A. KHINTCHINE

Zur metrischen Kettenbruchtheorie

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 276-285
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__276_0>

Zur metrischen Kettenbruchtheorie

von

A. Khintchine

Moskau

Diese Abhandlung bildet eine Fortsetzung meines Aufsatzes „Metrische Kettenbruchprobleme" (Comp. Math. **1** (1935), 361—382; im folgenden als M.K. zitiert). § 1 enthält einige Bemerkungen und Ergänzungen zu M.K. Den Inhalt der §§ 2 und 3 bilden neue Ergebnisse. Insbesondere enthält § 3 den Hauptsatz der Abhandlung: $\sqrt[n]{q_n}$ *strebt bei* $n \to \infty$ *fast überall gegen eine absolute Konstante.*

Wegen aller Bezeichnungen sei auf M.K. hingewiesen.

§ 1.

1. Zunächst will ich eine sehr naheliegende Verschärfung von Hilfssatz 2 (M.K., 367) angeben. Nachdem die Abschätzung

$$\chi_n'(x) = \frac{1}{(1+x)\lg 2} + \theta A e^{-\alpha\sqrt{n}} \tag{1}$$

(l.c.) gewonnen ist, erhält man durch Integration

$$\chi_n\left(\frac{1}{r}\right) - \chi_n\left(\frac{1}{r+1}\right) = \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} + \frac{\theta' A}{r(r+1)} e^{-\alpha\sqrt{n}} \qquad (|\theta'| < 1),$$

und folglich

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots, & k, & k+n-1\\ r_1, & r_2, & \dots, & r_k, & r\end{pmatrix} =$$
$$= \left\{\frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} + \frac{\theta' A}{r(r+1)} e^{-\alpha\sqrt{n}}\right\} \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \dots, & k\\ r_1, & r_2, & \dots, & r_k\end{pmatrix}.$$

Infolgedessen erhält man an Stelle von Hilfssatz 2 folgende verschärfte Behauptung: *es gibt zwei positive absolute Konstanten* B *und* β *von der Beschaffenheit, daß für* $n_1 < n_2 < \dots < n_t < n_{t+1}$ *und beliebige* $r_1, r_2, \dots, r_t, r$

$$\left| \frac{\mathfrak{M} E \begin{pmatrix} n_1, n_2, \ldots, n_t, n_{t+1} \\ r_1, r_2, \ldots, r_t, r \end{pmatrix}}{\mathfrak{M} E \begin{pmatrix} n_1, n_2, \ldots, n_t \\ r_1, r_2, \ldots, r_t \end{pmatrix}} - \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{r(r+2)}\right\}}{\lg 2} \right| < \frac{B}{r(r+1)} e^{-\beta\sqrt{n_{t+1} - n_t}}$$

ist.

Man sieht leicht ein, daß die Beweisführungen in M.K. §§ 3 und 4 durch diese verschärfte Form von Hilfssatz 2 sehr wesentlich erleichtert werden können. Der Hauptsatz auf S. 368 erhält daneben auch leicht eine etwas größere Allgemeinheit, indem sich die Bedingung $f(r) = O(r^{1-\delta})$ durch allgemeinere Forderungen ersetzen läßt.

2. Der Satz des § 3 (M.K., 368) enthält einen Spezialfall, der besondere Hervorhebung verdient. Für eine vorgegebene Irrationalzahl sei $d_n(k)$ die Anzahl der Teilnenner a_i $(1 \leqq i \leqq n)$, die gleich k sind; der Grenzwert

$$h(k) = \lim_{n \to \infty} \frac{d_n(k)}{n}$$

kann, falls er existiert, als *relative Häufigkeit der Zahl k* unter den Teilnennern der gegebenen Irrationalzahl aufgefaßt werden.

