COMPOSITIO MATHEMATICA

G. F. C. GRISS

Differentialinvarianten von relativen Vektoren

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 420-428
<http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__420_0>

Differentialinvarianten von relativen Vektoren

von

G. F. C. Griss

Doetinchem (Niederlande)

Einleitung. Beim Auffinden der Differentialinvarianten eines biquadratischen Tensors im binären Gebiet wird man in einem Spezialfall auf das Problem geführt, die Differentialinvarianten zweier relativen Vektoren im binären Gebiet zu bestimmen [1]). Die nächstliegende Verallgemeinerung besteht in der Bestimmung der Differentialinvarianten eines Systems von n relativen Vektoren in R_n [2]). Im folgenden werden auch andere Systeme von relativen Vektoren untersucht. Für willkürliches n werden Reduktionssätze für die Differentialinvarianten erster Ordnung abgeleitet, und zwar in § 1 bei einem kontravarianten Vektor, in § 2 bei 2 kovarianten Vektoren, in § 4 bei 2 kontravarianten Vektoren und in § 3 bei n kovarianten Vektoren, wobei das Resultat mit dem früheren [2]) in Einklang gebracht wird. In § 5 und § 6 werden die Differentialinvarianten zweiter Ordnung bestimmt von 2 kovarianten (relativen) Vektoren im ternären und quaternären Gebiet. Andere Fälle werden nebenbei erwähnt.

§ 1. *Ein relativer kovarianter Vektor.*

Es sei die Gruppe der eineindeutigen (genügend oft) stetig differenzierbaren Transformationen

$$x_i = f_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

gegeben mit der Transformationsdeterminante $\Delta = |e^i_k|$, wobei $e^i_k = \dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k}$. Ferner setzen wir zur Abkürzung $e^\lambda_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 x_\lambda}{\partial \bar{x}_\alpha \partial \bar{x}_\beta}$ und $d_\alpha = \dfrac{1}{\Delta}\dfrac{\partial \Delta}{\partial \bar{x}_\alpha}$.

---

[1]) G. F. C. Griss, Differentialinvarianten eines kovarianten Tensors vierter Stufe im binären Gebiet [Compositio Math. **1** (1934), 238—247].

[2]) G. F. C. Griss, Die Differentialinvarianten eines Systems von n relativen kovarianten Vektoren in R_n [Proc. Acad. Amsterdam **37** (1934), 82—87].

Die Transformationsformeln für einen relativen kovarianten Vektor $\bar{a}_\alpha$ im n-dimensionalen Gebiet lauten

$$\bar{a}_\alpha = a_\lambda e^\lambda_\alpha \Delta^r. \tag{1}$$

Zur Bestimmung von Differentialinvarianten oder -kovarianten differenziert man (1) und findet

$$\frac{\partial \bar{a}_\alpha}{\partial \bar{x}_\beta} = \frac{\partial a_\lambda}{\partial x_\mu} e^\lambda_\alpha e^\mu_\beta \Delta^r + a_\lambda e^\lambda_{\alpha\beta} \Delta^r + r a_\lambda e^\lambda_\alpha \Delta^r d_\beta. \tag{2}$$

Vertauschung von α und β und Subtraktion ergibt

$$\frac{\bar{p}_{\alpha\beta}}{r} = \frac{p_{\lambda\mu}}{r} e^\lambda_\alpha e^\mu_\beta \Delta^r + \bar{a}_\alpha d_\beta - \bar{a}_\beta d_\alpha, \tag{3}$$

wo

$$p_{\lambda\mu} = \frac{\partial a_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial a_\mu}{\partial x_\lambda}. \tag{4}$$

Wir multiplizieren mit $\bar{a}_\gamma$ und vertauschen zyklisch:

$$\bar{p}_{\alpha\beta\gamma} = p_{\lambda\mu\nu} e^\lambda_\alpha e^\mu_\beta e^\nu_\gamma \Delta^{2r} \tag{5}$$

mit

$$p_{\lambda\mu\nu} = \frac{a_\lambda p_{\mu\nu} + a_\mu p_{\lambda\nu} + a_\nu p_{\lambda\mu}}{r}. \tag{6}$$

Man findet also einen relativen alternierenden Tensor dritter Stufe. Zwischen den Komponenten dieses Tensors bestehen folgende Relationen:

$$\sum_{\text{zykl.}} a_\varkappa p_{\lambda\mu\nu} = a_\varkappa p_{\lambda\mu\nu} - a_\lambda p_{\mu\nu\varkappa} + a_\mu p_{\nu\varkappa\lambda} - a_\nu p_{\varkappa\lambda\mu} = 0. \tag{7}$$

Vermöge dieser Relationen kann man alle Komponenten ausdrücken durch $p_{\lambda\mu 1}$; der Tensor hat also im allgemeinen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ unabhängige Komponenten. *Wir beweisen jetzt, daß jedes andere Eliminationsresultat der d_α aus* (3) *von* (5) *abhängig ist,* m. a. W. daß man den Gleichungen (3) vermöge der Relationen (5) genügen kann.

