

COMPOSITIO MATHEMATICA

R. WAVRE

**Sur les polydromies que présentent les potentiels
newtoniens lorsqu'ils sont prolongés au
travers des corps générateurs**

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 69-84

http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__69_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur les polydromies que présentent les potentiels newtoniens lorsqu'ils sont prolongés au travers des corps générateurs

par

R. Wavre

Genève

§ 1. *Introduction.*

L'objet de cet article ressortira clairement si nous nous expliquons tout d'abord au sujet d'un cas particulier.

Envisageons un corps homogène, par exemple un tétraèdre T , il crée dans tout l'espace un certain potentiel newtonien U . C'est une fonction univoque, c'est-à-dire qu'elle n'a qu'une seule valeur en un point donné de l'espace. A l'extérieur de T c'est une fonction harmonique que nous représenterons par U_e ; à l'intérieur de T c'est une fonction U_i que l'on démontre être analytique mais non harmonique. U_i ne peut être le prolongement analytique de U_e au travers des faces du corps. On sait cependant que U_e est prolongeable au travers de chaque face, de l'extérieur vers l'intérieur et U_i de l'intérieur vers l'extérieur mais l'on ne s'est pas préoccupé, que je sache, des singularités des prolongements analytiques de ces deux potentiels.

Nous montrerons que U_e n'est qu'une branche d'une fonction harmonique multiforme. Cette dernière n'admet, dans tout l'espace réel, que les arêtes du tétraèdre comme singularité à distance finie. Ces arêtes sont des lignes de ramification autour desquelles s'échangent une infinité de branches de la fonction multiforme. Ces branches ne diffèrent les unes des autres que par des fonctions périodes nulles sur les arêtes. Le potentiel U_e est ainsi prolongeable le long d'un chemin quelconque de l'espace réel, évitant les arêtes. Le potentiel U_i n'est, lui aussi, qu'un élément d'une fonction analytique multiforme qui admet les mêmes arêtes comme lignes de ramifications et aucune autre singularité dans tout l'espace réel, à part les singularités à l'infini.

Le problème abordé ici est donc celui de l'étude dans tout son domaine d'existence de la fonction analytique dont un élément coïncide dans une région de l'espace avec un potentiel newtonien donné.

Nous résumerons les résultats essentiels au sujet du prolongement analytique au travers d'une surface qui porte, ou limite les matières attirantes. M. E. Schmidt a fondé ce problème local du prolongement analytique sur le théorème de Cauchy-Kowalewska. Ce dernier joue, comme on le verra, dans l'étude des singularités, un rôle analogue à celui que joue le problème de Dirichlet dans l'étude des potentiels eux-mêmes.

§ 2. *Sur le théorème de Cauchy-Kowalewska.*

Soit Σ une portion régulière d'une surface analytique, portion formant un ensemble ouvert et simplement connexe.

Soit σ une partie de Σ formant un ensemble fermé et simplement connexe.

Soit $\varrho(x, y, z)$ une fonction holomorphe, c'est-à-dire développable suivant les puissances des trois variables x, y, z en chaque point de Σ . Cette fonction ϱ est donc holomorphe au voisinage de σ .

Soient $f(u, v)$ et $g(u, v)$ deux fonctions holomorphes en chaque point de Σ , des paramètres u et v de représentation de Σ .

En vertu du théorème de Cauchy-Kowalewska, il existe une solution $p(x, y, z)$ et une seule des équations suivantes:

$$(1) \quad \Delta p = 4\pi\varrho \quad \text{au voisinage de } \sigma$$

$$(2) \quad \frac{dp}{dn} = 4\pi g \quad \text{sur } \sigma$$

$$(3) \quad p = -4\pi f \quad \text{sur } \sigma.$$

La fonction p sera holomorphe au voisinage de σ et les singularités de p sont toutes situées à une distance supérieure à un nombre positif de la surface σ . Ces singularités ne dépendent que des fonctions ϱ, f, g et de la surface Σ . La portion σ peut être supposée aussi petite que l'on voudra, de forme et de position quelconques sur Σ ; la solution p sera toujours la même. En effet, soient σ' et σ'' deux portions de Σ , elles définiraient deux fonctions p' et p'' , mais ces dernières doivent coïncider avec la solution p relative à une portion σ d'un seul tenant et contenant σ' et σ'' . Voir par exemple *Le problème de Cauchy* par J. Hadamard.

