H. KOBER

Eine Mittelwertformel der Riemannschen Zetafunktion

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 174-189
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__174_0>

Eine Mittelwertformel der Riemannschen Zetafunktion

von

H. Kober

Breslau

Herr Ingham hatte ein bekanntes Hardy-Littlewoodsches Resultat verbessert in

$$\int_0^T |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2\,dt = T\log T - (1+\log 2\pi - \gamma)T + O(T^m \log^n T)$$

für $m=\frac{1}{2}$, $n=1$, Herr Titchmarsh hat das Ergebnis weiter verbessert: $m=\frac{5}{12}$, $n=2$ [1]). Schärfer ist die Formel, deren erste Glieder man durch partielle Integration hieraus erhalten kann,

$$\text{(I)} \qquad \int_0^\infty |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2 e^{-\varepsilon t}dt = \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\log 2\pi - \gamma}{\varepsilon} + R(\varepsilon)$$

für $\varepsilon > 0$. Bisher ist bekannt [2]), daß $R(\varepsilon) = O(1)$ ist für $\varepsilon \to 0$. Im Folgenden sei stets $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0 < 1$.

Hier soll gezeigt werden, daß $R(\varepsilon)$ gegen eine Konstante strebt,

$$R(\varepsilon) = B + O(\varepsilon \log^2 \varepsilon)$$

und mehr, daß man nämlich die asymptotische Darstellung von

---

[1]) A. E. Ingham, Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function [Proc. London Math. Soc. (2) **27** (1928), 273—300], theorem A.

G. H. Hardy and I. E. Littlewood, 1.) Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes [Acta Math. **41** (1918), 119—196], 2.) The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor-problems of Dirichlet and Piltz [Proc. London Math. Soc. (2) **21** (1922), 39—74].

E. C. Titchmarsh, On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann [Quart. Journal of Math. Oxford **5** (1934), 195 u.f.].

[2]) Titchmarsh, l.c..

I. R. Wilton, The mean value of the zeta-function on the critical line [Journal London Math. Soc. **5** (1930), 28—32]. Sein Ergebnis entspricht etwa dem Inghams.

$R(\varepsilon)$ und somit des Integrales der Gleichung I bis zu jedem gewünschten Grade der Genauigkeit führen kann: Es seien die Größen a_ν gewisse Konstanten, ebenso $\bar{a}_\nu$, $\bar{\bar{a}}_\nu$, ferner a und A positive Konstanten, $0 < | x | < a$,

$$\mathfrak{P}_k(x) = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu x^\nu + \psi(x)\,, \quad | \psi(x) | < A \, | x |^{k+1}.$$

Die entsprechende Bedeutung mögen $\bar{\mathfrak{P}}_k(x)$ und $\bar{\bar{\mathfrak{P}}}_k(x)$ haben. Es möge jetzt k ganz positiv beliebig gewählt sein; dann gibt es Funktionen $\mathfrak{P}_k$, $\bar{\mathfrak{P}}_k$, $\bar{\bar{\mathfrak{P}}}_k$, so daß für die in I auftretende Restfunktion die Darstellung gilt

$$(\mathrm{I}') \quad R(\varepsilon) = B + \mathfrak{P}_k(\varepsilon) + \bar{\mathfrak{P}}_k(\varepsilon) \log \frac{1}{\varepsilon} + \bar{\bar{\mathfrak{P}}}_k(\varepsilon) \log^2 \frac{1}{\varepsilon} =$$

$$= B + \sum_{r=1}^{k} \varepsilon^r \left(a_r + \bar{a}_r \log \frac{1}{\varepsilon} + \bar{\bar{a}}_r \log^2 \varepsilon \right) + O(\varepsilon^{k+1} \log^2 \varepsilon)\,.$$

Dasselbe Problem soll nun hier auch für Funktionen gelöst werden, die mit $\zeta(s)$ verwandt sind: Eine Funktion $f(s)$ soll im engeren Sinne ζ-verwandt heißen, wenn sie gleich dem Quotienten aus einer ganzen Funktion von endlichem Geschlecht und einem Polynom ist, in einer Halbebene durch eine Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n^{-s}$ darstellbar ist, deren Halbebene der absoluten Konvergenz die Gerade $\sigma = 2$ einschließt, und einer Funktionalgleichung genügt:

$$(\mathrm{III}a) \quad f(s) \Gamma\left(\frac{s + \mathfrak{a}}{2}\right) \left(\frac{\pi}{l}\right)^{-\frac{s}{2}} = g(1-s)\, \Gamma\left(\frac{\mathfrak{a}+1-s}{2}\right) \left(\frac{\pi}{l}\right)^{\frac{s-1}{2}},$$

wobei $\mathfrak{a} = 0$ oder 1, $l > 0$, $g(s)$ in irgend einer Halbebene durch eine Reihe $\sum \beta_n n^{-s}$ darstellbar ist.

Natürlich ist jede Funktion $L(s, \chi)$, wenn χ irgend ein Charakter ist, ζ-verwandt.

Aus Sätzen von Hamburger und Siegel ergibt sich [3]), daß l ganzzahlig sein muß, daß ferner $f(s)$ dann und nur dann „ζ-verwandt" ist, wenn für jedes ganze positive n, jedes ganze m, $l > m \geqq 1$,

---

[3]) Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der Zetafunktion; 3 Mitteilungen [Math. Zeitschr. **10** (1921), 240 u.f.; **11** (1921), 224 u.f.; **13** (1922), 283 u.f.]. Siehe bes. 2. Mitteilung, 225, 226, 239, 240.