Beweis: Man setze $\bar{a}_\alpha \to a_\alpha$, $d_\alpha \to x_\alpha$ und $\frac{\bar{p}_{\alpha\beta}}{r} - \frac{p_{\lambda\mu}}{r} e^\lambda_\alpha e^\mu_\beta \Delta^r \to p_{\alpha\beta}$. Es gehen (3) und (5) über in

$$a_\alpha x_\beta - a_\beta x_\alpha = p_{\alpha\beta} \tag{8}$$

und

$$a_\alpha p_{\beta\gamma} + a_\beta p_{\gamma\alpha} + a_\gamma p_{\alpha\beta} = 0. \tag{9}$$

Man kann $a_1 \neq 0$ voraussetzen und (8) lösen für $\alpha = 1$:

$$x_\beta = \frac{p_{1\beta} + a_\beta x_1}{a_1}.$$

Substitution in (8) ergibt

$$a_\alpha \frac{p_{1\beta} + a_\beta x_1}{a_1} - a_\beta \frac{p_{1\alpha} + a_\alpha x_1}{a_1}$$

$$= \{(a_\alpha p_{1\beta} - a_\beta p_{1\alpha}) + (a_\alpha a_\beta - a_\beta a_\alpha) x_1\},$$

also vermöge (9) für $\gamma = 1$

$$\frac{1}{a_1} a_1 p_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}.$$

Differentialkovarianten(-invarianten) erster Ordnung sind projektive Kovarianten(-invarianten) des relativen alternierenden Tensors dritter Stufe $p_{\lambda\mu\nu}$.

Differentialkovarianten (-invarianten) höherer Ordnung gibt es nicht.

§ 2. *Zwei relative kovariante Vektoren.*

Die Transformationsformeln für die Vektoren lauten

$$\bar{a}_\alpha = a_\lambda e^\lambda_\alpha \Delta^r \text{ und } \bar{b}_\alpha = b_\lambda e^\lambda_\alpha \Delta^s. \tag{10}$$

Differentiation nach $\bar{x}_\beta$, Vertauschung von α und β und Substraktion ergibt, wie in § 1

$$\left.\begin{aligned} \frac{\bar{p}_{\alpha\beta}}{r} &= \frac{p_{\lambda\mu}}{r} e^\lambda_\alpha e^\mu_\beta \Delta^r + \bar{a}_\alpha d_\beta - \bar{a}_\beta d_\alpha \\ \frac{\bar{q}_{\alpha\beta}}{s} &= \frac{q_{\lambda\mu}}{s} e^\lambda_\alpha e^\mu_\beta \Delta^s + \bar{b}_\alpha d_\beta - \bar{b}_\beta d_\alpha \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

mit

$$p_{\lambda\mu} = \frac{\partial a_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial a_\mu}{\partial x_\lambda} \text{ und } q_{\lambda\mu} = \frac{\partial b_\lambda}{\partial x_\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial x_\lambda}. \tag{12}$$

Multiplikation von (11) mit $\bar{b}_\gamma$ und $\bar{a}_\gamma$, zyklische Vertauschung und Addition ergibt

$$\bar{r}_{\alpha\beta\gamma} = r_{\lambda\mu\nu} e^\lambda_\alpha e^\mu_\beta e^\nu_\gamma \Delta^{r+s}, \tag{13}$$

wo

$$r_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{zykl.}} \frac{b_\lambda p_{\mu\nu}}{r} + \sum_{\text{zykl.}} \frac{a_\lambda q_{\mu\nu}}{s}. \tag{14}$$

Außerdem findet man, wie in § 1

$$p_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{zykl.}} \frac{a_\lambda p_{\mu\nu}}{r} \text{ und } q_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{zykl.}} \frac{b_\lambda q_{\mu\nu}}{s}. \tag{15}$$

Zwischen den 3 alternierenden Tensoren (13) und (14) bestehen folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\text{zykl.}} a_\varkappa p_{\lambda\mu\nu} &= a_\varkappa p_{\lambda\mu\nu} - a_\lambda p_{\mu\nu\varkappa} + a_\mu p_{\nu\varkappa\lambda} - a_\nu p_{\varkappa\lambda\mu} = 0 \\ \sum_{\text{zykl.}} b_\varkappa q_{\lambda\mu\nu} &= b_\varkappa q_{\lambda\mu\nu} - b_\lambda q_{\mu\nu\varkappa} + b_\mu q_{\nu\varkappa\lambda} - b_\nu q_{\varkappa\lambda\mu} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \sum_{\text{zykl.}} a_\varkappa r_{\lambda\mu\nu} &= -\sum_{\text{zykl.}} b_\varkappa p_{\lambda\mu\nu} \\ \sum_{\text{zykl.}} b_\varkappa r_{\lambda\mu\nu} &= -\sum_{\text{zykl.}} a_\varkappa q_{\lambda\mu\nu} \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