§ 3. *Le mémoire de M. E. Schmidt.*

Soit τ un volume assez petit pour que la fonction p du paragraphe précédent y soit holomorphe. Supposons τ limité par une surface fermée et régulière s . Une célèbre identité de Green permet d'écrire.

$$\int_{\tau} \frac{1}{r} \Delta p \, d\tau + \int_s \left(\frac{1}{r} \frac{dp}{dn} - p \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) ds = \begin{cases} 0 & \text{hors de } \tau \\ -4\pi p & \text{dans } \tau \end{cases}$$

suivant la position du point argument. Les dérivées normales sont prises vers l'intérieur. Cette formule est encore valable si la surface s est composée de deux surfaces régulières: s' et une surface σ considérée au paragraphe précédent. Si l'on tient compte de la relation $s = s' + \sigma$ et des conditions (1) dans τ , (2) et (3) sur σ , l'on aura:

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \frac{\varrho}{r} \, d\tau + \int_{\sigma} \frac{g}{r} \, d\sigma + \int_{\sigma} f \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \, d\sigma = \\ = -\frac{1}{4\pi} \int_{s'} \left(\frac{1}{r} \frac{dp}{dn} - p \frac{d}{dn} \frac{1}{r} \right) ds' - \begin{cases} 0 & \text{hors de } \tau \\ p & \text{dans } \tau. \end{cases} \end{aligned}$$

Représentons par U le premier membre de cette équation et par H le premier terme du second membre. L'on aura

$$U = H - \begin{cases} 0 & \text{hors de } \tau \\ p & \text{dans } \tau. \end{cases}$$

La fonction H est harmonique donc analytique hors de S' et par conséquent sur σ . Cette remarque faite, partons d'un point hors de τ et entrons dans τ par σ ; le second membre pris initialement hors de τ ne cesse d'être harmonique et la valeur obtenue à l'intérieur de τ par prolongement est H ; elle ne coïncide pas avec la valeur de U dans τ qui est $H - p$.

L'on a: *le potentiel U calculé initialement hors de τ puis prolongé au travers de σ , jusque dans τ , est égal au potentiel calculé directement dans τ plus la solution p des équations (1), (2), (3).* L'on peut envisager alors les trois cas particuliers suivants:

1. $\varrho = 0$, $g = 0$, $f = f$, alors U se réduit à un potentiel de double couche.

2. $\varrho = 0$, $g = g$, $f = 0$, alors U se réduit à un potentiel de simple couche.
3. $\varrho = \varrho$, $g = 0$, $f = 0$, alors U se réduit à un potentiel newtonien ordinaire.

Nous aurons encore besoin d'un théorème de H. BRUNS: le potentiel dû à un volume attirant est holomorphe en un point intérieur au volume si la densité γ est elle-même holomorphe. M. E. SCHMIDT le démontre ainsi: P étant le point envisagé et π une surface plane passant par P , le problème de Cauchy

$$\Delta p = 4\pi\varrho, \text{ avec } \frac{dp}{dn} = 0 \text{ et } p = 0 \text{ sur } \pi$$

admet une solution et une seule $p(x, y, z)$ holomorphe au voisinage de P . Si S est une surface sphérique centrée en P et tout entière, ainsi que son intérieur T , dans le domaine d'holomorphie de p , l'on aura dans T

$$(4) \quad \int \frac{\varrho}{r} dT = \frac{1}{4\pi} \int_s \left(\frac{1}{r} \frac{dp}{dn} - p \frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right) ds - p;$$

d'où il appert que le potentiel créé par T est bien holomorphe dans T , car il en est ainsi de l'intégrale étendue à s et de la fonction p . En plus, s'il y a des masses attirantes hors de T , elles créent dans T un potentiel harmonique, qui s'ajouterait sans faire disparaître l'holomorphie.

On déduit en plus de (4) l'équation de Poisson, car

$$\Delta \int \frac{\varrho}{r} dT = 0 - \Delta p = -4\pi\varrho.$$

Ce sont là les résultats essentiels que nous utiliserons par la suite.

§ 4. Remarques.