Siegel, Bemerkungen zu einem Satze von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion [Math. Ann. **86** (1922), 276 u.f.].

$$\text{(III}b\text{)}\quad \begin{aligned} &\alpha_{n+l} = \alpha_n,\ \alpha_m = \alpha_{l-m} && \text{im Falle } \mathfrak{a} = 0,\\ &\alpha_{n+l} = \alpha_n,\ \alpha_m = -\alpha_{l-m},\ \alpha_l = 0 && \text{im Falle } \mathfrak{a} = 1 \end{aligned}$$

ist. Es folgt weiter, daß

$$\text{(III}c\text{)}\quad \beta_n = l^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu \cos\frac{2n\nu\pi}{l} = l^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu e^{\pm\frac{2n\nu\pi i}{l}} \quad \text{für } \mathfrak{a} = 0,$$

$$\beta_n = l^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu \sin\frac{2n\nu\pi}{l} = \mp i l^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu=1}^{l} \alpha_\nu e^{\pm\frac{2n\nu\pi i}{l}} \quad \text{für } \mathfrak{a} = 1$$

sein muß, und so auch die auftretenden Dirichletschen Reihen für $\sigma > 1$ absolut konvergent sind.

Durch Anwendung von Suetunas [4]) Verfahren folgt unschwer, daß jede solche Funktion $f(s)$ einer approximierten Funktionalgleichung genügt: Es sei $-h \leqq \sigma \leqq h$, $x > k > 0$, $y > k$, $2\pi xy = |t|$, $s = \sigma + it$, dann ist gleichmäßig

$$f(s) = \sum_{n=1}^{x} \alpha_n n^{-s} + \left(\frac{\pi}{l}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\mathfrak{a}+1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mathfrak{a}+s}{2}\right)} \sum_{n=1}^{y} \beta_n n^{s-1} + \\ + O(x^{-\sigma}) + O(y^{\sigma-1} \mid t \mid^{\frac{1}{2}-\sigma}).$$

Vielleicht ist auch die umgekehrte Frage, ob jede Funktion, die einer solchen approximierten Funktionalgleichung genügt, eine ζ-verwandte ist, zu bejahen.

In dem dritten Teile dieser Arbeit soll nun durch eine leichte Abänderung des im ersten Teile benutzten Verfahrens die entsprechende Mittelwertformel für die ζ-Verwandten entwickelt werden.

Der im ersten Teile eingeschlagene Weg ist im Wesentlichen sehr einfach: Man führt das Integral der Gleichung I auf komplexe Integrale der Gestalt

$$H_r = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (s-\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}-r} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \zeta^2(s) (\pi e^{i\varphi})^{-s} ds \text{ für } \tfrac{1}{2} < c < 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

$r = 0, 1, 2, \ldots$, zurück, diese dann auf die Integrale

$$G_\nu = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s-\nu)\, \zeta^2(s) z^{-s} ds, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

und benutzt zu deren Auswertung den Satz I, 42: Es sei die

---

[4]) Suetuna, The zeros of L-functions on the critical line [Tôhoku Math. Journal **24** (1925), 313—331].

Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$ für $\sigma > \sigma_0$ absolut konvergent, $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$. Dann ist, wenn σ beliebig $> \mathrm{Max}\,(\sigma_0, 0)$ fixiert wird,

$$\varphi(z) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) f(s) z^{-s} ds$$

eine periodische Funktion von z mit der Periode $2\pi i$. Der Beweis dieses Satzes folgt fast unmittelbar aus der Periodizität des Integrales:

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Gamma(s) z^{-s} ds = 2\pi i e^{-z} \quad \text{für } \sigma > 0,\ |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

In dem zweiten Teile dieser Arbeit soll dann kurz der Zusammenhang zwischen dem vorliegenden Problem und zwischen der Frage gezeigt werden, das Verhalten der „Bessel-Thetareihe" — die übrigens leicht in eine Zetafunktion zweiter Ordnung umgeformt werden kann —

$$\text{(II, 41)} \quad \Theta(u, v, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) \cos 2\pi v n\, K_0(2\pi u n) + \frac{1}{4} \log \frac{u e^{\gamma}}{4\pi}\ {}^{5})$$

für $v = 0$ in einer gewissen Umgebung des singulären Punktes $u = i$ zu bestimmen. Diese Aufgabe aber kann direkt mit Hilfe einer Transformation gelöst werden, da die Bessel-Thetareihe gewisse allgemeine Transformationen zuläßt[5]). Die auf diesem Wege also mögliche zweite Lösung des ursprüglichen Problems oder wenigstens die asymptotische Darstellung eines ganz ähnlichen Integrales soll aber hier nicht weiter ausgeführt werden.

I. *Der Mittelwert.*

Wir legen also k positiv ganz fest; die Funktionen $\mathfrak{P}_k = \ldots$, also die Größen a_ν und A, dürfen von Fall zu Fall verschieden sein, ebenso die, falls eine Unterscheidung es erfordert, zusätzlich eingeführten Funktionen $\overline{\mathfrak{P}}_k$, $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}_k$ von gleicher Bedeutung. Es mögen die Größen b_r gewisse Konstanten bedeuten, $\varkappa$ sei $= k + 2$,

$$I_r = \int_1^{\infty} t^{\frac{1}{2}-r} \left| \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \zeta^2(s) \pi^{-s} \right| e^{\varphi t} dt, \quad s = \tfrac{1}{2} + it,\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

---

[5]) Kober, Transformationsformeln gewisser Besselscher Reihen [Math. Zeitschr. 39 (1935)], 621 und 612.

