r_\nu)$, d.h. $\mathfrak{H}$ ist Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{G}$.

TG. 72. *Je zwei Sylow-Untergruppen von* $\mathfrak{G}$ *von gleicher Ordnung sind konjugiert.*

Beweis. Sind $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zwei Sylow-Untergruppen von der Ordnung $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{G}$, so sind für jedes n $\mathfrak{H}_1\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{H}_2\mathfrak{B}_n/\mathfrak{B}_n$ Sylow-Untergruppen von der Ordnung q_n von $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_n$. Folglich sind sie konjugiert, d.h. es gibt ein $x_n \varepsilon \mathfrak{G}$ mit $x_n \mathfrak{H}_1 x_n^{-1} \subset \mathfrak{H}_2\mathfrak{B}_n$.

---

[15]) Die $\overset{r}{\mathfrak{z}}$ sind die größten primären Komponenten der Null in $\mathfrak{Z}$. Vgl. II, § 6.

Unter den x_ν muß, weil $\mathfrak{G}$ kompakt ist, eine konvergente Teilfolge $x_{n_\nu} \to x$ vorkommen. Ist (was man durch Übergang auf eine Teilfolge immer erreichen kann) $x x_{n_\nu}^{-1} \varepsilon \mathfrak{B}_{n_\nu}$, so ist also

$$x \mathfrak{H}_1 x^{-1} = (x x_{n_\nu}^{-1})(x_{n_\nu} \mathfrak{H}_1 x_{n_\nu}^{-1})(x x_{n_\nu}^{-1})^{-1} \subset \mathfrak{B}_{n_\nu} \cdot \mathfrak{H}_2 \mathfrak{B}_{n_\nu} \cdot \mathfrak{B}_{n_\nu}^{-1} = \mathfrak{H}_2 \mathfrak{B}_{n_\nu}.$$

Weil dies für alle ν gilt, muß $x \mathfrak{H}_1 x^{-1} \subset \mathfrak{H}_2$ sein. Ebenso ist $\mathfrak{H}_1 \supset y \mathfrak{H}_2 y^{-1}$, also für $z = yx$: $\mathfrak{H}_1 \supset z \mathfrak{H}_1 z^{-1}$. Folglich ist für jede natürliche, also auch für jede universelle Zahl k $\mathfrak{H}_1 \supset z^k \mathfrak{H}_1 z^{-k}$. Insbesondre für $k = -1 = \lim (\nu! - 1)$: $\mathfrak{H}_1 \supset z^{-1} \mathfrak{H}_1 z$. Also $\mathfrak{H}_1 = z \mathfrak{H}_1 z^{-1}$, $\therefore x \mathfrak{H}_1 x^{-1} = y^{-1} \mathfrak{H}_1 y = \mathfrak{H}_2$.

Bemerkung. Daß umgekehrt jede mit einer Sylow-Untergruppe konjugierte Untergruppe selbst eine Sylow-Untergruppe von derselben Ordnung ist, wird ebenso bewiesen.

TG. 73. *Jede primoide Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist in einer Sylow-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ enthalten.*

Beweis. Ist $\mathfrak{K}$ eine primoide Untergruppe von $\mathfrak{G}$, deren Ordnung $\mathfrak{q}'$ ein Teiler des größten primären Faktors $\mathfrak{q} = (p^\alpha)$ von der Ordnung von $\mathfrak{G}$ ist, so ist für jedes n die Ordnung von $\mathfrak{K}_n = \mathfrak{K}\mathfrak{B}_n / \mathfrak{B}_n$ eine Potenz von p. Wegen der Gültigkeit des Satzes für endliche Gruppen ist $\mathfrak{K}_n$ in einer Sylow-Untergruppe $\mathfrak{H}_n$ enthalten. Genau wie beim Beweise von TG. 72 kann man nun durch Übergang auf eine Teilfolge erreichen, daß $\mathfrak{H}_{n_\nu} \mathfrak{B}_{n_\nu} \subset \mathfrak{H}_{n_{\nu+1}} \mathfrak{B}_{n_{\nu+1}}$ ist, woraus unmittelbar folgt, daß $\mathfrak{H} = \mathfrak{S}(\mathfrak{H}_{n_\nu} \mathfrak{B}_{n_\nu})$ eine $\mathfrak{K}$ enthaltende Sylow-Untergruppe ist.