M. E. SCHMIDT paraît s'être plus spécialement intéressé, comme le font les traités classiques, aux discontinuités du potentiel et de ses dérivées normales quand on traverse la surface qui porte ou limite les corps générateurs. Cette question se ramène, en effet, à l'étude sur cette surface de la fonction p . La proposition de M. E. SCHMIDT peut s'écrire très symboliquement:

$$p = U_{\text{prolongée}} - U.$$

A cet égard, rappelons que si p est constant sur σ le laplacien peut

s'exprimer ainsi, en chaque point de cette surface (voir nos „Figures planétaires et géodésie”, 51).

$$\Delta p = \frac{d^2 p}{dn^2} - c \frac{dp}{dn}.$$

Les dérivées normales sont prises dans un sens choisi à volonté et c est le double de la courbure moyenne de la surface σ au point où l'on opère, les rayons principaux étant comptés positivement dans ce sens-là. Considérons les trois cas particuliers:

1. $\varrho = 0$, $g = 0$, $f = \text{constante}$. Alors U se réduit à un potentiel de double couche et l'on a sur la couche

$$p = f, \quad \frac{dp}{dn} = 0, \quad \frac{d^2 p}{dn^2} = 0;$$

d'où discontinuité du potentiel et raccord des dérivées normales première et seconde.

2. $\varrho = 0$, $g = g$, $f = 0$. Alors U se réduit à un potentiel de simple couche et l'on a sur la couche:

$$p = 0, \quad \frac{dp}{dn} = 4\pi g, \quad \frac{d^2 p}{dn^2} = 4\pi c g;$$

d'où: raccord des deux potentiels, discontinuité des dérivées normales et discontinuité des dérivées normales secondes, à moins que la couche ne soit portée par une surface minima, $c \equiv 0$.

En d'autres termes, si une simple couche est portée par une surface minima, il y a raccord des dérivées normales secondes des potentiels de part et d'autre de la couche.

3. $\varrho = \varrho$, $g = 0$, $f = 0$. Alors U se réduit au potentiel de volume et l'on a sur la frontière

$$p = 0, \quad \frac{dp}{dn} = 0, \quad \frac{d^2 p}{dn^2} = 4\pi \varrho.$$

Ces relations pour les dérivées secondes nous ont paru intéressantes à dégager. Elles complètent à certains égards le point de vue classique.

§ 5. *Précisions et notations.*

Envisageons un corps générateur c . Il crée un potentiel newtonien U que nous noterons quelquefois U^c pour rappeler qu'il est engendré par c . L'on a, c'est bien connu,

$$U^{c'+c''} = U^{c'} + U^{c''}.$$

En plus, le potentiel peut être calculé en un point P de l'espace ce que nous noterons U_P ; ou dans une région e de l'espace, ce que nous représenterons par U_e . Ainsi

$$U_P^c = \int_c \frac{\varrho(P') dc}{r(P, P')}.$$

Nous appellerons *détermination physique* du potentiel U créé par c celle qui est donnée par l'intégrale précédente. Elle est caractérisée par la présence d'un seul indice inférieur. On sait qu'elle est harmonique, donc holomorphe au voisinage de chaque point extérieur au corps générateur et holomorphe aussi dans tout domaine intérieur au corps où la densité est elle-même holomorphe.

Maintenant, envisageons un potentiel pris tout d'abord en P puis prolongé analytiquement le long d'un chemin Γ jusqu'en un point M . La valeur obtenue en M sera représentée par

$$U_{P\Gamma M}.$$

s'il n'y a pas de corps générateur sur le chemin Γ , on aura évidemment

$$U_{P\Gamma M} = U_M$$

car l'on aurait suivi la détermination physique du potentiel qui serait holomorphe le long de ce chemin, mais s'il y a des frontières de corps générateurs sur Γ , l'on aura en général

$$(5) \quad U_{P\Gamma M} \neq U_M.$$

Sitôt que le potentiel primitif est prolongé au travers des frontières des masses attirantes, il faut prendre garde que la valeur du prolongement pris en M ne coïncide pas en général avec la détermination physique en M . Mais en tout état de cause, l'on aura évidemment $U_{P\Gamma M\Gamma P} = U_P$. Remarquons encore que seules les masses situées sur le chemin Γ peuvent donner lieu à l'inégalité (5). En effet, soit c' la matière située dans un canal de section aussi petite que l'on veut et contenant Γ à son intérieur; et soient c'' les masses extérieures à ce canal. L'on a

$$U_{P\Gamma M}^{c'+c''} - U_M^{c'+c''} = U_{P\Gamma M}^{c'} - U_M^{c'} \text{ car } U_{P\Gamma M}^{c''} = U_M^{c''}.$$

Les difficultés du prolongement le long d'un chemin ne proviennent par conséquent que de la matière située sur le chemin ou aboutissant à un point du chemin.

Ces remarques sont aussi applicables au cas où P est intérieur aux masses et M intérieur ou extérieur aux masses.

§ 6. Les fonctions de passage.