Dann ist

$$\text{(I, 1)}\quad \int_0^\infty |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|^2 e^{-\varepsilon t}dt = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} I_0 + \sum_{r=2}^{\varkappa} b_r I_r + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon).$$

Beweis: Das Integral der linken Seiten ist $= \int_0^1 + \int_1^\infty$, und $\int_0^1$ ist sicher in die Form $a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon)$ zu bringen, wenn man für

$$\text{(I, 11)}\quad e^{-\varepsilon t} = \sum_{r=0}^{k} \frac{(-\varepsilon t)^r}{r!} + R,\ |R| \leqq \varepsilon^{k+1} t^{k+1} \text{ für } t \geqq 0,$$

$(|R| \leqq (-\varepsilon t)^{k+1} \varepsilon^{-\varepsilon t}$ für $t \leqq 0$ wird später benutzt)

einsetzt. Für den weiteren Gang dieses Beweises soll $\mathfrak{P}_{\varkappa,2}$ ein $\mathfrak{P}_\varkappa$ bedeuten, in dem a_1 gleich 0 ist. Dann ist auf Grund der Stirlingschen Reihe

$$\text{(I, 12)}\quad \left|\Gamma^2\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\right| = 2\pi\sqrt{2}\, t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi t}{2}} e^{\mathfrak{P}_{\varkappa,2}\left(\frac{1}{t}\right)} \quad \text{für } t \geqq 1, \text{ also}$$

$$\int_1^\infty |\zeta(\tfrac{1}{2}+it)^2| e^{-\varepsilon t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \left|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\pi^{-\frac{1}{4}-\frac{it}{2}}\right|^2 \sqrt{t}\, e^{\varphi t} e^{-\mathfrak{P}_{\varkappa,2}\left(\frac{1}{t}\right)} dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} I_0 + \sum_{r=2}^{\varkappa} b_r I_r + R_1,$$

da $e^{-\mathfrak{P}_{\varkappa,2}\left(\frac{1}{t}\right)} = 1 + \widetilde{\mathfrak{P}}_{\varkappa,2}\left(\frac{1}{t}\right)$ für $t \geqq t_0 > 0$ ist. Es ist aber der Rest

$$R_1 = \int_1^\infty \left|\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\right|^2 \sqrt{t}\, e^{\varphi t} g(t) dt, \quad |g(t)| < A t^{-\varkappa-1}.$$

Formt man hier $\exp(\varphi t) = \exp\left(\frac{\pi t}{2}\right) \cdot \exp(-\varepsilon t)$ nach I, 11 um, berücksichtigt man, daß wegen $\zeta(\frac{1}{2}+it) = O(t^{\frac{1}{4}})$ das letzte so durch die Zerlegung von R_1 entstehende Glied

$$\text{(I, 13)}\quad |R_{1,k+2}| < A \int_1^\infty \left|\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\right|^2 e^{\frac{\pi t}{2}} \varepsilon^{k+1} t^{\frac{1}{2}+k+1-(\varkappa+1)} dt$$

$$< A'\varepsilon^{k+1} \int_1^\infty t^{\frac{1}{2}+k-\varkappa} dt = A'\varepsilon^{k+1} \int_1^\infty t^{-\frac{3}{2}} dt < A''\varepsilon^{k+1},$$

so folgt, daß R_1 von der Form $a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon)$ ist, und daher die Richtigkeit der Gleichung I, 1.

Es sollen jetzt die Integrale I_r durch komplexe Integrale ausgedrückt werden. Es sei $\frac{1}{2} < c < 1$, c sonst beliebig, dann ist

$$(\mathrm{I}, 2)\quad I_r = \int_1^\infty t^{\frac{1}{2}-r}\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\varphi t}\,dt =$$

$$= e^{-\frac{i\varepsilon}{2}+\frac{i\pi}{2}(r-1)} H_r + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon),$$

$$H_r = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-r}\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\zeta^2(s)\pi^{-s}e^{-i\varphi s}\,ds.$$

Zum Beweise verlege man den Integrationsweg des komplexen Integrales H_r in eine Linie C, welche den Punkt $s = \frac{1}{2}$ in einem Halbkreise vom Radius δ rechts von der Geraden $s = \frac{1}{2} + it$ umgeht und sonst mit dieser Geraden zusammenfällt; es sei δ beliebig fest, aber $0 < \delta < c - \frac{1}{2}$, auf dem oberen geraden Teile von C ist $\arg\,(s-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}$, auf dem unteren $\arg\,(s-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{2}$, also ist auf dem oberen und unteren geraden Teile

$$(s-\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}-r} = e^{\frac{i\pi}{4}(1-2r)}\,t^{\frac{1}{2}-r} \text{ bzw. } (s-\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}-r} = e^{-\frac{i\pi}{4}(1-2r)}\,(-t)^{\frac{1}{2}-r},$$

daher das Integral

$$(\mathrm{I}, 21)\quad H_r = ie^{-\frac{i\pi}{2}r}\int_\delta^\infty t^{\frac{1}{2}-r}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\zeta^2\left(\frac{1}{2}+it\right)\pi^{-\frac{1}{2}-it}e^{\frac{t\pi}{2}-t\varepsilon+\frac{i\varepsilon}{2}}\,dt$$

$$+\, ie^{-\frac{i\pi}{2}(1-r)}\int_\delta^\infty t^{\frac{1}{2}-r}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}-i\frac{t}{2}\right)\zeta^2\left(\frac{1}{2}-it\right)\pi^{-\frac{1}{2}+it}e^{-\frac{t\pi}{2}+t\varepsilon+\frac{i\varepsilon}{2}}\,dt$$

$$+\int\left(s-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-r}\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\zeta^2(s)\pi^{-s}e^{-\frac{i\pi s}{2}+is\varepsilon}\,ds.$$

Der Integrationsweg des letzten Integrales ist der Halbkreis, es ist auf Grund einer I, 11 ähnlichen Abschätzung gleich $a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon)$, von derselben Gestalt ist das zweite rechts in I, 21 auftretende Integral, wenn man bei der Begründung I, 12 mit berücksichtigt, und schließlich auch der erste Teil des ersten Integrales, das man in die Integrale von δ bis 1 und von 1 bis ∞ zerlegt. Es ist nun auf Grund der Funktionalgleichung der ζ-Funktion für reelles t das Produkt

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\right)\zeta^2\left(\frac{1}{2}+it\right)\pi^{-\frac{1}{2}-it}$$

gleich seinem absoluten Werte, so folgt die Behauptung.

