COMPOSITIO MATHEMATICA

G. VALIRON

Sur les domaines d'univalence des fonctions entières d'ordre nul

Compositio Mathematica, tome 3 (1936), p. 129-135

<http://www.numdam.org/item?id=CM_1936__3__129_0>

Sur les domaines d'univalence des fonctions entières d'ordre nul

par

G. Valiron

Paris

Le but de cette Note est de démontrer la proposition suivante:

I. *A toute fonction entière d'ordre nul* $f(z)$ *correspond une suite infinie de domaines connexes finis* D_q $(q=1, 2, \ldots)$ *s'éloignant indéfiniment lorsque* q *croît indéfiniment, et de nombres correspondants* A_q *indéfiniment croissants avec* q, *jouissant de la propriété suivante. Pour chaque valeur* q *la fonction* $Z=f(z)$ *est univalente dans* D_q *et représente conformément* D_q *soit sur le cercle* $|Z| < A_q$, *soit sur ce cercle privé d'un segment joignant un point intérieur à la circonférence, soit sur ce cercle privé de deux segments sans points communs joignant deux points intérieurs à la circonférence.*

Cet énoncé est lié au théorème de Bloch et aux théorèmes généraux donnés par M. Ahlfors dans diverses notes et mémoires [1]) et à une proposition non encore démontrée que j'ai signalée comme probable dans une conférence au Congrès de Zürich [2]) et établie dans un mémoire récent [3]) pour une classe de fonctions entières d'ordre nul.

Le théorème I est une conséquence de la proposition IV donnée au no. 2; des propositions plus précises concernant une classe assez large de fonctions (II et III) sont démontrées au no. 1. Il semble bien qu'un énoncé qui ne différerait de IV que par le remplacement des égalités (15) par les inégalités du théorème de Wiman, est encore valable pour les fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, mais la méthode employée ici ne conduirait pas à cette proposition précise et ne fournirait qu'un résultat imparfait qu'il est inutile d'expliciter.

1. $f(z)$ étant une fonction entière, nous désignons par $M(r, f)$

---

[1]) Voir notamment: Acta soc. sc. Fennicae (Nova series) 2 (1933), no. 2.

[2]) Kongreß, Zürich 1932, 1, 276.

[3]) A paraître dans le Bull. sciences math.

le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, par $n(r, f)$ le nombre de ses zéros dans le cercle $|z| \leqq r$, par r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, les zéros étant rangés par ordre de modules non décroissants et chacun d'eux étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

Nous considérerons d'abord les fonctions telles que

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log [\log M(r, f)]}{\sqrt{\log r}} = 0. \tag{1}$$

De l'inégalité de Jensen on déduit par des procédés bien connus que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\sqrt{\log r_n}} = 0. \tag{2}$$

Posons

$$\left.\begin{array}{ll} y_n(r) = \log n \sqrt{\dfrac{\log r}{\log r_n}} & \text{si } 1 < r_{n_0} < r \leqq r_n \\ y_n(r) = \log n & \text{si } r \geqq r_n \end{array}\right\} n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$$

D'après (2), pour chaque r supérieur à r_{n_0}, $y_n(r)$ a un maximum, soit $y(r)$. $y(r)$ est non décroissant et coïncide successivement dans des segments adjacents avec une suite infinie de fonctions $y_n(r)$; le rapport $\dfrac{y(r)}{\sqrt{\log r}}$ est non croissant et tend vers 0. La fonction

$$\varrho(r) = \frac{y(r)}{\log r}$$

est ce que j'ai appelé un exposant de la suite des zéros [4]). On a

$$n \leqq r_n^{\varrho(r_n)}$$

pour tous les $n > n_0$, l'égalité ayant lieu pour une suite infinie de valeurs de n que l'on appelle indices principaux et que l'on désignera par N, $\varrho(r) \log r$ ne décroît pas. En outre, ici, $[\varrho(r)]^2 \log r$ tend vers 0 lorsque r croît indéfiniment.

D'après les résultats d'un article précédent [5]) obtenus en appliquant la méthode d'exclusion de Boutroux aux zéros dont le module appartient au segment

$$R = r_N, \quad R' = R e^{\frac{1}{\varrho(R)\sqrt{\log R}}},$$

il existe des circonférences $|z| = r = \dfrac{R'}{k}$, k restant compris

[4]) Math. Annalen 70 (1911), 471—498; voir aussi Annales Fac. sc. Toulouse (3) 5 (1913), 117—257.