Vermöge (17) kann man alle $r_{\lambda\mu\nu}$ durch $r_{\lambda 12}$, $p_{\lambda\mu\nu}$ und $q_{\lambda\mu\nu}$ ausdrücken; vermöge (16) haben $r_{\lambda\mu\nu}$, $p_{\lambda\mu\nu}$ und $q_{\lambda\mu\nu}$ sodann $2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + (n-2) = n(n-2)$ Komponenten.

Zum Beweis, daß man außer den Tensoren (14) *und* (15) *keine weiteren zu adjungieren hat,* setzen wir wieder zur Vereinfachung

$$\bar{a}_\alpha \to a_\alpha, \quad \frac{\bar{p}_{\alpha\beta}}{r} - \frac{p_{\lambda\mu}}{r} e^\lambda_\alpha e^\mu_\beta \Delta^r \to p_{\alpha\beta}, \quad d_\alpha \to x_\alpha,$$

$$\bar{b}_\alpha \to b_\alpha, \quad \frac{\bar{q}_{\alpha\beta}}{s} - \frac{q_{\lambda\mu}}{s} e^\lambda_\alpha e^\mu_\beta \Delta^s \to q_{\alpha\beta}.$$

Man hat jetzt das Gleichungssystem

$$a_\alpha x_\beta - a_\beta x_\alpha - p_{\alpha\beta} = 0 \tag{18}$$

$$b_\alpha x_\beta - b_\beta x_\alpha - q_{\alpha\beta} = 0 \tag{19}$$

mit den Relationen

$$\sum_{\text{zykl.}} a_\lambda p_{\mu\nu} = 0 \quad (20), \qquad \sum_{\text{zykl.}} b_\lambda q_{\mu\nu} = 0 \tag{21}$$

und

$$\sum_{\text{zykl.}} b_\lambda p_{\mu\nu} + \sum_{\text{zykl.}} a_\lambda q_{\mu\nu} = 0. \tag{22}$$

Wir können $a_1 \neq 0$ und $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ voraussetzen. Wir nehmen in (18) $\alpha = 1$ und berechnen x_β für $\beta \neq 1$: $x_\beta = \dfrac{a_\beta x_1 + p_{1\beta}}{a_1}$. Substitution in (18) liefert (20) wie in § 1. Jetzt nehmen wir in (19) $\alpha = 1$ und $\beta = 2$, substituieren x_2 und berechnen

$$x_1 = -\frac{a_1 q_{12} - b_1 p_{12}}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Substitution in (19) ergibt

$$b_\alpha \frac{a_\beta x_1 + p_{1\beta}}{a_1} - b_\beta \frac{a_\alpha x_1 + p_{1\alpha}}{a_1} - q_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{a_1}\{(b_\alpha a_\beta - b_\beta a_\alpha)x_1 + (b_\alpha p_{1\beta} - b_\beta p_{1\alpha})\} - q_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{-(b_\alpha a_\beta - b_\beta a_\alpha)(a_1 q_{12} - b_1 p_{12}) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_\alpha p_{1\beta} - b_\beta p_{1\alpha} - a_1 q_{\alpha\beta})}{a_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)}.$$

Dieser Ausdruck ist tatsächlich null vermöge (21) und (22).

Die alternierenden relativen Tensoren $p_{\lambda\mu\nu}$, $q_{\lambda\mu\nu}$ *und* $r_{\lambda\mu\nu}$ *sind die Kovarianten erster Ordnung von zwei relativen Vektoren, welche ein Adjunktionssystem erster Ordnung bilden; vermöge der Relationen* (16) *und* (17) *haben sie* $n(n-2)$ *unabhängige Komponenten.*

Es gibt mindestens eine (relative) Invariante erster Ordnung.

Systeme von m relativen Vektoren $(2 < m < n)$ ergeben nichts Neues, auch nicht, wenn noch einige absolute Vektoren dazukommen.