Jetzt wird weiterhin das Integral H_r durch ein einfacheres komplexes Integral ausgedrückt. Es sei wieder $\varkappa = k+2$, $r = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa-1, \varkappa$.

Es ist für $s = \sigma + it$, $\sigma = c > \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\log\left(s-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\log s - \frac{1}{4s} + \mathfrak{P}_{\varkappa,2}\left(\frac{1}{s}\right),$$

$$\log\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) = (s-1)\log s + (1-s)\log 2 - s + \log 2\pi + \frac{1}{3s} + \bar{\mathfrak{P}}_{\varkappa,2}\left(\frac{1}{s}\right),$$

$$\log\Gamma(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right)\log s - s + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12s} + \bar{\bar{\mathfrak{P}}}_{\varkappa,2}\left(\frac{1}{s}\right)$$

auf Grund der Stirlingschen Formel, daher

$$\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-r} = \left(s-\frac{1}{2}\right)^{-r}\sqrt{2\pi}\cdot 2^{1-s}\Gamma(s)e^{\mathfrak{P}_{\varkappa,2}\left(\frac{1}{s}\right)}$$

$$= \sqrt{2\pi}\cdot 2^{1-s}\Gamma(s)\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)^{-r} + \left(s-\frac{1}{2}\right)^{-r}\bar{\mathfrak{P}}_{\varkappa,2}\left(\frac{1}{s}\right)\right).$$

$\bar{\mathfrak{P}}_{\varkappa,2}$ beginnt erst mit dem Gliede zweiten Grades, daher wird $d_{1,0}$ in der folgenden Formel I, 3 gleich 0. Es seien nun m, n, p ganze, nicht negative Zahlen, σ sei fest, 2σ weder 1 noch gerade. Dann gilt, wenn im Falle $m = n = 0$ die rechte Seite den Wert 1 bedeutet, die durch mehrfache Anwendung der vollständigen Induktion leicht beweisbare Beziehung:

$$s^{-m}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{-n} = \sum_{\nu=0}^{p}\frac{c_\nu}{(s-1)(s-2)\ldots(s-m-n-\nu)} + R;$$
$$c_0 = 1,\ |R| < A|s|^{-m-n-p-1}.$$

Daher folgt

$$\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-r} = \sqrt{2\pi}\cdot 2^{1-s}\sum_{\nu=r}^{\nu=\varkappa} d_{\nu,r}\Gamma(s-\nu) + \bar{R};$$
$$d_{r,r} = 1;\ |\bar{R}| < A|\Gamma(s)|\,|s|^{-k-1},$$

$$\text{(I, 3)}\quad H_r = 2\sqrt{2\pi}\sum_{\nu=r}^{\nu=\varkappa} d_{\nu,r}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Gamma(s-\nu)(2\pi e^{i\varphi})^{-s}\zeta^2(s)ds + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon);$$
$$d_{rr} = 1,\ d_{1,0} = 0.$$

Denn wegen $|\tilde{R}(s)| < A|\Gamma(s)|\,|s|^{-\varkappa-1}$ kann $\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \zeta^2(s)\tilde{R}(s)(\pi e^{i\varphi})^{-s}\,ds$ auf Grund einer ähnlichen Überlegung wie bei Gleichung I, 13 in die Form $a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon)$ gebracht werden kann, indem man den Integrationsweg $s = c + it$ in die drei Stücke $-\infty < t \leqq -1$, $-1 \leqq t \leqq 1$, $1 \leqq t < \infty$ zerlegt und bei den ersten beiden Teilen entsprechende Überlegungen wie oben bei I, 21 anwendet.

Schließlich muß das Integral

$$G_\nu = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s-\nu)\zeta^2(s)z^{-s}ds, \quad z = 2\pi e^{i\varphi}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa$$

asymptotisch in $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varphi$ dargestellt werden. Hierzu wird der Integrationsweg nach rechts parallel in die Gerade $s = c + \nu + 1 + it$ verschoben und hierbei die Pole an den Stellen

$s = 1$ (dreifacher Pol), $2, 3, \ldots, \nu$ im Falle $\nu \geqq 1$, $s = 1$ als doppelter Pol im Falle $\nu = 0$ überschritten; da nun in der Umgebung der Stelle $s = s_0$

$$z^{-s} = (2\pi e^{i\varphi})^{-s} = \left(2\pi e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{-s_0} e^{i\varepsilon s_0} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (s-s_0)^j \frac{\left(\log 2\pi + \frac{i\pi}{2} - i\varepsilon\right)^j}{j!}$$

ist, so ist sicher die Summe der Residuen $= a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon)$,

$$G_\nu = a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon) + \int\limits_{c+\nu+1-i\infty}^{c+\nu+1+i\infty} \Gamma(s'-\nu)\zeta^2(s')z^{-s'}ds';$$

$$z = 2\pi e^{i\varphi}; \text{ setze } s' = s + \nu:$$

$$\text{(I, 41)} \quad G_\nu = a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon) + \left(2\pi e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^{-\nu} e^{i\varepsilon\nu} \int\limits_{c+1-i\infty}^{c+1+i\infty} \Gamma(s)\zeta^2(s+\nu)\,z^{-s}ds.$$