Setzt man nun im erwähnten Satz

$$f(r) = \begin{cases} 1 \text{ für } r = k, \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

so ergibt sich, daß fast überall

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d_n(k)}{n} = h(k) = \frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\lg 2}$$

ist. Für jedes k ist danach die relative Häufigkeit $h(k)$ fast überall vorhanden und fast überall gleich

$$\frac{\lg\left\{1 + \frac{1}{k(k+2)}\right\}}{\lg 2}.$$

Insbesondere ist fast überall

$$h(1) = \frac{\lg 4 - \lg 3}{\lg 2},$$

$$h(2) = \frac{\lg 9 - \lg 8}{\lg 2},$$

$$h(3) = \frac{\lg 16 - \lg 15}{\lg 2},$$

usw. *)

*) Nachdem die vorliegende Arbeit schon geschrieben war, erfuhr ich, daß P. Lévy (Bull. Soc. Math. France 57 (1929), 178—194) das Ergebnis von § 1, 2, schon 1929 veröffentlicht hat. Er hat auch unabhängig den Satz von Kusmin bewiesen, und zwar mit einer schärferen Abschätzung des Restglieds.

§ 2.

Nun wollen wir eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes (M. K., 368) auf Funktionen mehrerer Veränderlicher aufstellen. Der Satz, den wir dabei beweisen werden, gilt, wie ich gleich hier bemerken will, auch unter viel allgemeineren Voraussetzungen; da jedoch der hier gegebene Wortlaut für den Beweis des Hauptsatzes in § 3 ausreicht, will ich mich auf diesen Spezialfall, dessen Begründung verhältnismäßig leicht ist, beschränken.

Zunächst müssen wir den Hilfssatz 2 (M. K., 367) verallgemeinern. Offenbar ist (in den Bezeichnungen von M. K., 366—367)

$$\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, k, & k+n+1, \ldots, k+n+l \\ r_1, & r_2, & \ldots, r_k, & r_{k+n+1}, \quad \ldots, r_{k+n+l}\end{pmatrix} = \\ = \left|\chi_n\left(\frac{P_l}{Q_l}\right) - \chi_n\left(\frac{P_l+P_{l-1}}{Q_l+Q_{l-1}}\right)\right| \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, k \\ r_1, & r_2, & \ldots, r_k\end{pmatrix},$$

wo $\frac{P_l}{Q_l}$ den Kettenbruch $[r_{k+n+1}, r_{k+n+2}, \ldots, r_{k+n+l}]$ und $\frac{P_{l-1}}{Q_{l-1}}$ seinen vorletzten Näherungsbruch $[r_{k+n+1}, \ldots, r_{k+n+l-1}]$ bezeichnet (denn $a_{k+n+i} = r_{k+n+i}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ bedeutet, daß $z_{k+n} = [a_{k+n+1}, a_{k+n+2}, \ldots]$ zwischen $\frac{P_l}{Q_l} = [r_{k+n+1}, r_{k+n+2}, \ldots, r_{k+n+l}]$ und $\frac{P_l+P_{l-1}}{Q_l+Q_{l-1}} = [r_{k+n+1}, r_{k+n+2}, \ldots, r_{k+n+l}+1]$ eingeschlossen ist).

Nun ergibt die Abschätzung (1)

$$\left|\left\{\chi_n\left(\frac{P_l}{Q_l}\right) - \chi_n\left(\frac{P_l+P_{l-1}}{Q_l+Q_{l-1}}\right)\right\} - \left\{\lg\left(1+\frac{P_l}{Q_l}\right) - \lg\left(1+\frac{P_l+P_{l-1}}{Q_l+Q_{l-1}}\right)\right\}\right| < \\ < A_l^{-\alpha\sqrt{n}}\left|\frac{P_l}{Q_l} - \frac{P_l+P_{l-1}}{Q_l+Q_{l-1}}\right|;$$

und hier ist offenbar

$$\left|\frac{P_l}{Q_l} - \frac{P_l+P_{l-1}}{Q_l+Q_{l-1}}\right| = \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, l \\ r_{k+n+1}, & r_{k+n+2}, & \ldots, r_{k+n+l}\end{pmatrix}.$$