Envisageons le potentiel créé par un volume τ et une surface σ qui limite partiellement ou totalement le volume:

$$U = \int \frac{\varrho}{r} d\tau + \int \frac{g}{r} d\sigma + \int f \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

dans les conditions de régularité de σ et d'holomorphic de ϱ , g , f précisées au § 2.

Envisageons d'autre part la solution p du problème de Cauchy-Kowalewska suivant

$$(6) \quad \Delta p = 4\pi\varrho \text{ au voisinage de } \sigma; \quad \frac{dp}{dn} = 4\pi g, \quad p = -4\pi f \text{ sur } \sigma.$$

Soit, enfin, e la région de l'espace voisine de σ , et extérieure à τ ; ainsi σ sépare e de τ .

Le résultat fondamental de M. E. Schmidt s'écrit alors

$$(7) \quad p = U_{e\sigma\tau} - U_{\tau}.$$

L'on aurait de même

$$(8) \quad p = U_e - U_{\tau\sigma e}.$$

Nous appellerons p la fonction de passage au travers de σ . Elle est donc égale au potentiel U pris en e et prolongé jusqu'en τ au travers de σ , moins le potentiel en τ . Elle est holomorphe et univoque au voisinage de σ . La fonction de passage ne dépend, en vertu de l'équation (7) et d'une remarque du paragraphe précédent que des matières situées sur le chemin Γ qui joint un point P de e et un point M de τ . Envisageons un petit canal contenant Γ à son intérieur et restreignons le volume τ à sa partie commune c avec ce canal. L'on aura encore

$$p = U_{P\Gamma M}^c - U_M^c$$

et, si le canal a une section qui tend vers zéro uniformément, le potentiel lui-même U_M tend vers zéro et l'on a

$$p = \lim_{c \rightarrow 0} U_{P\Gamma M}^c.$$

Ainsi, la fonction de passage au travers de σ n'est autre que la limite vers laquelle tend le prolongement analytique du potentiel lorsque les matières attirantes tendent à se réduire aux masses situées sur le chemin le long duquel on a effectué le prolongement.

L'on peut encore dire que le prolongement analytique d'un potentiel newtonien au travers du corps générateur est une fonctionnelle, ou plus exactement une transmuée, qui ne s'évanouit pas avec ce corps.

Le fait que la fonction de passage est entièrement déterminée par un canal s'appuyant sur une portion aussi petite que l'on veut de Σ coïncide d'ailleurs avec la remarque faite au § 2 que la solution du problème de Cauchy-Kowalewska ne dépend que des fonctions ϱ , f , g , de la surface Σ qui porte σ , et non de la forme, de la position, ou de la grandeur de σ . La fonction de passage satisfaisant à la fois aux conditions (6) et (7), la résolution du problème de Cauchy-Kowalewska (6) est identique à la détermination de la fonction de passage par la relation (7) et le potentiel U peut être complété par d'autres masses n'empêchant pas sur le canal si cela semble bon et plus simple.

§ 7. *Ligne de ramification et fonction périodique.*

a) *Le cas des potentiels de surface.* — Envisageons tout d'abord une surface σ dans les conditions du § 2, puis une simple couche g ou une double couche f ou toutes les deux étalées sur σ . Nous appellerons ce corps générateur une couche analytique. Soient e et τ les deux régions de l'espace voisines de σ et situées de part et d'autre.

La fonction p étant définie par les conditions (6) de Cauchy-Kowalewska avec $\varrho = 0$, $g = g$, $f = f$, nous aurons

$$U_{P\Gamma M} = U_M + p$$

le long d'un chemin Γ qui joint P de e à M de τ en traversant σ . Maintenant, revenons en P le long d'un chemin Γ' qui évite σ , mais qui est assez voisin de σ de manière que p reste holomorphe et univoque le long de ce chemin; ce que nous savons être possible, puisque la fonction de passage p est holomorphe dans un volume dont la frontière est toujours située à une distance de σ supérieure à un nombre positif. Alors on peut écrire

$$U_{M\Gamma'P} = U_{P'} ,$$

car de M en P par Γ' on ne fait que suivre la détermination physique du potentiel U et l'on a le long de ce chemin

$$U_{P\Gamma M\Gamma'P} = U_{M\Gamma'P} + p = U_P + p.$$

En résumé, pour un circuit décrit autour de la courbe frontière F de σ et assez voisin de cette frontière, l'on a

$$U_{\text{arrivée}} - U_{\text{départ}} = p.$$

La frontière F est donc une ligne singulière pour le potentiel

U , c'est une ligne de ramification autour de laquelle s'échangent différentes déterminations de U prolongé.