Nun ist aber nach dem in der Einleitung kurz bewiesenen Satze (I, 42)

$$\int\limits_{c+1-i\infty}^{c+1+i\infty} \Gamma(s)\zeta^2(s+\nu)z^{-s}ds = \int\limits_{c+1-i\infty}^{c+1+i\infty} \Gamma(s)\zeta^2(s+\nu)(z-2\pi i)^{-s}ds =$$

$$= \int\limits_{c+1-i\infty}^{c+1+i\infty} \Gamma(s)\zeta^2(s+\nu)e^{is\frac{\varepsilon}{2}}\left(4\pi \sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-s} ds,$$

$$\text{da } 2\pi e^{i\varphi} - 2\pi i = 4\pi \sin\frac{\varepsilon}{2}\, e^{-\frac{i\varepsilon}{2}}$$

ist, und das letzte Integral kann leicht asymptotisch dargestellt werden. Zunächst ist im Falle $\nu = 0$, wenn ich den Integrationsweg parallel nach links in die Gerade $s = -k - \frac{3}{2} + it$ verschiebe, das Residuum an der Stelle $s = 1$

$$\text{Res}\,(s=1) = \left(\frac{i\varepsilon}{2} - \log\left(4\pi\sin\frac{\varepsilon}{2}\right) + \gamma\right)\frac{e^{\frac{i\varepsilon}{2}}}{4\pi\sin\frac{\varepsilon}{2}},$$

das an der Stelle $s = -l$, wenn $l = 0, 1, 2, \ldots k+1$ ist,

$$\text{Res}\,(s=-l) = (-1)^l\zeta^2(-l)\,e^{-il\frac{\varepsilon}{2}}\frac{\left(4\pi\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^l}{l!},$$

der absolute Wert des Integranden auf dem neuen Integrationsweg ist kleiner als $A\left|\Gamma(s)\zeta^2(s)\right|e^{\frac{1}{2}|t|}\varepsilon^{k+\frac{3}{2}}$, das Integral also absolut $< A'\varepsilon^{k+\frac{3}{2}}$ und somit für $\nu = 0$ das ursprüngliche Integral und

$$\text{(I, 43)} \qquad G_0 = \frac{ie^{\frac{i\varepsilon}{2}}}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}\left(\log\frac{1}{\varepsilon} + \gamma - \log 2\pi\right) + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon).$$

Für $\nu > 0$ tritt an der Stelle $s = 1 - \nu$ ein dreifacher Pol auf, setzt man $s = 1 - \nu + u$, so ist in der Umgebung der Stelle $s = 1 - \nu$ der Integrand gleich

$$\left(\frac{1}{u^2} + \frac{2\gamma}{u}\ldots\right)\left(\frac{1}{u} + \frac{\Gamma'(\nu)}{\Gamma(\nu)} + \ldots\right)\frac{1}{\Gamma(\nu)}e^{\frac{i\varepsilon}{2}(1-\nu)}$$
$$\cdot\left(-4\pi\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu-1}\left(1 + uX + \frac{u^2}{2}X^2\ldots\right),$$

wobei $X = \frac{i\varepsilon}{2} - \log\left(4\pi\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ist, also ist entsprechend

$$\text{(I, 44)} \quad G_\nu = \frac{1}{\Gamma(\nu)}e^{\frac{i\varepsilon}{2}(1+\nu) + \frac{i\pi}{2}(1-\nu)}\left(-2\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\nu-1}$$
$$\left(\frac{1}{2}\log^2\left(4\pi\sin\frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(2\gamma + \frac{\Gamma'(\nu)}{\Gamma(\nu)} + \frac{i\varepsilon}{2}\right)\log\left(4\pi\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$
$$+ a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon)$$

für $\nu = 1, 2, \ldots \varkappa$; $\varkappa = k + 2$. Der Inhalt der großen Klammer ist von der Form $\frac{1}{2}\log^2\varepsilon + (\widetilde{a}_0 + \widetilde{\mathfrak{P}}_k(\varepsilon))\log\varepsilon + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon)$. Aus den Gleichungen I, 1, I, 2 und 3 folgt nun

$$\text{(I, 45)} \quad \int_0^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 e^{-\varepsilon t}dt = e^{-\frac{i\varepsilon}{2}} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} C_\nu G_\nu + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon),$$

wobei die Größen C_ν gewisse Konstanten sind, $C_0 = -i$ ist. Nun ist $d_{1,0}$ in I, 3 gleich 0, daher ist $C_1 = 0$. So ergibt sich unter Berücksichtigung von I, 43 und I, 44

$$\text{(I)} \quad \int_0^\infty \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 e^{-\varepsilon t}dt = \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}(\log 2\pi - \gamma) + B$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} \varepsilon^r \left(a_r + a_r' \log\frac{1}{\varepsilon} + a_r'' \log^2 \varepsilon\right) + O(\varepsilon^{k+1}\log^2\varepsilon),$$

q.e.d.; es folgt leicht, daß alle Koeffizienten der rechten Seite reell sind.

II. *Die Beziehung zur Bessel-Thetareihe und zur Zetafunktion zweiter Ordnung.*

Durch dasselbe Verfahren kann man zu einer beliebig genauen asymptotischen Darstellung des Integrales gelangen:

$$I = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 e^{-\varepsilon t}dt.$$

Man erhält entsprechend den Gleichungen I, 1 und I, 2

$$\text{(II, 1)} \quad I = \sum_{r=0}^{\varkappa} b_r I_{r+\frac{1}{2}} + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon);$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}, \quad b_1 = 0, \quad \varkappa = k+2.$$

$$\text{(II, 2)} \quad I_{r+\frac{1}{2}} = e^{-\frac{i\varepsilon}{2} + \frac{i\pi}{2}\left(r-\frac{1}{2}\right)} H_{r+\frac{1}{2}} + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon).$$

Es genügt nun, $H_{\frac{1}{2}}$ und $I_{\frac{1}{2}}$ zu bestimmen, da $I_{r+1+\frac{1}{2}}$ durch Integration sich aus $I_{r+\frac{1}{2}}$ ergibt: es sei $s = \frac{1}{2} + it$, dann ist

$$\text{(II, 3)} \quad I_{r+1+\frac{1}{2}}(\varepsilon) = \int_1^\infty dt\, t^{-1-r} \left|\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \zeta^2(s) \pi^{-s}\right| e^{t\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}$$

$$= -\int_0^\varepsilon I_{r+\frac{1}{2}}(u)\,du + \text{const.}$$

Die Vertauschung der Integrationen war für $r \geqq 0$ gestattet, zum Beispiel im Hinblick auf ein allgemeines Lebesguesches

Konvergenztheorem unter Vorwegnahme des Resultates für $I_{\frac{1}{2}}$; denn weil für $N > 1$, $0 < u \leqq u_0 < 1$

$$\int_N^\infty \left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) \pi^{-\frac{s}{2}} \right|^2 e^{\left(\frac{\pi}{2} - u\right)t} t^{-r} dt < I_{\frac{1}{2}}(u) < A u^{-\frac{1}{2}} \log u^{-1},$$

ist $\lim \int_0^\varepsilon du \int_N^\infty = 0$ für $N \to \infty$.

