COMPOSITIO MATHEMATICA

G. H. A. GROSHEIDE F. WZN.

Über Differentialoperatoren, Minimalpolynome und Differentialgleichungen

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 373-379

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__373_0>

Über Differentialoperatoren, Minimalpolynome und Differentialgleichungen

von

G. H. A. Grosheide F.Wzn.

Amsterdam

Wir definieren den Differentialoperator A als

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

wobei die Koeffizienten a_i willkürliche Funktionen der $n(\geqq 1)$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind, und bilden Polynome von der Gestalt

$$P(A) = (A-\varrho_1)^{\alpha_1}(A-\varrho_2)^{\alpha_2} \ldots (A-\varrho_\lambda)^{\alpha_\lambda}$$

$$(\varrho_i \neq \varrho_k \text{ für } i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

Auch wo es nicht nachdrücklich gesagt wird, haben die Potenzexponenten (α, β) nur ganze positive Werte, während die auftretenden Konstanten (ϱ) willkürlich gewählt werden können.

Wir werden uns beschäftigen mit Funktionen und Produkten von Funktionen der n Veränderlichen, welche Differentialgleichungen vom Typus $P(A)(y) = 0$ genügen. Dabei beschränken wir uns auf algebraische Betrachtungen und setzen also voraus, daß es möglich ist, bei allen auftretenden Differentialgleichungen eine Lösung $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ anzugeben.

§ 1. Satz 1: *Gibt es zu einer gegebenen Funktion y ein Polynom P in A von der Art, daß y der Differentialgleichung $P(A)(y) = 0$ genügt, so kann man λ Funktionen $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(\lambda)}$ finden mit der Eigenschaft, daß*

$$y = y^{(1)} + y^{(2)} + \ldots + y^{(\lambda)} \tag{1}$$

und

$$(A-\varrho_i)^{\alpha_i}(y^{(i)}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda). \tag{2}$$

Beweis: Wir nennen m den Grad von P; mit andern Worten

$$m = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\lambda.$$

Es ist jetzt möglich [1]), λ Polynome $(m-1)$-ten Grades $P^{(1)}$, $P^{(2)}, \ldots, P^{(\lambda)}$ in A zu bilden, die folgenden drei Anforderungen genügen:

$$P^{(1)} + P^{(2)} + \ldots + P^{(\lambda)} = 1, \tag{3}$$

$$P^{(i)} \text{ ist teilbar durch } \frac{P}{(A-\varrho_i)^{\alpha_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda), \tag{4}$$

$$P^{(i)} - 1 \text{ ist teilbar durch } (A-\varrho_i)^{\alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda). \tag{5}$$

Wegen (3) ist sofort die Bedingung (1) erfüllt für die Funktionen

$$y^{(i)} = P^{(i)}(A)(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda), \tag{6}$$

während aus $P(A)(y) = 0$ und (4) sich die Eigenschaft (2) ergibt.

Sobald eine Funktion y Lösung ist von einer Differentialgleichung $P(A)(y) = 0$, genügt sie unendlich vielen. Unter denen befindet sich eine mit kleinster Ordnung, deren zugefügtes Polynom $P(A)$, das sogenannte „Minimalpolynom von y", ein Teiler jedes anderen der von y bestimmten Polynome ist [2]). Falls $P(A)$ das Minimalpolynom von y ist, haben die durch (6) eingeführten Funktionen $y^{(i)}$ als Minimalpolynome $(A-\varrho_i)^{\alpha_i}$. Denn der eben zitierte Satz gibt zusammen mit (2) als Gestalt der gesuchten Ausdrücke

$$(A-\varrho_i)^{\beta_i} \qquad (\beta_i \leqq \alpha_i;\ i = 1, 2, \ldots, \lambda),$$

aber $\beta_i < \alpha_i$ fällt weg, weil dann aus

$$(A-\varrho_i)^{\beta_i}(y^{(i)}) = (A-\varrho_i)^{\beta_i} P^{(i)}(A)(y) = 0$$

folgen würde, daß $P^{(i)}$ durch $(A-\varrho_i)^{\alpha_i-\beta_i}$ teilbar war, während (5) die Unmöglichkeit davon zeigt.