Folglich erhalten wir

$$\left|\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, k, & k+n+1, \ldots, k+n+l \\ r_1, & r_2, & \ldots, r_k, & r_{k+n+1}, \quad \ldots, r_{k+n+l}\end{pmatrix} - \right. \\ \left. - \left|\lg\left(1+\frac{P_l}{Q_l}\right) - \lg\left(1+\frac{P_l+P_{l-1}}{Q_l+Q_{l-1}}\right)\right| \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, k \\ r_1, & r_2, & \ldots, r_k\end{pmatrix}\right| <$$

$$(2) \quad < Ae^{-\alpha\sqrt{n}}\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, k \\ r_1, & r_2, & \ldots, r_k\end{pmatrix} \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, l \\ r_{k+n+1}, & r_{k+n+2}, & \ldots, r_{k+n+l}\end{pmatrix}.$$

Setzt man in dieser Ungleichung $k = 0$ und ersetzt n durch

$k+n$, so erhält man

$$\left|\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}k+n+1, & k+n+2, & \ldots, & k+n+l\\ r_{k+n+1}, & r_{k+n+2}, & \ldots, & r_{k+n+l}\end{pmatrix} - \right.$$
$$\left. - \left|\lg\left(1+\frac{P_l}{Q_l}\right) - \lg\left(1+\frac{P_l+P_{l-1}}{Q_l+Q_{l-1}}\right)\right|\right| <$$
$$(3) \qquad < Ae^{-\alpha\sqrt{k+n}}\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & l\\ r_{k+n+1}, & r_{k+n+2}, & \ldots, & r_{k+n+l}\end{pmatrix}.$$

Multipliziert man (3) mit $\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}$, so ergibt die Zusammenstellung mit (2)

$$\left|\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k, & k+n+1, & \ldots, & k+n+l\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k, & r_{k+n+1}, & \ldots, & r_{k+n+l}\end{pmatrix} - \right.$$
$$\left. - \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}k+n+1, & k+n+2, & \ldots, & k+n+l\\ r_{k+n+1}, & r_{k+n+2}, & \ldots, & r_{k+n+l}\end{pmatrix}\right| <$$
$$< 2Ae^{-\alpha\sqrt{n}}\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & k\\ r_1, & r_2, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & l\\ r_{k+n+1}, & r_{k+n+2}, & \ldots, & r_{k+n+l}\end{pmatrix}.$$

Wählt man eine ganze Zahl s, $0 < s < k$, und summiert diese Ungleichung über $r_1, r_2, \ldots, r_{s-1}$ in den Grenzen $(1, \infty)$, so kommt man offenbar zu folgendem

Hilfssatz. *Es gibt zwei absolute positive Konstanten A und α von der Beschaffenheit, daß für $0 < s < k < k+n < k+n+l$ und beliebige $r_s, r_{s+1}, \ldots, r_k, r_{k+n+1}, \ldots, r_{k+n+l}$*

$$\left|\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}s, & s+1, & \ldots, & k, & k+n+1, & \ldots, & k+n+l\\ r_s, & r_{s+1}, & \ldots, & r_k, & r_{k+n+1}, & \ldots, & r_{k+n+l}\end{pmatrix} - \right.$$
$$\left. - \mathfrak{M}E\begin{pmatrix}s, & s+1, & \ldots, & k\\ r_s, & r_{s+1}, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}k+n+1, & k+n+2, & \ldots, & k+n+l\\ r_{k+n+1}, & r_{k+n+2}, & \ldots, & r_{k+n+l}\end{pmatrix}\right| <$$
$$< 2Ae^{-\alpha\sqrt{n}}\,\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}s, & s+1, & \ldots, & k\\ r_s, & r_{s+1}, & \ldots, & r_k\end{pmatrix}\mathfrak{M}E\begin{pmatrix}1, & 2, & \ldots, & l\\ r_{k+n+1}, & r_{k+n+2}, & \ldots, & r_{k+n+l}\end{pmatrix}$$

ist.

Mit Hilfe dieser Ungleichung beweisen wir nun folgenden allgemeinen Mittelwertsatz.

Satz. *Es sei $f(r_1, r_2, \ldots, r_k)$ eine nichtnegative Funktion der ganzzahligen positiven Argumente $r_1, r_2, \ldots, r_k$ die der Bedingung* [1])

$$(4) \qquad \int_0^1 \{f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})\}^2\,du < C \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

genügt. Dann ist

[1]) $a_n = a_n(u)$ bedeutet hier natürlich den n-ten Teilnenner des die Zahl u darstellenden Kettenbruchs.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1=i}^{n} f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1})$$

fast überall vorhanden und fast überall konstant.