Es ist nun für $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ (s. auch Einleitung, II, 41)

$$\text{(II, 4)} \quad \frac{1}{8\pi i} H_{\frac{1}{2}}(\varepsilon) = \sum_{n=1}^\infty d(n) K_0(2\pi n e^{i\varphi}) - \frac{e^{-i\varphi}}{4} \log \frac{e^{\gamma - i\varphi}}{4\pi}$$
$$= \Theta(e^{i\varphi}, 0, 0) + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon),$$

die Bestimmung von $H_{\frac{1}{2}}$ — oder $I_{\frac{1}{2}}$ — ist daher äquivalent mit der des Verhaltens der Θ-Reihe auf dem Einheitskreise im ersten Quadranten in der Nähe des Punktes i, da $\exp(i\varphi) = i \exp(-i\varepsilon)$ ist.

Begründung von II, 4: Es ist für $\Re(u) > 0$, $\Re(s) = \sigma > 0$ [6])

$$\int_0^\infty u^{s-1} K_0(2\pi u)\, du = \frac{\pi^{-s}}{4} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right);$$

$$\text{daher} \int_0^\infty u^{s-1} \sum_{n=1}^\infty d(n) K_0(2\pi u n)\, du = \frac{\zeta^2(s) \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}{4\pi^s}$$

für $\sigma > 1$, $\Re(u) > 0$, also auf Grund von Mellins Umkehrformel

$$\sum_{n=1}^\infty d(n) K_0(2\pi u n) = \frac{1}{8\pi i} \int_{c+1-i\infty}^{c+1+i\infty} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \zeta^2(s) (\pi u)^{-s} ds =$$
$$= \frac{1}{4} \operatorname{Res}(s=1) + \frac{1}{8\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$$

für $0 < c < 1$. Das Residuum im Punkte $s = 1$ ist aber $(\gamma - \log 4\pi u) \cdot u^{-1}$, setzt man $u = \exp(i\varphi)$ und berücksichtigt man die Gleichung II, 41 der Einleitung, so folgt II, 4. Es ist nun möglich, das Theta-Problem mit Hilfe einer der zulässigen Transformationen [7])

$$\alpha = \beta = \gamma = 1, \ \delta = 0; \ v = 0; \ u^* = \frac{u}{1 + u^2}, \ v^* = \frac{1}{1 + u^2}$$

---

[6]) Watson, A treatise on the theory of Bessel functions [Cambridge 1922], 13·21; s. auch die vorliegende Anwendung bei Kober, S. 621.

[7]) Kober, 612, 620, und „Transformationen einer bestimmten Besselschen Reihe ...“ [Journ. f. d. r. u. a. Math. 173 (1935)], 65—78.

direkt zu lösen. — Führt man die Zetafunktion zweiter Ordnung ein:

$$\mathrm{Z}(1, 0, u^2;\ z) = \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1^2+m_2^2>0}}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} (m_1^2+u^2m_2^2)^{-z}, \quad \Re(z) > 1,$$

so ist Z bis auf einen Pol an der Stelle $z = 1$ im Endlichen eine reguläre Funktion von z,[8])

$$\Theta(u, 0, 0) = \frac{1}{8}\mathrm{Z}\left(1, 0, u^2;\ \frac{1}{2}\right),$$

also ist unsere Frage äquivalent mit der nach dem Verhalten der Funktion $\mathrm{Z}\left(1, 0, x;\ \frac{1}{2}\right)$ auf der oberen Hälfte des Einheitskreises in der Nähe des Punktes $x = -1$.

III. *Die ζ-verwandten Funktionen.*

Es sei also $f(s) = \Sigma\, \alpha_n n^{-s}$ eine ζ-verwandte, $g(s) = \Sigma\, \beta_n n^{-s}$ die zugehörige Funktion, es bedeute jetzt, wenn $\bar{\alpha}_n$ konjugiert komplex zu α_n, $\bar{\beta}_n$ zu β_n ist: $\bar{f}(s) = \Sigma\, \bar{\alpha}_n n^{-s}$, $\bar{g}(s) = \Sigma\, \bar{\beta}_n n^{-s}$. Dann ist für $s = \frac{1}{2} + it$ auf Grund der Funktionalgleichung III*a* (s. Einleitung):

$$\text{(III}d\text{)}\quad \left|\Gamma^2\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)f^2(s)\left(\frac{\pi}{l}\right)^{-s}\right| =$$

$$= \Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s+\mathfrak{a}}{2}\right)f(s)\bar{f}(1-s)\left(\frac{\pi}{l}\right)^{-\frac{s}{2}+\frac{s-1}{2}}$$

$$= f(s)\bar{g}(s)\Gamma^2\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)\left(\frac{\pi}{l}\right)^{-s}.$$