[5]) Nouvelles Annales de Math. (4) 11 (1911), 498—508.

entre deux nombres fixes supérieurs à 1, telles que sur ces circonférences, on ait

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = [1 + o(1)] \frac{n(|z|, f)}{z}. \tag{3}$$

D'autre part, la même méthode de Boutroux appliquée dans mon mémoire cité des Annales de Toulouse [6]) montre que, sur ces mêmes circonférences le théorème de Littlewood est valable: on a

$$\log |f(z)| = [1 + o(1)] \log M(r, f). \tag{4}$$

Ainsi:

II. *Pour toute fonction entière vérifiant la condition* (1), *il existe une suite infinie de circonférences* C_m, $|z| = R_m$, *lim* $R_m = \infty$, *sur lesquelles* (3) *et* (4) *ont lieu simultanément.*

Si l'on pose

$$A_m = \sqrt{M(R_m, f)},$$

les points de la couronne $R_m < |z| < R_{m+1}$ en lesquels $|f(z)| < A_m$ forment des domaines simplement connexes Δ_m^p, $p = 1, 2, \ldots, q_m$, ne coupant pas les circonférences limites C_m, C_{m+1}. Dans chacun des Δ_m^p, $f(z)$ prend le même nombre de fois les valeurs de module inférieur à A_m. En outre, (3) étant vérifiée sur C_m et C_{m+1}, on a

$$n(R_m, f') = n(R_m, f) - 1, \quad n(R_{m+1}, f') = n(R_{m+1}, f) - 1,$$

$f'(z)$ a le même nombre de zéros que $f(z)$ dans la couronne; il existe donc au moins un domaine Δ_m^p dans lequel $f'(z)$ a au plus autant de zéros que $f(z)$. Par suite:

III. $f(z)$ *vérifiant la condition* (1), *il existe une suite de domaines finis* Δ_m *s'éloignant indéfiniment, lorsque m tend vers l'infini, et de nombres correspondants* A_m, *lim* $A_m = \infty$, *tels que, lorsque* z *décrit* Δ_m, *le point* $Z = f(z)$ *décrit une surface riemannienne formée de* p_m *cercles de rayon* A_m *liés par* p_m *points de ramification au plus, chacun d'eux étant compté avec considération de son ordre.*

En joignant les points de ramification aux circonférences limites par des segments rectilignes sans points communs, ce qui est loisible, on obtient p_m domaines à un feuillet constitués par des cercles privés de certains segments, le nombre total de ces segments étant au plus $2p_m$, de sorte que l'un au moins de

---

[6]) loc. cit. On peut aussi dans les deux démonstrations utiliser un procédé d'intégration, comme je l'ai fait dans mes Lectures on the general theory of integral functions, 79.

ces cercles à un feuillet n'est privé que de deux segments au plus. On obtient donc l'énoncé I pour les fonctions considérées.

2. On arrive à la même conclusion, sans qu'il soit nécessaire de partir de propriétés aussi précises que II et III.

Rappelons les propriétés suivantes des fonctions entières d'ordre nul: si β est un nombre positif donné arbitraire, chaque couronne

$$R < |z| < (1+3\beta)R$$

contient des couronnes d'épaisseur totale supérieure à $2R\beta$ dans lesquelles

$$\log|f(z)| > N(r,f) - K(\beta)r\int_r^\infty n(x,f)\frac{dx}{x^2} + \alpha, \text{[7]} \tag{5}$$

où

$$N(r,f) = \int_0^r [n(x,f) - n(0,f)]\frac{dx}{x} + n(0,f)\log r,$$

$K(\beta)$ ne dépendant que de β et α ne dépendant que du comportement de $f(z)$ à l'origine. Pour tous les r, on a [8])

$$\log M(r,f) = N(r,f) + \alpha + h(r)r\int_r^\infty n(x,f)\frac{dx}{x^2}, \tag{6}$$

$h(r)$ étant compris entre 0 et 1. Enfin [9])

$$|\log M(r,f') - \log M(r,f)| = O[\log r]. \tag{7}$$

J'ai montré d'autre part dans un mémoire déjà cité [10]) qu'on peut trouver une fonction $W(X)$ jouissant des propriétés suivantes: $W(X)$ a une dérivée $W'(X)$ qui est positive, non décroissante, non bornée, continue; $\frac{W'(X)}{W(X)}$ ne croît pas et tend vers 0 et $\frac{W(X)}{X}$ croît indéfiniment lorsque X croît indéfiniment; enfin

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\frac{\log M(r,f)}{W(\log r)} = 1. \tag{8}$$

L'inégalité de Jensen (contenue dans (6)) donne alors

$$N(r,f) < [1+o(1)]W(\log r),$$

---

[7]) Lectures on ..., 133—135.

[8]) Lectures on ..., 132.

[9]) Lectures, ..., 35.