§ 2. Wir beweisen zuerst eine Erweiterung der Formel von Leibniz für die n-te Ableitung eines Produktes.

Hilfssatz 1: *Sind y_1 und y_2 willkürliche Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und ϱ_1 und ϱ_2 zwei willkürliche Konstante, so gilt für jeden ganzen positiven Wert von n die Formel*

$$(A-\varrho_1-\varrho_2)^n(y_1 y_2) = y_1 \cdot (A-\varrho_2)^n(y_2) + y_2 \cdot (A-\varrho_1)^n(y_1) + \\ + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} (A-\varrho_1)^i(y_1) \cdot (A-\varrho_2)^{n-i}(y_2).$$

---

[1]) G. Frobenius, Über vertauschbare Matrizen [Sitzungsber. Akad. Berlin 1896_{I}, 608—609, § 3]. J. Wellstein, Über die Frobeniusschen Kovarianten einer Bilinearform [Archiv f. Math. und Phys. (3) 5 (1901), 232—233, § 3].

[2]) Vgl. R. Weitzenböck, Über die Invarianten von linearen Gruppen [Acta math. 58 (1932), 248—250, § 6].

Beweis: Für $n=2$ ist der Satz leicht direkt zu beweisen; die Gültigkeit für $n=l$ folgt aus der Richtigkeit für $n=l-1$.

Hilfssatz 2: *Erfüllen die Funktionen y_1 und y_2 die Bedingungen*

$$(A-\varrho_k)^{\alpha_k}(y_k)=0 \qquad (k=1,2),$$

so genügt das Produkt $z=y_1y_2$ der Differentialgleichung

$$(A-\varrho_1-\varrho_2)^{\alpha_1+\alpha_2-1}(z)=0.$$

Beweis: Nach Hilfssatz 1 ist

$$\begin{aligned}(A-\varrho_1-\varrho_2)^{\alpha_1+\alpha_2-1}(z) &= \\ &= y_1\cdot(A-\varrho_2)^{\alpha_1+\alpha_2-1}(y_2)+y_2\cdot(A-\varrho_1)^{\alpha_1+\alpha_2-1}(y_1)+ \\ &+\sum_{i=1}^{\alpha_1+\alpha_2-2}\binom{\alpha_1+\alpha_2-1}{i}(A-\varrho_1)^i(y_1)\cdot(A-\varrho_2)^{\alpha_1+\alpha_2-i-1}(y_2).\end{aligned}$$

Wegen der zwei gegebenen Bedingungen ist für $\alpha_1\leqq j\leqq\alpha_1+\alpha_2-1$ $(A-\varrho_1)^j(y_1)=0$ und für $0\leqq j\leqq\alpha_1-1$ oder

$$\alpha_2\leqq\alpha_1+\alpha_2-j-1\leqq\alpha_1+\alpha_2-1 \qquad (A-\varrho_2)^{\alpha_1+\alpha_2-j-1}(y_2)=0.$$

Demnach verschwinden alle Glieder der rechten Seite und ist also auch die linke Seite $=0$.

Hilfssatz 3: *Erfüllen die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ die Bedingungen*

$$(A-\varrho_k)^{\alpha_k}(y_k)=0 \qquad (k=1,2,\ldots,\nu),$$

so genügt das Produkt $z=y_1y_2\ldots y_\nu$ der Differentialgleichung

$$(A-\varrho_1-\varrho_2+\ldots-\varrho_\nu)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu-\nu+1}(z)=0.$$

Beweis: Hilfssatz 2 zeigt sofort, daß der Satz für $\nu=2$ richtig ist. Nehmen wir jetzt an, er sei bewiesen für $\nu=\mu-1$ und ersetzen wir $y_1y_2\ldots y_{\mu-1}$ durch z_1, so gilt

$$(A-\varrho_1-\varrho_2+\ldots-\varrho_{\mu-1})^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}-\mu+2}(z_1)=0$$

und folgt aus wiederholter Anwendung des vorigen Hilfssatzes auf das Produkt der zwei Faktoren y_μ und z_1 das erwünschte Resultat für $\nu=\mu$.