Man setze nun

$$I_r = \int_1^{\infty} dt\, t^{\frac{1}{2}-\mathfrak{a}-r}\left|\Gamma^2\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)f^2(s)\left(\frac{\pi}{l}\right)^{-s}\right| e^{\varphi t};$$

$$s = \frac{1}{2} + it, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \varepsilon.$$

$$H_r = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(s-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\mathfrak{a}-r}\Gamma^2\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right)f(s)\bar{g}(s)(\pi e^{i\varphi}l^{-1})^{-s}ds;$$

$$\frac{1}{2} < c < 1.$$

---

[8]) Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen [Math. Annalen **56** (1903)], 617 u.f.

$$G_\nu = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s-\nu) f(s) \overline{g}(s) (2\pi e^{i\varphi} l^{-1})^{-s} ds\,;$$
$$\nu = 0, 1, 2, \ldots \varkappa;\ \varkappa = k+2.$$

Es ergibt sich durch genau die gleichen Schlüsse wie oben:

$$\text{(III, 1)} \quad \int_0^\infty \left| f^2\left(\frac{1}{2}+it\right) \right| e^{-\varepsilon t} dt = \int_0^\infty |\overline{g}|^2 e^{-\varepsilon t} dt =$$
$$= \frac{I_0 \cdot 2^{\alpha-1}}{\sqrt{2\pi l}} + \sum_{r=2}^{\varkappa} b_r I_r + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon).$$

$$\text{(III, 2)} \quad I_r = e^{-\frac{i\varepsilon}{2} + \frac{i\pi}{2}(r+\alpha-1)} H_r + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon).$$

$$\text{(III, 3)} \quad H_r = 2^{1-\alpha} \sqrt{2\pi} \sum_{\nu=r}^{\varkappa} d_{\nu,r} G_\nu + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon)\,;$$
$$d_{r,r} = 1,\ d_{1,0} = 0.$$

$$\text{(III, 41)} \quad G_\nu = \left(2\pi e^{\frac{i\pi}{2}} l^{-1}\right)^{-\nu} e^{i\varepsilon\nu}$$
$$\int_{c+1-i\infty}^{c+1+i\infty} \Gamma(s) f(s+\nu) \overline{g}(s+\nu) z^{-s} ds + a_0 + \mathfrak{P}_k(\varepsilon),$$

wenn $z = 2\pi e^{i\varphi} l^{-1}$. Setzt man für $\Re(w) > 1$ die Funktion

$$f(w)\overline{g}(w) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n n^{-w} \sum_{n=1}^\infty \overline{\beta}_n n^{-w} = \sum_{n=1}^\infty A_n n^{-w},$$

so wird das in III, 41 vorkommende Integral gleich

$$E_\nu = \sum_{n=1}^\infty A_n n^{-\nu} \int_{c+1-i\infty}^{c+1+i\infty} \Gamma(s)(nz)^{-s} ds = 2\pi i \sum_{n=1}^\infty A_n n^{-\nu} e^{-2\pi n e^{i\varphi} l^{-1}}.$$

Da nun

$$e^{-2\pi n e^{i\varphi} l^{-1}} = e^{-2\pi n i l^{-1}} \cdot e^{-2\pi n l^{-1}(e^{i\varphi}-i)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} e^{-2\pi n i l^{-1}} \int_{c+1-i\infty}^{c+1+i\infty} \Gamma(s) z_n^{-s} ds$$

ist, wenn $z_n = 2\pi n l^{-1}(e^{i\varphi} - i)$ gesetzt wird, so ist das Integral

$$E_\nu = \int_{c+1-i\infty}^{c+1+i\infty} \Gamma(s)\, F(s+\nu) \left(4\pi l^{-1} \sin\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-s} e^{\frac{is\varepsilon}{2}} ds$$

auf Grund einer ähnlichen Überlegung wie bei Satz I, 42.

Die Funktion F hat hier folgende Bedeutung: Für $\Re(w) > 1$ ist

$$F(w) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n n^{-w} e^{-2\pi n i l^{-1}} = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \alpha_{m_1} \bar{\beta}_{m_2} (m_1 m_2)^{-w} e^{-2m_1 m_2 \pi i l^{-1}},$$

ist also im Falle $\mathfrak{a} = 0$ auf Grund von III c (s. Einleitung) gleich

$$l^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{l} \bar{\alpha}_r \sum_{m_1, m_2}^{1..\infty} \alpha_{m_1} (m_1 m_2)^{-w} e^{-2\pi i l^{-1}(m_1 m_2 \pm m_2 r)}.$$

Die innere Summe ist hier, wenn ich $\alpha_{-m} = \alpha_m$ im Einklange mit III b für $\mathfrak{a} = 0$ definiere, wenn man $m_2 r$ zuerst negativ, dann positiv nimmt, gleich

$$\frac{1}{2} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \alpha_{m_1} (m_1 m_2)^{-w} e^{2m_2 \pi i l^{-1}(r-m_1)} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_1=-1}^{-\infty} \alpha_{m_1} (|m_1| m_2)^{-w} e^{2m_2 \pi i l^{-1}(m_1 - r)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{\substack{m_1=-\infty \\ m_1 \neq 0}}^{+\infty} \alpha_{m_1} m_2^{-w} \left(\frac{\cos 2m_2\pi(r-m_1)l^{-1}}{|m_1|^w} + \right. \\ \left. + \frac{i m_1 \sin 2m_2\pi(r-m_1)l^{-1}}{|m_1|^{w+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r_2=1}^{l} \alpha_{r_2} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m+r_2 l^{-1} \neq 0}}^{+\infty} (m_2 l)^{-w} \left(\frac{\cos 2m_2\pi(r-r_2)l^{-1}}{(m+r_2 l^{-1})^w} + \right. \\ \left. + \frac{i(m+r_2 l^{-1}) \sin 2m_2\pi(r-r_2)l^{-1}}{|m+r_2 l^{-1}|^{w+1}} \right)$$