En faisant n tours semblables aux précédents, l'on aurait

$$U_{\text{arrivée}} - U_{\text{départ}} = np.$$

La fonction de passage n'est autre qu'une fonction période pour le potentiel d'une couche analytique et relative à un circuit entourant la frontière de la couche.

La détermination physique n'a pas de singularité en dehors de σ ; nous venons de voir qu'elle est prolongeable le long de tout chemin franchissant σ en un point intérieur à σ , et que le potentiel prolongé au travers de σ redonne la détermination physique, augmentée de la fonction de passage. Les seules singularités que l'on puisse rencontrer dans le prolongement analytique d'un potentiel de surface engendré par une couche étalée sur σ sont les singularités de la fonction de passage, à part la frontière de la couche qui est une ligne de ramification.

En résumé, *le potentiel d'une couche analytique n'est qu'une branche d'une fonction harmonique multiforme Ψ qui n'admet quand on reste au voisinage de la couche aucune autre singularité que la frontière de la couche; cette dernière est une ligne de ramification autour de laquelle s'échangent les diverses déterminations de la fonction multiforme et qui sont en nombre infini. Les autres singularités de Ψ sont celles de la fonction de passage qui est en même temps fonction période.*

b) *Le cas des potentiels de volume.* — Considérons un volume τ limité entre autres par deux surfaces σ et σ' qui se coupent suivant une arête A . Il est entendu que A est formée de points où les surfaces σ et σ' sont encore analytiques et régulières. La densité ϱ remplissant σ est supposée être une fonction holomorphe au voisinage de A .

Envisageons le potentiel à l'extérieur e du corps τ et au voisinage de l'arête A . Il est prolongeable au travers de la face σ et l'on a

$$(9) \quad U_{e\sigma\tau} = U_{\tau} + p.$$

Le potentiel U_{τ} est holomorphe dans τ au voisinage de A en vertu du théorème de BRUNS. Si l'on sort de τ par σ' , l'on a, p' étant relative à σ' ,

$$(10) \quad U_{\tau\sigma'e} = U_e - p'$$

d'où en vertu de (9) et (10)

$$U_{e\sigma\tau\sigma'e} = U_{\tau\sigma'e} + p = U_e - p' + p.$$

D'où, pour un circuit décrit autour de l'arête A et suffisamment voisin de A , pour ne pas rencontrer de singularité de p et p' , ce qui est toujours possible, puisque ces deux fonctions sont holomorphes sur A

$$(11) \quad U_{\text{arrivée}} - U_{\text{départ}} = p - p'.$$

L'arête d'un volume attirant est une ligne de ramification pour le potentiel newtonien calculé à l'extérieur du corps et prolongé au travers du corps, et la fonction période est la différence entre la fonction d'entrée et la fonction de sortie.

Le potentiel calculé à l'intérieur du corps jouit évidemment de la même propriété; en effet, partons de τ et traversons σ' , l'on aura

$$U_{\tau\sigma'e} = U_e - p',$$

puis rentrons par σ dans τ et l'on trouvera

$$U_{\tau\sigma'e\sigma\tau} = U_{e\sigma\tau} - p' = U_{\tau} + p - p'$$

ce qui peut encore s'exprimer par la relation (11).

Si les chemins parcourus restent au voisinage de l'arête, il n'y a aucune autre singularité pour les deux potentiels prolongés que l'arête elle-même, les fonctions de passage étant holomorphes sur l'arête.

Envisageons en plus un volume attirant T d'un seul tenant et toujours limité à des surfaces régulières et analytiques σ , σ' , σ'' , ... La densité sera supposée holomorphe dans le volume et sur ses frontières. Soient p , p' , p'' , ... les fonctions de passages relatives à σ , σ' , σ'' ... En partant d'un point P extérieur au corps, en entrant par σ le long d'un chemin Γ l'on aura

$$U_{P\Gamma P'} = U_{P'} + p.$$

Mais le potentiel $U_{P'}$ est holomorphe dans tout le volume T . S'il est possible de le traverser en évitant les singularités de p , l'on aura en ressortant par σ' :

$$U_{P\Gamma P'\Gamma'P''} = U_{P'\Gamma'P''} + p = U_{P''} + p - p'.$$

Si l'on rentre dans le corps par σ'' l'on aura

$$U_{P\Gamma P'\Gamma'P''\Gamma''P'''} = U_{P''\Gamma''P'''} + p - p' = U_{P'''} + p - p' + p''.$$

