

# COMPOSITIO MATHEMATICA

F. DE KOK

## **Über die Randwerte beschränkter harmonischer Funktionen**

*Compositio Mathematica*, tome 2 (1935), p. 402-405

[http://www.numdam.org/item?id=CM\\_1935\\_\\_2\\_\\_402\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__2__402_0)

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Über die Randwerte beschränkter harmonischer Funktionen

von

F. de Kok

Utrecht

---

Es sei die Funktion  $u(z) = u(x+iy)$  für  $y > 0$  harmonisch und beschränkt. Dann gilt bekanntlich für jedes  $z$  mit  $y > 0$  die Poissonsche Integraldarstellung:

$$(1) \quad u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(t) dt}{(t-x)^2 + y^2} dt,$$

wo  $\lambda(t)$  eine beschränkte und meßbare Funktion ist.

Wir wissen, daß auf dem vollen Maß, wo  $\lambda(t)$  approximativ stetig ist, gilt

$$u(z) \rightarrow \lambda(t)$$

für  $z \rightarrow t$ ,  $y > 0$  und  $\left| \frac{x-t}{y} \right| < a < \infty$ ,  $a$  fest.

Umgekehrt wird durch das Integral in (1) eine beschränkte harmonische Funktion dargestellt in der Halbebene  $D(y > 0)$ , wenn  $\lambda(t)$  beschränkt und meßbar ist.

Im Folgenden werden wir jetzt einen Satz beweisen, der eine hinreichende Bedingung gibt, damit ein Randwert existiert bei einer bestimmten tangentiellen Annäherung.

*Definition.* Ist  $f(t)$  meßbar für  $a \leq t \leq b$ ,  $a < b$ , und  $\psi(t)$  stetig für  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\psi(t) > 0$  für  $0 < t \leq 1$ ,  $\psi(0) = 0$ , dann heißt die Funktion  $f(t)$  rechts approximativ stetig in Bezug auf  $\psi$  für  $t = t_0$ , ( $a \leq t_0 < b$ ) wenn bei jedem  $\varepsilon > 0$  gilt

$$\frac{\mu E_t \{ |f(t) - f(t_0)| > \varepsilon, \quad 0 < t - t_0 < h \}}{\psi(h)} \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0.$$

Im Zähler steht das Maß der Punktmenge, wo

$$|f(t) - f(t_0)| > \varepsilon, \quad 0 < t - t_0 < h.$$

*Satz.* Es sei  $\psi(t) > 0$  für  $0 < t \leq 1$ ,  $\psi(0) = 0$ ,  $|\psi'(t)| < M$  für  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\psi'(0) = 0$  ( $M$  endlich und unabhängig von  $t$ ).

Wenn nun in (1)  $\lambda(t)$  rechts approximativ stetig ist in Bezug auf  $\psi$  für  $t = t_0$ , dann hat  $u(z)$  den Randwert  $\lambda(t_0)$  für  $z \rightarrow t_0$  auf dem Bogen  $y = \psi(x - t_0)$ ,  $x > t_0$ .

Zum Beweis ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit,  $t_0 = 0$  und  $\lambda(0) = 0$  anzunehmen.

Ist  $\varepsilon > 0$ , so sei  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , derart gewählt, daß

$$\mu E_t \{ |\lambda(t)| > \varepsilon, 0 < t < h \} < \varepsilon \psi(h)$$

für  $0 < h \leq \delta$ .

Nun ist

$$\pi u(z) = y \int_{|t| > \delta} \frac{\lambda(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt + y \int_{-\delta}^0 + y \int_0^{\delta} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Wenn  $|\lambda(t)| < K$  für  $-\infty < t < \infty$  und  $0 < x < \frac{\delta}{2}$ , dann ist

$$|I_1| \leq y \int_{\delta}^{\infty} \frac{K}{\left(t - \frac{\delta}{2}\right)^2} dt + y \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{K}{t^2} dt \rightarrow 0 \quad \text{für } y \rightarrow 0.$$

Ferner ist

$$|I_2| \leq y \int_{-\delta}^0 \frac{K}{(t-x)^2 + y^2} dt = K \left\{ \arctg \frac{\delta + x}{y} - \arctg \frac{x}{y} \right\} \rightarrow 0$$

für  $x \rightarrow 0$ ,  $x > 0$  und  $y = \psi(x)$ , wegen  $\frac{x}{\psi(x)} \rightarrow +\infty$  bei  $x \rightarrow 0$ .

Wenn  $E_1$  die Punktmenge ist, wo  $|\lambda(t)| \leq \varepsilon$ ,  $0 < t < \delta$ , und  $E_2$  die Komplementärmenge von  $E_1$  auf dem Intervall  $(0, \delta)$ , dann ist

$$I_3 = y \int_{E_1} + y \int_{E_2} = I_4 + I_5.$$

$$|I_4| \leq \varepsilon y \int_0^{\delta} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} \leq \varepsilon \pi \quad \text{für } y > 0.$$

Wenn  $\mu(t)$  das Maß von  $E_2$  auf  $(0, t)$  bedeutet, dann bekommt man

$$|I_5| \leq Ky \int_{E_2} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2} \leq Ky \int_0^{\delta} \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} \frac{d\mu(t)}{dt} dt$$

$$= Ky \frac{\mu(\delta)}{(\delta-x)^2 + y^2} + Ky \int_0^{\delta} \mu(t) \frac{2(t-x)}{\{(t-x)^2 + y^2\}^2} dt.$$

Das erste Glied strebt gegen Null für  $y \rightarrow 0$ ,  $0 < x < \frac{\delta}{2}$ .