Hilfssatz 4: *Das Produkt z der Funktionen y_1 und y_2 mit den Minimalpolynomen $(A-\varrho_1)^{\alpha_1}$ und $(A-\varrho_2)^{\alpha_2}$ hat zum Minimalpolynom*

$$(A-\varrho_1-\varrho_2)^{\alpha_1+\alpha_2-1}.$$

Beweis: Da nach Hilfssatz 2 z eine Lösung der Differentialgleichung $(A-\varrho_1-\varrho_2)^{\alpha_1+\alpha_2-1}(z)=0$ ist, ist das gesuchte Polynom von der Gestalt

$$(A-\varrho_1-\varrho_2)^{\beta} \qquad (\beta \leqq \alpha_1+\alpha_2-1).$$

Nun ist $\beta < \alpha_1+\alpha_2-1$ ausgeschlossen, weil dann gelten würde

$$\begin{aligned}(A-\varrho_1-\varrho_2)^{\alpha_1+\alpha_2-2}(z) &= \\ &= y_1\cdot(A-\varrho_2)^{\alpha_1+\alpha_2-2}(y_2)+y_2\cdot(A-\varrho_1)^{\alpha_1+\alpha_2-2}(y_1)+ \\ &+\sum_{k=1}^{\alpha_1+\alpha_2-3}\binom{\alpha_1+\alpha_2-2}{k}(A-\varrho_1)^k(y_1)\cdot(A-\varrho_2)^{\alpha_1+\alpha_2-k-2}(y_2)=0\end{aligned}$$

oder in Zusammenhang mit den gemachten Voraussetzungen

$$\binom{\alpha_1+\alpha_2-2}{\alpha_1-1}(A-\varrho_1)^{\alpha_1-1}(y_1)\cdot(A-\varrho_2)^{\alpha_2-1}(y_2)=0.$$

Dieses ist aber absurd, weil aus der Tatsache, daß y_1 und y_2 $(A-\varrho_1)^{\alpha_1}$ und $(A-\varrho_2)^{\alpha_2}$ zu Minimalpolynomen haben, hervorgeht, daß keiner der Faktoren des letzten Produktes $=0$ ist.

Satz 2: *Das Produkt z der Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ mit den Minimalpolynomen $(A-\varrho_1)^{\alpha_1}, (A-\varrho_2)^{\alpha_2}, \ldots, (A-\varrho_\nu)^{\alpha_\nu}$ hat zum Minimalpolynom*

$$(A-\varrho_1-\varrho_2+\ldots-\varrho_\nu)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu-\nu+1}.$$

Beweis: Der Satz ist richtig für $\nu=2$; wir setzen jetzt voraus, er sei bewiesen für $\nu=\mu-1$. Dann wissen wir, daß das Minimalpolynom des Produktes $y_1y_2\cdots y_{\mu-1}$

$$(A-\varrho_1-\varrho_2+\ldots-\varrho_{\mu-1})^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\mu-1}-\mu+2}$$

ist, und danach läßt Hilfssatz 4 sofort die Richtigkeit für $\nu=\mu$ sehen.

§ 3. Hat die Funktion y_k zum Minimalpolynom P_k

$$P_k=(A-\varrho_{k1})^{\alpha_{k1}}(A-\varrho_{k2})^{\alpha_{k2}}\ldots(A-\varrho_{k\lambda_k})^{\alpha_{k\lambda_k}}$$
$$(\varrho_{kl}\neq\varrho_{km} \text{ für } l\neq m;\ l,m=1,2,\ldots,\lambda_k),$$

so ist sie nach § 1 zu schreiben als Summe der λ_k Funktionen $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \ldots, y_k^{(\lambda_k)}$ mit den Minimalpolynomen

$$(A-\varrho_{k1})^{\alpha_{k1}},\ (A-\varrho_{k2})^{\alpha_{k2}},\ \ldots,\ (A-\varrho_{k\lambda_k})^{\alpha_{k\lambda_k}}.$$

Das Produkt der ν Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ mit den Minimalpolynomen $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ ist also gleich einer Summe von

Produkten und von der Gestalt

$$\sum_{i_1=1}^{\lambda_1} \sum_{i_2=1}^{\lambda_2} \dots \sum_{i_\nu=1}^{\lambda_\nu} y_1^{(i_1)} y_2^{(i_2)} \dots y_\nu^{(i_\nu)}.$$