BEWEIS. Man setze für $n, m > 0$

$$\int_0^1 f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})\, du = \alpha_n,$$

$$\int_0^1 \{f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) - \alpha_n\}^2\, du = \beta_n,$$

$$\int_0^1 \{f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) - \alpha_n\}\{f(a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+k-1}) - \alpha_m\} du = \gamma_{nm}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \{f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}) - \alpha_i\} = s_n.$$

Es ist offenbar für $n > m \geqq 0$, wenn $s_0 = 0$ gesetzt wird,

$$\int_0^1 (s_n - s_m)^2 du = \sum_{i=m+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}) - \alpha_i\}^2\, du +$$

$$+ 2 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \int_0^1 \{f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}) - \alpha_i\} \{f(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+k-1}) - a_j\}\, du =$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} \beta_i + 2 \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \gamma_{ij}. \tag{5}$$

Hierin ist nach (4)

$$\beta_i = \int_0^1 \{f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1})\}^2\, du - \alpha_i^2 < C, \tag{6}$$

und für $j > i + k$

$$\gamma_{ij} = \int_0^1 f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}) f(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+k-1}) du - \alpha_i \alpha_j =$$

$$= \sum_{\left\{\substack{r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1} \\ r_j, r_{j+1}, \ldots, r_{j+k-1}}\right\} = 1}^{\infty} f(r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1}) f(r_j, r_{j+1}, \ldots, r_{j+k-1}) \; \mathfrak{M} E \begin{pmatrix} i, & i+1, \ldots, i+k-1, & j, & j+1, \ldots, j+k-1 \\ r_i, & r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1}, & r_j, & r_{j+1}, \ldots, r_{j+k-1} \end{pmatrix} -$$

$$- \sum_{\left\{\substack{r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1} \\ r_j, r_{j+1}, \ldots, r_{j+k-1}}\right\} = 1}^{\infty} f(r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1}) f(r_j, r_{j+1}, \ldots, r_{j+k-1}) \; \mathfrak{M} E \begin{pmatrix} i, & i+1, \ldots, i+k-1 \\ r_i, & r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1} \end{pmatrix} \mathfrak{M} E \begin{pmatrix} j, & j+1, \ldots, j+k-1 \\ r_j, & r_{j+1}, \ldots, r_{j+k-1} \end{pmatrix},$$

also nach dem vorstehend bewiesenen Hilfssatz

$$|\gamma_{ij}| < 2Ae^{-\alpha\sqrt{j-i-k}} \sum_{r_i,\ldots,r_{j+k-1}=1}^{\infty} f(r_i,\ldots,r_{i+k-1}) f(r_j,\ldots,r_{j+k-1}) \mathfrak{M} E\begin{pmatrix} i, & \ldots, & i+k-1 \\ r_i, & \ldots, & r_{i+k-1} \end{pmatrix} \mathfrak{M} E\begin{pmatrix} 1, & \ldots, & k \\ r_j, & \ldots, & r_{j+k-1} \end{pmatrix} =$$

$$= 2Ae^{-\alpha\sqrt{j-i-k}}\alpha_i\alpha_1,$$

und folglich, wenn man α_1 und α_i nach der Schwarzschen Ungleichung abschätzt,

$$(7) \qquad |\gamma_{ij}| < 2ACe^{-\alpha\sqrt{j-i-k}} \qquad (j > i+k).$$

Für $j \leqq i+k$ ist aber jedenfalls nach der Schwarzschen Ungleichung

$$(8) \qquad |\gamma_{ij}| < C \qquad (j \leqq i+k).$$

Wegen (6), (7), (8) ergibt (5)

$$\int_0^1 (s_n - s_m)^2 du < \sum_{i=m+1}^{n} \beta_i + 2\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=i+1}^{i+k} |\gamma_{ij}| + 2\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=i+k+1}^{\infty} |\gamma_{ij}| <$$

$$< C(n-m) + 2Ck(n-m) + 4AC(n-m)\sum_{t=1}^{\infty} e^{-\alpha\sqrt{t}} <$$

$$(9) \qquad < Bk(n-m),$$

wo B eine absolute positive Konstante bedeutet.