$$= l^{-w} \sum_{r_2=1}^{l} \alpha_{r_2} \sum_{m_2=1}^{\infty} m_2^{-w} \left(\zeta_1\left(w; \frac{r_2}{l}\right) \cos \frac{2\pi}{l} m_2 (r-r_2) + \right. \\ \left. + i\eta_1\left(w; \frac{r_2}{l}\right) \sin \frac{2\pi}{l} m_2 (r-r_2) \right)$$

$$= l^{-w} \sum_{r_2=1}^{l} \alpha_{r_2} \left(\zeta_1\left(w; \frac{r_2}{l}\right) \zeta_2\left(w; \frac{r-r_2}{l}\right) + i\eta_1\left(w; \frac{r_2}{l}\right) \eta_2\left(w; \frac{r-r_2}{l}\right) \right),$$

also

$$F(w) = l^{-\frac{1}{2}-w} \sum_{r_1, r_2}^{1\ldots l} \bar{\alpha}_{r_1} \alpha_{r_2} \left(\zeta_1\left(w; \frac{r_2}{l}\right) \zeta_2\left(w; \frac{r_1-r_2}{l}\right) + \right. \\ \left. + i\eta_1\left(w; \frac{r_2}{l}\right) \eta_2\left(w; \frac{r_1-r_2}{l}\right) \right).$$

Hierbei ist, wenn $\zeta(s;\alpha)$ für $0<\alpha\leqq 1$ die Bedeutung $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-s}$, für $\alpha=0$ die Bedeutung $\zeta(s)$ hat,

$$\zeta_1(s;\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n+\alpha\neq 0}}^{\infty}(n+\alpha)^{-s}=\frac{1}{2}\big(\zeta(s;\alpha)+\zeta(s;1-\alpha)\big);$$

$$\zeta_2(s;\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\cos 2n\pi\beta,$$

$$\eta_1(s;\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n+\alpha\neq 0}}^{\infty}(n+\alpha)|n+\alpha|^{-s-1}=\frac{1}{2}\big(\zeta(s;\alpha)-\zeta(s;1-\alpha)\big);$$

$$\eta_2(s;\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\sin 2n\pi\beta.$$

Um das Integral E_ν auszuwerten, muß man $F(w)$ in der Umgebung der Stelle $w=1$ in die Laurentsche Reihe entwickeln; $F(w)$ ist sonst im Endlichen regulär; da η_1 und η_2 ganze Funktionen sind, da ferner für $0<\alpha\leqq 1$

$$\zeta(w;\alpha)=\frac{1}{w-1}-\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}+\dots$$

und $\zeta_2(w;0)=\zeta(w)$ ist, erhält man unter Benutzung von III*b* durch eine Rechnung, auf deren Einzelheiten hier wohl verzichtet werden darf, im Falle $\mathfrak{a}=0$:

$$\text{(III, 5)}\quad F(w)=C_0 l^{-\frac{3}{2}}(w-1)^{-2}-C_1 l^{-\frac{3}{2}}(w-1)^{-1}+\dots,$$

$$\text{(III, 51)}\quad C_0=\sum_{r=1}^{l}|\alpha_r|^2=\sum_{r=1}^{l}|\beta_r|^2;$$

$$C_1=2C_0\log l+\sum_{r=1}^{l}\left(|\alpha_r|^2+|\beta_r|^2\right)\frac{\Gamma'(rl^{-1})}{\Gamma(rl^{-1})}.$$

Man erhält daher weiter:

$$G_0=\frac{il^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{i\varepsilon}{2}}}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}}\left(C_0\log\frac{1}{\varepsilon}-C_0\left(\gamma+\log\frac{2\pi}{l}\right)-C_1\right)+a_0+\mathfrak{P}_k(\varepsilon).$$

$$\text{(III)}\quad \int_0^\infty\left|f\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 e^{-\varepsilon t}dt=$$

$$=\frac{C_0}{l}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{C_1+C_0(\gamma+\log 2\pi l^{-1})}{l}+$$

$$+B+\sum_{r=1}^{k}\varepsilon^r\left(a_r+a_r'\log\frac{1}{\varepsilon}+a_r''\log^2\varepsilon\right)+O(\varepsilon^{k+1}\log^2\varepsilon)$$

zunächst für $\mathfrak{a} = 0$. Genau dasselbe Ergebnis erhält man schließlich auch für $\mathfrak{a} = 1$, aber auf Grund der Gleichung

$$(\mathrm{III}, 5') \quad F(w) = -iC_0 l^{-\frac{3}{2}}(w-1)^{-2} + iC_1 l^{-\frac{3}{2}}(w-1)^{-1} + \ldots; \quad \mathfrak{a}=1.$$

Um nun noch das Ergebnis III auf die Reihen $L(s, \chi) = \sum \chi(n) n^{-s}$ im einfachsten Falle, daß $\chi(n)$ ein eigentlicher Charakter (mod. l) ist, anzuwenden, benutze man die unschwer beweisbare Umformung

$$\sum_{(r,l)=1}^{1 \leq r \leq l} \frac{\Gamma'(rl^{-1})}{\Gamma(rl^{-1})} = -\varphi(l)\left(\gamma + \log l + \sum_{p \mid l} \frac{\log p}{p-1}\right).$$

Hier durchläuft p alle Primteiler von l; man erhält so schließlich

$$\int_0^\infty \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\right|^2 e^{-\varepsilon t} dt =$$

$$= \frac{\varphi(l)}{l} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varphi(l)}{l}\left(\gamma + \log \frac{l}{2\pi} + 2 \sum_{p \mid l} \frac{\log p}{p-1}\right) \cdot \frac{1}{\varepsilon} +$$

$$+ B + \sum_{r=1}^{k} \varepsilon^r \left(a_r + a_r' \log \frac{1}{\varepsilon} + a_r'' \log^2 \varepsilon\right) + O(\varepsilon^{k+1} \log^2 \varepsilon).$$

(Eingegangen den 28. April 1935.)