Et d'une manière générale, si l'on est allé de P à M le long d'un trajet γ qui entre dans le corps par σ , ressort par σ' , rentre par σ'' , ... ,

$$U_{P\gamma M} = U_M + p - p' + p'' - p''' + \dots$$

Cette relation subsiste si l'on part d'un point P' intérieur T , car on aurait, en sortant par σ'

$$U_{P'\Gamma'P''} = U_{P''} - p'$$

et rentrant par σ''

$$U_{P'\Gamma'P''\Gamma''P'''} = U_{P''\Gamma''P'''} - p' = U_{P'''} - p' + p''$$

etc.

La différence entre le potentiel U pris en un point et prolongé jusqu'en un autre point le long d'un certain chemin est égale au potentiel en ce second point, augmente de la somme algébrique des fonctions de passage au travers des surfaces qui limitent le corps et que le chemin a traversées (on prendra le signe $+$ pour les fonctions d'entrée et le signe $-$ pour les fonctions de sortie).

Le potentiel d'un volume attirant T dont la densité est holomorphe dans T et sur sa frontière, cette dernière n'étant composée que de surfaces régulières et analytiques (arêtes comprises) n'est qu'un élément d'une fonction analytique multiforme qui admet les arêtes du corps pour lignes de ramification et qui ne peut avoir pour autre singularité que les singularités des fonctions de passage relatives aux faces du volume envisagé.

Il est clair que si l'on a deux ou plusieurs couches analytiques $\sigma, \sigma', \dots$ et que l'on traverse σ puis σ' par un chemin γ l'on aura

$$U_{P\gamma M} = U_M + p + p' + \dots,$$

les fonctions $p, p', \dots$ étant les fonctions de passage relatives aux surfaces traversées par γ ; et, dans la définition des p par les conditions de Cauchy-Kowalewska, la dérivée normale doit être prise dans le sens où les surfaces ont été traversées.

On pourrait adopter ici un point de vue plus synthétique en considérant des potentiels tels que ceux du début, somme de potentiels de volume et de surface. Mais ils se décomposeraient toujours en termes dont nous venons, dans ce paragraphe, d'étudier les polydromies, de sorte qu'il n'y aurait rien d'essentiellement nouveau à dire.

Bien entendu, si une surface σ se composait de deux parties σ' et σ'' , chargées de densité g' et g'' qui n'appartiennent pas à une même fonction holomorphe sur σ , les fonctions de passage p' et p'' seraient distinctes et les deux couches devraient être considérées, elles aussi, comme distinctes.

De même si un volume T se divise en deux parties T' et T'' remplies de densité ϱ' et ϱ'' et que ϱ' et ϱ'' n'appartiennent pas

à une même fonction holomorphe dans T , ces deux volumes accolés devront être traités séparément et la surface de séparation σ donnera lieu pour l'un à une fonction de passage p' telle que $\Delta p' = 4\pi\rho'$ et pour l'autre à une fonction de passage p'' telle que $\Delta p'' = 4\pi\rho''$.

Si l'on passe de T' à T'' en traversant cette surface, l'on aura

$$U_{T'\sigma T''} = U_{T''} - p' + p''.$$

§ 8. Une remarque d'ordre topologique.

L'on peut se demander si le potentiel prolongé d'un point P jusqu'à un point M le long d'un chemin Γ peut coïncider en M avec le potentiel physique.

Cette question évidemment, n'a d'intérêt que s'il est impossible de joindre P et M par un chemin, ou bien tout entier dans la matière ou bien tout entier hors des masses attirantes. Comme l'on a

$$U_{PFM} - U_M = p - p' + p'' - p''' + \dots,$$

il faut et il suffit, pour que la propriété cherchée ait lieu, que la somme algébrique des fonctions de passage relatives au chemin Γ soit nulle. Et si cette propriété a lieu, les deux potentiels physiques au voisinage de P et au voisinage de M appartiennent à une même fonction analytique multiforme.

Il en sera ainsi en particulier si le chemin Γ traverse toujours un nombre pair de fois et en sens inverse les surfaces portantes ou limitantes. Car alors les fonctions de passage s'entre-détruisent à l'entrée et à la sortie.

L'on pourrait procéder à une étude topologique approfondie des polydromies des potentiels prolongés et de la relation entre cette question et celle des périodes des intégrales multiples et aussi des intégrales des différentielles totales à trois variables.

Je terminerai ce mémoire par quelques exemples.