Nun sei e_n die Menge derjenigen Zahlen der Strecke (0, 1), für die $|s_n| \geqq \varepsilon n$ ist, wo ε eine beliebige feste positive Zahl bedeutet. Offenbar ist

$$\int_0^1 s_n^2 du \geqq \int_{e_n} s_n^2 du \geqq \varepsilon^2 n^2 \mathfrak{M} e_n,$$

und folglich, wenn man (9) mit $m = 0$ anwendet,

$$\mathfrak{M} e_n \leqq \frac{\int_0^1 s_n^2 du}{\varepsilon^2 n^2} < \frac{Bk}{\varepsilon^2 n}.$$

Infolgedessen ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} e_{n^2}$ konvergent; und daraus folgt bekanntlich, daß fast alle Zahlen der Strecke (0, 1) bei genügend großem n der Ungleichung

$$\frac{|s_{n^2}|}{n^2} < \varepsilon$$

genügen; da aber ε willkürlich ist, muß fast überall

$$\frac{s_{n^2}}{n^2} \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{10}$$

sein.

Für $n^2 \leqq N < (n+1)^2$ haben wir ferner wegen (9)

$$\int_0^1 (s_N - s_{n^2})^2 du < Bk(N - n^2) < 3Bkn,$$

und folglich, wenn wir mit $e_{n,N}$ die Menge der Zahlen von $(0, 1)$ bezeichnen, die der Ungleichung

$$|s_N - s_{n^2}| \geqq \varepsilon n^2$$

genügen, und

$$\sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} e = E_n$$

setzen,

$$\int_0^1 (s_N - s_{n^2})^2 du \geqq \int_{e_{n,N}} (s_N - s_{n^2})^2 du \geqq \varepsilon^2 n^4 \mathfrak{M} e_{n,N},$$

$$\mathfrak{M} e_{n,N} < \frac{3Bk}{\varepsilon^2 n^3},$$

$$\mathfrak{M} E_n \leqq \sum_{N=n^2}^{(n+1)^2-1} \mathfrak{M} e_{n,N} < \frac{3Bk(2n+1)}{\varepsilon^2 n^3} \leqq \frac{9Bk}{\varepsilon^2 n^2},$$

so daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M} E_n$ konvergiert. Daraus erschließen wir aber, daß fast alle Zahlen der Strecke $(0, 1)$ bei genügend großem n und $n^2 \leqq N < (n+1)^2$ der Ungleichung

$$|s_N - s_{n^2}| < \varepsilon n^2$$

genügen. Da ε willkürlich ist, hat man fast überall

$$\frac{s_N - s_{n^2}}{n^2} \to 0 \qquad (n \to \infty,\ n^2 \leqq N < (n+1)^2),$$

was wegen (10) fast überall

$$\frac{s_N}{N} \to 0 \qquad (n \to \infty,\ n^2 \leqq N < (n+1)^2)$$

zur Folge hat. A fortiori ist demnach fast überall

$$\frac{s_N}{N} \to 0 \qquad (N \to \infty).$$

Mit anderen Worten genügen fast alle Zahlen der Strecke (0, 1) der Limesbeziehung

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{11}$$

Endlich ist nach (3)

$$\alpha_i = \sum_{r_i, \ldots, r_{i+k-1}=1}^{\infty} f(r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1})\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} i, & i+1, & \ldots, & i+k-1 \\ r_i, & r_{i+1}, & \ldots, & r_{i+k-1}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{r_i, \ldots, r_{i+k-1}=1}^{\infty} f(r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1}) \left| \lg(1+\vartheta) - \lg(1+\vartheta') \right| +$$

$$+ \theta A e^{-\alpha\sqrt{e-1}} \sum_{r_i, \ldots, r_{i+k-1}=1}^{\infty} f(r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1})\, \mathfrak{M}E\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k \\ r_i, & r_{i+1}, & \ldots, & r_{1+k-1}\end{pmatrix}$$