Bemerkung. Aus diesem Satz folgt, daß jedes Element, dessen Ordnung ein Teiler von $\mathfrak{q}$ ist, und sonst keines, in einer Sylow-Untergruppe von der Ordnung $\mathfrak{q}$ enthalten ist. Die Sylowklasse von der Ordnung $\mathfrak{q}$ kann daher auch definiert werden als die Vereinigung aller Sylow-Untergruppen von der Ordnung $\mathfrak{q}$. Sie enthält offenbar zu jedem Element seine Klasse (d.i. die Menge aller mit ihm konjugierten Elemente).

TG. 74. *Definition.* Eine T-Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *quasi-direktes Produkt* ihrer (endlich oder unendlich vielen) Teilmengen $\overset{1}{M}, \overset{2}{M}, \ldots$, wenn jedes Element $x \varepsilon \mathfrak{G}$ in ein (endliches oder konvergent unendliches) Produkt

$$x = \overset{1}{x}\,\overset{2}{x}\,\overset{3}{x} \cdots$$

zerlegt werden kann, derart, daß 1. $\overset{r}{x} \varepsilon \overset{r}{M}$ ist, 2. alle Faktoren $\overset{r}{x}$ von x untereinander (und mit x) vertauschbar sind, 3. die $\overset{r}{x}$ durch x eindeutig bestimmt sind, 4. die $\overset{r}{x}$ stetig von x abhängen

(d.h. $x_\nu \to x \Longrightarrow \overset{r}{x}_\nu \to \overset{r}{x}$), 5. jedes $\overset{r}{M}$ die Eins und zu jedem a auch a^{-1} und xax^{-1} für alle $x \varepsilon \mathfrak{G}$ enthält.

Bemerkung 1. Unter Weglassung von 4. kann man den entsprechenden Begriff offenbar auch für nicht-topologisierte Gruppen bilden.

Bemerkung 2. Aus 5. und 3. folgt, daß alle Komponenten der Eins gleich Eins, die r-te Komponente von x^{-1} gleich $\overset{r}{x}{}^{-1}$ und die r-te Komponente von yxy^{-1} gleich $y\overset{r}{x}y^{-1}$ ist.

Bemerkung 3. Wird 5. verschärft durch die Forderung, daß jedes $\overset{r}{M}$ zu x und y immer auch xy enthalten soll, so werden die $\overset{r}{M}$ Gruppen und zwar Normalteiler in $\mathfrak{G}$, und die quasidirekte Zerlegung geht in eine direkte über.

TG. 75. *Jede Cantorsche Gruppe ist quasidirektes Produkt ihrer Sylowklassen.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{o}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{g} = \overset{1}{\mathfrak{q}}\overset{2}{\mathfrak{q}} \cdots$ die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in größte primäre Faktoren, $\overset{r}{K}$ die Sylowklasse von der Ordnung $\overset{r}{\mathfrak{q}}$, $1 = \sum \underset{r}{e}$ die Zerlegung der Eins im Ring $\mathfrak{J}$ der universellen Zahlen, x ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{c} = \overset{1}{\mathfrak{c}}\overset{2}{\mathfrak{c}} \cdots$ seine (in größte primäre Faktoren zerlegte) Ordnung. Setzt man

$$\overset{r}{x} = x^{\overset{e}{r}},$$

so sind alle $\overset{r}{x}$ Elemente der durch x erzeugten monothetischen Gruppe, also untereinander vertauschbar. Weiter ist wegen $\underset{r}{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}\underset{r}{e}$, $\overset{r}{\mathfrak{c}} = \underset{r}{\mathfrak{c}} + \overset{r}{\mathfrak{z}}$, $\underset{r}{e}\overset{r}{\mathfrak{c}} = \underset{r}{\mathfrak{c}} \equiv 0(\mathfrak{c})$ und $x^{\mathfrak{c}} = 1$:

$$\overset{r}{x}{}^{\overset{r}{\mathfrak{c}}} = x^{\overset{e}{r}\overset{r}{\mathfrak{c}}} = x^{\mathfrak{c}\underset{r}{e}} = 1,$$

d.h. $\mathfrak{o}(\overset{r}{x})$ ist ein Teiler von $\overset{r}{\mathfrak{c}}$, also auch von $\overset{r}{\mathfrak{q}}$. Also ist $\overset{r}{x}$ wegen TG. 73 in einer Sylow-Untergruppe von der Ordnung $\overset{r}{\mathfrak{q}}$, also auch in $\overset{r}{K}$ enthalten. Ist weiter $x = y_1 y_2 \cdots$ irgendeine zweite Zerlegung mit $y_r \varepsilon \overset{r}{K}$, für die alle y_r untereinander vertauschbar sind, so sind sie auch mit x, folglich auch mit allen $\overset{r}{x}$ (die ja Potenzen von x sind) vertauschbar. Es ist also $\prod\limits_{\varrho=1}^{\infty}(\overset{\varrho}{x}\, y_\varrho^{-1}) = 1$. Wegen der Vertauschbarkeit aller Faktoren ist also $\{\prod(\overset{\varrho}{x} y_\varrho^{-1})\}^{\overset{e}{r}} = \prod(\overset{\varrho}{x}{}^{\overset{e}{r}} y_\varrho^{-\underset{r}{e}}) = 1$. Wegen $\underset{s\,r}{ee} = 0$ für $s \neq r$ ist auch $\overset{s}{x}{}^{\overset{e}{r}} = x^{\overset{e}{s}\overset{e}{r}} = 1$. Wegen $\underset{r}{e} = \underset{r}{e}^{\overset{s}{\mathfrak{z}}} \equiv$

$\equiv 0(\overset{s}{\mathfrak{z}}) \equiv 0(\overset{s}{\mathfrak{q}})$ und wegen $y_s \varepsilon \overset{s}{K}$, d.h. $y_s^{\overset{s}{\mathfrak{q}}} = 1$, ist auch $y_s^{\overset{-e}{r}} = 1$, also auch $\prod_{s \neq r} (\overset{s}{x}{}^{\overset{e}{r}} y_s^{\overset{-e}{r}}) = 1$. Folglich ist auch $\overset{r}{x}{}^{\overset{e}{r}} y_r^{\overset{-e}{r}} = 1$, d.h. $y_r^{\overset{e}{r}} = \overset{r}{x}{}^{\overset{e}{r}} = \overset{r}{x}$. Es ist aber $y_r = y_r^{\overset{e+z}{r}} = y_r^{\overset{e}{r}}$, also $y_r = \overset{r}{x}$, d.h. die Zerlegung ist eindeutig. Die Stetigkeit der Faktoren folgt sofort aus ihrer Definition und aus TG. 62, während die anderen Bedingungen in trivialer Weise erfüllt sind.

Bemerkung 1. Anstatt der $\overset{e}{r}$ kann man zur Bildung der $\overset{r}{x}$ ebensogut die Summanden der Eins *im Restklassenring* $\mathfrak{J}/\mathfrak{g}$ verwenden. Tut man dies, so benutzt der obige Beweis im Falle, wo $\mathfrak{G}$ eine *endliche* Gruppe ist (in welchem Falle er natürlich auch gültig bleibt) [16]) keinerlei transzendente Hilfsmittel, insofern man die Ideale nur im Ring der ganzen rationalen (anstatt der universellen) Zahlen betrachtet.

Bemerkung 2. Falls $\mathfrak{G}$ kommutativ ist, geht der Satz in den spezielleren TG. 69 über.

(Eingegangen den 18. Oktober 1934.)

[16]) In diesem Falle ist der Satz bloß eine neue Formulierung bekannter Tatsachen. Vgl. z.B. Speiser [1], 2. Aufl. (1927), Satz 4, 8, 67, 68, 69.