Ein willkürliches Glied von $z = y_1 y_2 \dots y_\nu$ hat nach § 2 zum Minimalpolynom

$$(7) \qquad (A - \varrho_{1i_1} - \varrho_{2i_2} + \dots - \varrho_{\nu i_\nu})^{\alpha_{1i_1} + \alpha_{2i_2} + \dots + \alpha_{\nu i_\nu} - \nu + 1},$$

so daß wir schon schließen können

$$\Pi(A)(z) = \prod_{i_1=1;\, i_2=1;\, \dots;\, i_\nu=1}^{i_1=\lambda_1;\, i_2=\lambda_2;\, \dots;\, i_\nu=\lambda_\nu} (A - \varrho_{1i_1} - \varrho_{2i_2} + \dots - \varrho_{\nu i_\nu})^{\alpha_{1i_1} + \alpha_{2i_2} + \dots + \alpha_{\nu i_\nu} - \nu + 1}(z) = 0.$$

Das Minimalpolynom von z soll folglich gleich $\Pi(A)$ oder gleich einem Teiler von $\Pi(A)$ sein. Existieren eine oder mehrere Relationen von der Gestalt

$$(8) \qquad \varrho_{1i_{1,1}} + \varrho_{2i_{2,1}} + \dots + \varrho_{\nu i_{\nu,1}} = \varrho_{1i_{1,2}} + \varrho_{2i_{2,2}} + \dots + \varrho_{\nu i_{\nu,2}} = \dots =$$
$$= \varrho_{1i_{1,\sigma}} + \varrho_{2i_{2,\sigma}} + \dots + \varrho_{\nu i_{\nu,\sigma}} = \tau,$$

so reicht es hin, wenn im Minimalpolynom der Faktor $(A - \tau)^{\beta - \nu + 1}$ auftritt, worin β die größte Zahl ist aus der Reihe

$$(9) \qquad \alpha_{1i_{1,1}} + \alpha_{2i_{2,1}} + \dots + \alpha_{\nu i_{\nu,1}};\ \alpha_{1i_{1,2}} + \alpha_{2i_{2,2}} + \dots + \alpha_{\nu i_{\nu,2}};\ \dots;$$
$$\alpha_{1i_{1,\sigma}} + \alpha_{2i_{2,\sigma}} + \dots + \alpha_{\nu i_{\nu,\sigma}}.$$

Wir geben durch Π^* an, was von Π übrig bleibt, nachdem alle Faktoren die wegen der Existenz von Relationen vom Typus (8) unnötig waren, daraus entfernt sind. Falls in allen Reihen von der Gestalt von (9) der größte Wert nur einmal angenommen wird, so wird Π^* das Minimalpolynom von z sein. Ist $z^{(1)}$ das dem größten Werte aus (9) entsprechende Glied, so ist ja

$$\frac{\Pi^*}{(A-\tau)}(z) = \frac{\Pi^*}{(A-\tau)}(z^{(1)}) \neq 0,$$

da alle übrigen Glieder von z verschwinden. Wird aber der größte Wert β auch angenommen durch die Zahlen aus (9), die herrühren von den Gliedern $z^{(2)}, z^{(3)}, \dots, z^{(\delta)}$ der Summe, die z darstellt, so gilt

$$\frac{\Pi^*}{(A-\tau)}(z) = \frac{\Pi^*}{(A-\tau)}(z^{(1)} + z^{(2)} + \dots + z^{(\delta)}) \qquad (\delta > 1),$$

und da die rechte Seite hiervon sehr gut $= 0$ sein kann, ist in diesem Falle ein Minimalpolynom kleineren Grades als Π^* keineswegs ausgeschlossen.

§ **4.** Von jetzt an betrachten wir nicht mehr gegebene Funktionen, die Differentialgleichungen bestimmen, denen sie genügen, sondern wir gehen aus von den ν Differentialgleichungen

$$P_k(A)(y) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{10}$$

und fragen nach der Differentialgleichung kleinster Ordnung, die als Polynom in A mit konstanten Koeffizienten zu schreiben ist, und die durch jedes Produkt von der Gestalt

$$z = y_1 y_2 \ldots y_\nu$$

(worin y_k für $k = 1, 2, \ldots, \nu$ eine willkürliche Lösung der entsprechenden Gleichung (10) darstellt) befriedigt wird.