[10]) loc. cit. (3).

d'où l'on déduit, eu égard aux propriétés de $W(X)$ [11])

$$n(r,f) < [4 + o(1)]W'(\log r)$$

et

$$r\int_r^{\infty} n(x,f)\frac{dx}{x^2} = o\,[W(\log r)],$$

de sorte que (5) et (6) s'écrivent

$$\log|f(z)| > N(r,f) - o[W(\log r)], \tag{9}$$

$$|\log M(r,f) - N(r,f)| = o[W(\log r)]. \tag{10}$$

Mais, d'après (7) l'égalité (8) reste valable pour $f'(z)$, $f'(z)$ vérifie donc aussi les inégalités

$$\log|f'(z)| > N(r,f') - o[W(\log r)], \tag{11}$$

$$|\log M(r,f') - N(r,f')| = o[W(\log r)], \tag{12}$$

et de (10), (12) et (7) on déduit

$$|N(r,f) - N(r,f')| = o[W(\log r)]. \tag{13}$$

En vertu de (8), $n(r,f)$ ne peut être constamment inférieur à $W'(\log r)\gamma$, $\gamma < 1$, à partir d'une valeur de r; par suite, il existe un nombre μ compris entre 1 et 4 tel que

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\,\frac{n(r,f)}{W'(\log r)} = \mu.$$

η étant un nombre donné positif et arbitrairement petit, soit R un nombre tel que

$$n(R,f) > (1-\eta)\mu W'(\log R)$$

$$n(r,f) < (1+\eta)\mu W'(\log r) \text{ si } r > R,$$

et soient R' et R'' définis par

$$W(\log R') = (1+\eta)W(\log R),$$

$$W(\log R'') = (1+\eta)W(\log R').$$

Pour $R < x < R'$, on a

$$\frac{W'(\log x)}{W(\log x)} \leqq \frac{W'(\log R)}{W(\log R)},$$

donc

$$W'(\log x) \leqq (1+\eta)W'(\log R)$$

---

[11]) loc. cit. (3).

et

$$N(R',f) > \int_R^{R'} n(x,f)\frac{dx}{x} > (1-\eta)\mu \int_R^{R'} W'(\log R)\frac{dx}{x} > \frac{1-\eta}{1+\eta}\mu \int_R^{R'} W'(\log x)$$

$$= \frac{1-\eta}{1+\eta}\eta\mu W(\log R) = \frac{1-\eta}{(1+\eta)^2}\eta\mu W[\log R'].$$

D'autre part, si k est borné,

$$\text{(14)} \qquad W[\log (kr)] < k^{o(1)} W(\log r) = [1+o(1)]W(\log r),$$

ce qui montre de plus que $\frac{R'}{R''}$ tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. D'après (13), (9), (10), (11), (12), le théorème de Littlewood s'applique simultanément à $f(z)$ et à $f'(z)$ sur des circonférences $|z| = r$ appartenant à la couronne

$$R' < r < (1+3\beta)R',$$

pourvu que R soit assez grand. On a d'autre part

$$n[(1+3\beta)R', f'] < (1+\eta)^3\mu W'(\log R') < \frac{(1+\eta)^4}{1-\eta} n(R,f),$$

sinon, on aurait pour $R'(1+3\beta) \leqq x < R''$

$$n(x,f') \geqq (1+\eta)^3\mu W'(\log R') \geqq (1+\eta)^2\mu W'(\log x),$$

$$n(x,f) < (1+\eta)\mu W'(\log x),$$

donc

$$\int_{R'(1+3\beta)}^{R''} [n(x,f') - n(x,f)]\frac{dx}{x} > \eta(1+\eta)\mu[W(\log R'') - W[\log (R'(1+3\beta)$$

$$= \eta(1+\eta)\mu[W(\log R'') - W(\log R')] - o[W(\log R')]$$

$$= \eta^2\mu W(\log R'') - o[W(\log R')],$$

ce qui est en contradiction avec (13). On arrive ainsi à la proposition suivante:

IV. *Etant donnée une fonction entière d'ordre nul,* $f(z)$, *il existe une suite de circonférences* C_q, $|z| = R_q$, $\lim R_q = \infty$, *sur lesquelles*

$$\text{(15)} \qquad \log|f(z)| = [1+o(1)]\log M(|z|, f),$$

$$\log|f'(z)| = [1+o(1)]\log M(|z|, f'),$$

$$n(|z|, f') < [1+o(1)]n(|z|, f).$$

En ne considérant s'il y a lieu qu'une suite extraite de la suite R_q, on peut supposer que

$$[n(R_q, f) \,/\, n(R_{q+1}, f)] \to 0.$$

Les domaines Δ_q^p, $p = 1, 2, \ldots, n_q$, appartenant à la couronne limitée par C_q et C_{q+1} et tels que

$$|f(z)| < \sqrt{M(R_q, f)}$$

sont complètement intérieurs à la couronne; dans l'un d'eux au moins, soit Δ_q, le nombre des zéros de $f'(z)$ est au plus égal à $[1+o(1)]p_q$, p_q étant le nombre des zéros de $f(z)$ donc aussi l'ordre de multivalence du domaine. Comme à la fin du no. 1, ceci entraîne l'énoncé I.

(Reçu le 14 mai 1935).