Das letzte Integral zerlegen wir in zwei Bestandteile: von 0 bis  $x$  und von  $x$  bis  $\delta$  ( $0 < x < \delta$ ).

$$\begin{aligned} & \left| Ky \int_0^x \mu(t) \frac{2(t-x)}{\{(t-x)^2 + y^2\}^2} dt \right| \leq K\varepsilon y \int_0^x \frac{\psi(t) \cdot 2(x-t)}{\{(x-t)^2 + y^2\}^2} dt \\ &= K\varepsilon y \int_0^x \psi(t) d \frac{1}{(x-t)^2 + y^2} = \\ &= K\varepsilon y \frac{\psi(x)}{y^2} - K\varepsilon y \int_0^x \frac{\psi'(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt \leq K\varepsilon + K \cdot M \cdot \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

für  $y = \psi(x)$ .

$$\begin{aligned} 0 &\leq Ky \int_x^\delta \mu(t) \frac{2(t-x)}{\{(t-x)^2 + y^2\}^2} dt \leq \\ &\leq K\varepsilon y \int_x^\delta \frac{\psi(t) \cdot 2(t-x)}{\{(t-x)^2 + y^2\}^2} dt = -K\varepsilon y \int_x^\delta \psi(t) d \frac{1}{(t-x)^2 + y^2} \\ &= K\varepsilon y \left\{ \frac{\psi(x)}{y^2} - \frac{\psi(\delta)}{(\delta-x)^2 + y^2} \right\} + \\ &\quad + K\varepsilon y \int_x^\delta \frac{\psi'(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt \leq K\varepsilon + K \cdot M \cdot \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

für  $y = \psi(x)$ .

Wir finden also, daß für  $0 < x < \frac{\delta}{2}$ ,  $y = \psi(x)$

$$|u(z)| \leq C\varepsilon + o(1),$$

$C$  eine positive endliche Konstante, woraus die Behauptung folgt.

*Beispiel.* Wir definieren die Funktion  $\lambda(t)$  folgendermaßen:

$$\lambda(t) = 1 \text{ für } \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{sk}} \leq t \leq \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots, s \geq 2, \quad s \text{ fest.}$$

$\lambda(t) = 0$  in allen übrigen Punkten.

Es sei  $\varepsilon > 0$  und  $\frac{1}{2^{\nu+1}} < h \leq \frac{1}{2^\nu}$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$

Dann ist

$$\frac{\mu E_t\{|\lambda(t)| > \varepsilon, 0 < t < h\}}{h^s} < \frac{\sum_{k=p}^{\infty} \frac{1}{2^{sk}}}{\frac{1}{2^{s(v+1)}}} = \frac{2^{2s}}{2^s - 1}.$$

Also gilt bei jedem  $\varepsilon > 0$

$$\frac{\mu E_t\{|\lambda(t)| > \varepsilon, 0 < t < h\}}{h^p} \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0, p < s, p \text{ fest.}$$

Folglich strebt  $u(z)$  gegen Null, wenn  $z$  gegen Null strebt auf dem Bogen  $y = x^p$ ,  $x > 0$ ,  $1 < p < s$ ,  $p$  fest.

Wir wollen jetzt zeigen, daß  $u(z)$  nicht gegen Null strebt auf dem Bogen  $y = x^p$ ,  $x > 0$ ,  $p \geq s$ ,  $p$  fest.

$$\pi u(z) = y \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2}, \quad a_k = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{sk}}, \quad b_k = \frac{1}{2^k}.$$

Also:

$$\pi u(z) > y \int_{a_m}^{b_m} \frac{dt}{(t-x)^2 + y^2}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

oder

$$\pi u(z) > \arctg \frac{b_m - x}{y} - \arctg \frac{a_m - x}{y}.$$

Hieraus folgt für  $x = \frac{a_m + b_m}{2}$ ,  $y = x^p$ ,  $p \geq s$ ,

$$\begin{aligned} \pi u(z) &> \arctg \frac{\frac{1}{2}(b_m - a_m)}{\left\{\frac{1}{2}(b_m + a_m)\right\}^p} - \\ &\quad - \arctg \frac{\frac{1}{2}(a_m - b_m)}{\left\{\frac{1}{2}(a_m + b_m)\right\}^p} = 2 \arctg \frac{\frac{1}{2} \frac{b_m - a_m}{\left(\frac{a_m + b_m}{2}\right)^p}}{1} \\ &\geq 2 \arctg \frac{2^{s-1}}{\left\{2 - \frac{1}{2^{m(s-1)}}\right\}^s} > \arctg \frac{1}{2} \end{aligned}$$

von einem gewissen  $m$  an.

(Eingegangen den 7. Februar 1934.)