Envisageons deux cubes égaux avec une face commune F . Supposons les faces chargées d'une simple couche de densité partout la même. Si l'on passe d'un point P intérieur au premier cube à un point M intérieur au second cube au travers de la face commune, l'on aura

$$U_{PFM} = U_M + p$$

et la fonction de passage p relative à F n'étant certainement pas nulle identiquement, l'on ne retrouve pas en M la détermination

physique. Mais si l'on sort du premier cube par une face F' contiguë à F pour rentrer par la face F'' contenue dans le même plan et aboutir en M , l'on aura

$$U_{PF'F''M} = U_M + p' - p'' = U_M$$

car les deux fonctions de passage p' et p'' sont égales.

§ 9. Exemple de polydromie pour les potentiels de surface.

1. Prenons une surface sphérique homogène de masse totale m et de rayon a ; r sera la distance d'un point au centre de la sphère. Le potentiel à l'intérieur est $\frac{m}{a}$; le potentiel à l'extérieur est $\frac{m}{r}$. Ces deux potentiels appartiennent à des fonctions uniformes

dans l'espace réel entier et ne possèdent aucune polydromie et la seule singularité est un pôle au centre de la sphère; une surface sphérique homogène ne présente par conséquent aucune polydromie.

2. Prenons une calotte sphérique homogène. Dès lors il y a une frontière F de la calotte et, en vertu des remarques faites précédemment, la fonction période, si l'on sort de la sphère par la calotte et que l'on décrit un circuit autour de la frontière, sera

$$p = \frac{m}{a} - \frac{m}{r}.$$

De sorte, qu'après avoir fait une fois le tour de F on trouve une branche du potentiel prolongé qui a un pôle au centre de la sphère, ce que n'avait pas la détermination physique. En conséquence, le potentiel d'une calotte sphérique homogène n'est qu'une branche d'une fonction harmonique multiforme Ψ dont les déterminations s'échangent entre elles lorsque l'on décrit un circuit autour de la frontière de la calotte. La fonction Ψ n'a dans tout l'espace réel, comme singularité, que la frontière F qui est une ligne de ramification et un pôle au centre de la sphère pour l'infinité des branches, sauf pour la détermination physique ou branche principale. Cette dernière est la seule qui s'annule à l'infini, les autres tendent vers des constantes non nulles car l'on a, après K tours

$$U_{P \dots P} - U_P = K \left(\frac{m}{a} - \frac{m}{r} \right).$$

3. Envisageons une répartition R de matière et une surface de niveau S pour le potentiel V créé par R . Supposons S fermée et R à son intérieur.

Le potentiel U dû à une couche de niveau étalée sur S

$$U = \int \frac{1}{r} \frac{dV}{dn} dS , \quad .$$

la dérivée normale étant prise vers l'intérieur, est constant à l'intérieur de S : $U_i = K$, il est égal à V à l'extérieur: $U_e = V$. Si l'intégrale précédente n'était étendue qu'à une partie S' de S , le potentiel U' obtenu admettrait la frontière F de S' comme ligne de ramification avec la fonction période $p = K - V$.

Cette fonction admet les mêmes singularités que V , singularités qui peuvent être très diverses dans les masses R génératrices de V . Si R est, par exemple, une calotte sphérique homogène, la fonction période sera elle-même une fonction harmonique multiforme, admettant la frontière de la calotte sphérique comme ligne de ramification.

Ces deux exemples 2^o et 3^o ont été mis en évidence en collaboration avec M. Vasilescu avant l'élaboration d'une théorie générale.

Dans un article à paraître j'ai étudié certains potentiels tirés d'intégrales classiques telles que celle de Poisson et dégagé leur polydromie.

4. Donnons-nous arbitrairement une fonction harmonique h dans un domaine D et une surface analytique et régulière Σ située dans D . Chargeons une partie quelconque σ de Σ d'une simple couche de densité $g = \frac{1}{4\pi} \frac{dh}{dn}$ et d'une double couche de densité $f = -4\pi h$. La fonction de passage pour la frontière de σ sera égale à h . C'est aussi la fonction période, comme l'on sait. Ainsi *l'on peut toujours construire une couche analytique telle que la fonction période soit une fonction harmonique donnée à l'avance*. En particulier, si la fonction harmonique est une fonction de Green G nulle sur Σ , le potentiel se réduit à celui d'une simple couche de densité $g = + \frac{1}{4\pi} \frac{dG}{dn}$ et la fonction période sera cette fonction de Green elle-même.