wo $\vartheta = [r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1}]$, $\vartheta' = [r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+k-1}+1]$, $|\theta| < 1$ ist. Die erste Summe rechts ist eine von i unabhängige Konstante, die wir mit γ bezeichnen wollen (die Konvergenz der k-fachen Reihe ergibt sich leicht aus (4)); die zweite Summe ist gleich α_1. Somit erhält man

$$|\alpha_i - \gamma| < A\sqrt{C}e^{-\alpha\sqrt{i-1}},$$

und folglich

$$\alpha_i \to \gamma \qquad (i\to\infty),$$

und deswegen auch

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \to \gamma \qquad (n\to\infty).$$

Wegen (11) folgt hieraus endlich fast überall

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}) \to \gamma \qquad (n\to\infty),$$

womit unser Satz bewiesen ist.

§ 3.

Satz. *Es gibt eine absolute Konstante $\varkappa$ von der Beschaffenheit, daß fast überall*

$$\sqrt[n]{q_n} \to \varkappa \qquad (n\to\infty)$$

ist. (q_n bedeutet hier wie üblich den n-ten Näherungsnenner der vorgegebenen Zahl).

Beweis: Man setze für $n \geqq k \geqq 1$

$$\varphi_n^{(k)} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{\ddots}{+ \cfrac{1}{a_{n-k+1}}}} = [a_n; a_{n+1}, \ldots, a_{n-k+1}]$$

und

$$f(a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \ldots, a_n) = \lg \varphi_n^{(k)} \qquad (n \geqq k).$$

Wegen

$$\varphi_n^{(k)} \leqq a_n + 1$$

ist

$$\int_0^1 \{f(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1})\}^2 du \leqq$$
$$\leqq \int_0^1 \lg^2 (a_{i+k-1}+1)\, du < C_1 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lg^2 (r+1)}{r^2} < C_2,$$

wo C_1, C_2 absolute positive Konstanten sind. Die Funktion f erfüllt somit die Voraussetzungen des Satzes von § 2. Indem wir diesen Satz anwenden, erhalten wir, daß fast überall

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{k+n-1} \lg \varphi_i^{(k)} = \lambda_k \tag{12}$$

ist, wo λ_k eine nur von k abhängende positive Konstante bedeutet.

Nun ist bekanntlich für $n \geqq 1$

$$\varphi_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1],$$

und andererseits für $n \geqq k$

$$|\lg \varphi_n - \lg \varphi_n^{(k)}| = \xi\, |\varphi_n - \varphi_n^{(k)}|,$$

wo ξ zwischen $\frac{1}{\varphi_n}$ und $\frac{1}{\varphi_n^{(k)}}$ eingeschlossen ist, so daß insbesondere $\xi < 1$ ist; man hat somit für $n \geqq k$

$$|\lg \varphi_n - \lg \varphi_n^{(k)}| < |\varphi_n - \varphi_n^{(k)}| =$$
$$= |[a_n; a_{n-1}, \ldots, a_1] - [a_n; a_{n-1}, \ldots, a_{n-k+1}]| < \frac{1}{q^2};$$

hierbei ist q der Nenner von $[a_n; a_{n-1}, \ldots, a_{n-k+1}]$; bekanntlich ist

$$q > 2^{\frac{k-1}{2}},$$

und folglich

$$\left| \lg \varphi_n - \lg \varphi_n^{(k)} \right| < 2^{1-k}.$$

Wegen (12) folgt daraus, daß $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lg \varphi_i$ fast überall bei $n \to \infty$ zwischen zwei höchstens um 2^{2-k} voneinander und von λ_k entfernten Schranken oszilliert; da k willkürlich ist, gibt es folglich eine absolute Konstante λ von der Beschaffenheit, daß fast überall

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lg \varphi_i = \frac{\lg q_n}{n} \to \lambda \qquad (n \to \infty)$$

und

$$\sqrt[n]{q_n} \to e^{\lambda} = \varkappa$$

ist, wo $\varkappa$ evenfalls eine absolute Konstante bedeutet; w.z.b.w.

(Eingegangen den 13. Februar 1935.)