Da laut § 1 das Minimalpolynom einer willkürlichen Lösung y_k ein Teiler von $P_k(A)$ ist, wird das Minimalpolynom jedes Produktes z ein Teiler des nach den Regeln von § 3 aus P_1, $P_2, \ldots, P_\nu$ abzuleitenden Polynom $\Pi^*(A)$ sein. Jedes Produkt wird also der Differentialgleichung

$$\Pi^*(A)(z) = 0 \tag{11}$$

genügen.

Entsprechend der Tatsache, daß wir uns auf algebraische Betrachtungen beschränken wollten, gebrauchen wir jetzt ohne weiteres den übrigens leicht zu beweisenden Satz, daß jede Gleichung $P(A)(y) = 0$ mindestens eine Lösung y besitzt, die $P(A)$ zum Minimalpolynom hat. Wir schließen daraus, daß (11) die Gleichung kleinster Ordnung ist, der jedes Produkt z genügt, weil wir als y_k auch eine Funktion wählen können mit dem Minimalpolynom $(A - \varrho_{ki_k})^{\alpha_{ki_k}}$ und mithin die Produkte

$$y_1^{(i_1)} y_2^{(i_2)} \ldots y_\nu^{(i_\nu)} \qquad (i_k = 1, 2, \ldots, \lambda_k;\ k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

von welchen (7) uns die Minimalpolynome gab, der gesuchten Gleichung genügen müssen. Das entsprechende Polynom in A wird alle Faktoren (7) enthalten müssen und also $\Pi^*(A)$ sein. Damit ist gezeigt, daß (11) allen Anforderungen genügt.

Für $n = 1$ und $a_1 =$ konstant geht $P(A)(y) = 0$ über in

$$\left(\frac{d}{dx} - \varrho_1\right)^{\alpha_1} \left(\frac{d}{dx} - \varrho_2\right)^{\alpha_2} \ldots \left(\frac{d}{dx} - \varrho_\lambda\right)^{\alpha_\lambda} (y) = 0$$

was eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und ohne rechte Seite ist. Ihre allgemeine Lösung ist die Summe der allgemeinen Lösungen

$$y^{(i)} = e^{\varrho_i x}\left(c_1^{(i)} x^{\alpha_i - 1} + c_2^{(i)} x^{\alpha_i - 2} + \dots + c_{\alpha_i}^{(i)}\right)$$

der Gleichungen

$$\left(\frac{d}{dx} - \varrho_i\right)^{\alpha_i}(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, \lambda),$$

und da die Funktionen $y^{(i)}$ bzw. zu Minimalpolynomen haben $\left(\frac{d}{dx} - \varrho_i\right)^{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \dots, \lambda)$, ist ihr Minimalpolynom $P(A)$. Das soeben Gefundene lautet übertragen auf diesen speziellen Fall:

Ist y_k die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\left(\frac{d}{dx} - \varrho_{k1}\right)^{\alpha_{k1}}\left(\frac{d}{dx} - \varrho_{k2}\right)^{\alpha_{k2}} \cdots \left(\frac{d}{dx} - \varrho_{k\lambda_k}\right)^{\alpha_{k\lambda_k}}(y) = 0$$

für $k = 1, 2, \dots, \nu$, so ist die gewöhnliche lineare Differentialgleichung kleinster Ordnung mit konstanten Koeffizienten und ohne rechte Seite, die erfüllt wird durch $z = y_1 y_2 \dots y_\nu$, die Gleichung

$$\prod_{i_1=1;\, i_2=1;\, \dots;\, i_\nu=1}^{i_1=\lambda_1;\, i_2=\lambda_2;\, \dots;\, i_\nu=\lambda_\nu}{}^{\!*} \left(\frac{d}{dx} - \varrho_{1i_1} - \varrho_{2i_2} + \dots - \varrho_{\nu i_\nu}\right)^{\alpha_{1i_1}+\alpha_{2i_2}+\dots+\alpha_{\nu i_\nu}-\nu+1}(z) = 0.$$

(Eingegangen den 10. September 1934. Abgeändert eingegangen den 22. Dezember 1934.)