5. Envisageons une surface plane, tout entière à distance finie. Soit $z = 0$ le plan de cette surface supposée chargée d'une simple couche homogène, de densité g . La fonction de passage p doit satisfaire aux conditions

$$\Delta p = 0; \text{ avec } \frac{dp}{dz} = 4\pi g, \quad p = 0 \text{ pour } z = 0.$$

On trouve sans difficulté $p = 4\pi gz$.

Elle est holomorphe partout et par conséquent: une surface plane homogène engendre une fonction harmonique multiforme qui n'a pas d'autre singularité dans tout l'espace réel, à part un pôle à l'infini, que la frontière de la couche, qui est une ligne de ramification. La fonction de passage peut encore s'écrire $p = 4\pi g d$, d étant la distance au plan à prendre positivement du côté où l'on a traversé la couche.

6. Envisageons une *surface polyédrale homogène et fermée*. Chaque face i donnera une fonction de passage $p_i = 4\pi g d_i$. Le potentiel créé par cette surface appartient à une fonction harmonique multiforme qui admet les arêtes i, j comme ligne de ramification avec la fonction période

$$4\pi g(d_i - d_j)$$

et aucune autre singularité dans tout l'espace réel, que les arêtes du polyèdre et des pôles à l'infini.

§ 10. Exemple de polydromie pour des potentiels de volume.

1. L'entrée dans un volume homogène de densité ϱ par une surface plane donne une fonction de passage qui doit satisfaire aux conditions

$$\Delta p = 4\pi\varrho, \text{ avec } \frac{dp}{dn} = 0, p = 0 \text{ sur la surface.}$$

C'est $p = 2\pi d^2$ où d est la distance au plan traversé. Ainsi, un *polyèdre homogène engendre une fonction harmonique multiforme et que les arêtes du corps sont des lignes de ramification*. Si l'on va d'un point P à un point M le long d'un trajet qui entre dans le corps par la face 1, ressort par la face 2, rentre par la face 3, etc. l'on aura

$$U_{P \dots M} - U_M = 2\pi\varrho(d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 - \dots).$$

Les d étant les distances du point M aux différentes faces traversées.

2. L'entrée dans une *sphère homogène* de densité ϱ et de rayon a donne lieu à une fonction de passage qui doit satisfaire aux conditions

$$\Delta p = 4\pi\varrho; \text{ et } \frac{dp}{dr} = 0, p = 0 \text{ pour } r = a.$$

On trouve

$$p = \frac{4}{3}\pi\varrho \frac{a^3}{r} - 2\pi\varrho a^2 + \frac{2}{3}\pi\varrho r^2.$$

C'est d'ailleurs la différence entre le potentiel hors de la sphère et le potentiel dans la sphère.

On vérifie facilement que la partie d'une sphère homogène située d'un seul côté d'un plan sécant engendre une fonction harmonique multiforme qui admet l'arête du corps comme ligne de ramification, un pôle au centre de la sphère et deux pôles à l'infini. Si ce corps s'évanouit, le plan sécant tendant vers le plan tangent parallèle du côté où se trouve la matière, la fonction période ne s'évanouit pas, ce qui est bien conforme aux résultats généraux du début.

Il est clair que l'on peut former ensuite des exemples de plus en plus complexes au moyen de plans, de sphères, puis de cylindres, de cônes pour lesquels on calcule aisément les fonctions de passage.

L'anneau limité par quatre surfaces sphériques est spécialement suggestif avec ses quatre arêtes de ramification. La fonction de passage pour l'entrée dans un ellipsoïde homogène se forme très facilement au moyen des expressions classiques des potentiels à l'extérieur et à l'intérieur de l'ellipsoïde.

3. Envisageons *deux homoïdes sphériques* tels que les cavités aient une partie commune, configuration analogue à celle imaginée par M. P. Dive au début de cette théorie. Supposons l'ensemble à densité constante. Il y a quatre potentiels physiques harmoniques car il y a quatre domaines distincts, libres de matières. Ces quatre potentiels appartiennent à une même fonction harmonique multiforme, comme on s'en persuade aisément en faisant un dessin et en tenant compte d'une remarque du § 8.

En terminant, nous voudrions souligner l'intérêt qu'il y aurait à chercher des applications où les potentiels prolongés aient comme les potentiels ordinaires une signification physique; peut-être est-ce à la cristallographie qu'il faudrait s'adresser, à moins que ce ne soit à la physique de l'avenir.

(Reçu le 29 juillet 1933).