§ 3. *n relative kovariante Vektoren.*

Für die Differentialinvarianten erster Ordnung von n unabhängigen relativen kovarianten Vektoren

$$_l\bar{a}_\alpha = {}_l a_\lambda e^\lambda_\alpha \Delta^{r_l} \qquad (l = 1, \ldots, n;\ \textstyle\sum r_l = -1) \tag{23}$$

gilt folgender

Reduktionssatz [3]: *Ein (kleinstes) Adjunktionssystem erster Ordnung wird gebildet von den Tensoren*

$$_l q_{\mu\nu} = {}_l p_{\mu\nu} + r_l\, {}_l a_\mu\, s_\nu - r_l\, {}_l a_\nu\, s_\mu \tag{24}$$

mit

$$s_\mu = \sum_{h=1}^{n} \frac{_h p_{\mu\nu}\, {}_h a^\nu}{r_h(n-1)} \tag{25}$$

und

$$v_\nu = \frac{\partial a}{\partial x_\nu}, \tag{26}$$

wo $a = |{}_h a_\alpha|$ *eine absolute Invariante ist.*

---

[3]) Vgl. [2]).

Es gelten die Relationen

$$\sum_l \frac{{}_l a^\mu \, {}_l q_{\mu\nu}}{r_l} = 0. \tag{27}$$

Wir multiplizieren (24) mit ${}_l a_\lambda$ und vertauschen zyklisch. Das ergibt

$${}_l p_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{zykl.}} \frac{{}_l a_\lambda \, {}_l q_{\mu\nu}}{r_l} = \sum_{\text{zykl.}} \frac{{}_l a_\lambda \, {}_l p_{\mu\nu}}{r_l}. \tag{28}$$

Ebenso

$${}_{hl} r_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{zykl.}} \frac{{}_h a_\lambda \, {}_l q_{\mu\nu}}{r_l} + \sum_{\text{zykl.}} \frac{{}_l a_\lambda \, {}_h q_{\mu\nu}}{r_h} = \sum_{\text{zykl.}} \frac{{}_h a_\lambda \, {}_l p_{\mu\nu}}{r_l} + \sum_{\text{zykl.}} \frac{{}_l a_\lambda \, {}_h p_{\mu\nu}}{r_h}. \tag{29}$$

Wir können umgekehrt (24) *durch* (28) *und* (29) *ausdrücken.* Dazu setzen wir ${}_{ll} r_{\lambda\mu\nu} = 2 \, {}_l p_{\lambda\mu\nu}$, so daß

$${}_{hl} r_{\lambda\mu\nu} = \sum_{\text{zykl.}} \frac{{}_h a_\lambda \, {}_l p_{\mu\nu}}{r_l} + \sum_{\text{zykl.}} \frac{{}_l a_\lambda \, {}_h p_{\mu\nu}}{r_h}, \tag{30}$$

auch für $h = l$.

Man berechnet jetzt

$$\begin{aligned}
\sum_h {}_h a^\lambda \, {}_{hl} r_{\lambda\mu\nu} &= \sum_h {}_h a^\lambda \, \frac{{}_h a_\lambda \, {}_l p_{\mu\nu} + {}_h a_\mu \, {}_l p_{\nu\lambda} + {}_h a_\nu \, {}_l p_{\lambda\mu}}{r_l} + \sum_h {}_h a^\lambda \, \frac{{}_l a^\lambda \, {}_h p_{\mu\nu} + {}_l a_\mu \, {}_h p_{\nu\lambda} + {}_l a_\nu \, {}_h p_{\lambda\mu}}{r_h} \\
&= \frac{n \, {}_l p_{\mu\nu} + {}_l p_{\mu\nu} + {}_l p_{\nu\mu}}{r_l} + \frac{{}_l p_{\mu\nu}}{r_l} + \sum_h {}_l a_\mu \frac{{}_h a^\lambda \, {}_h p_{\nu\lambda}}{r_h} + \sum_h {}_l a_\nu \frac{{}_h a^\lambda \, {}_h p_{\lambda\mu}}{r_h} \\
&= \frac{(n-1) \, {}_l p_{\mu\nu}}{r_l} + (n-1) \, {}_l a_\mu s_\nu - (n-1) \, {}_l a_\nu s_\mu
\end{aligned}$$

oder

$${}_l q_{\mu\nu} = \sum_h \frac{r_l \, {}_h a^\lambda \, {}_{hl} r_{\lambda\mu\nu}}{n-1}. \tag{31}$$

Für Systeme mit mehr als n unabhängigen relativen kovarianten Vektoren gelten Reduktionssätze, weil man kovariante Ableitungen bilden kann.

§ 4. *Zwei relative kontravariante Vektoren.*

Ein relativer kontravarianter Vektor hat nur Differentialinvarianten, wenn das Gewicht eins ist; man findet die bekannte Divergenz.

Für zwei Vektoren gelten die Transformationsformeln

$$a^\alpha = \bar{a}^\mu e_\mu^\alpha \Delta^r \text{ und } b^\alpha = \bar{b}^\mu e_\mu^\alpha \Delta^s. \tag{32}$$

Differentiation ergibt

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial a^\alpha}{\partial x_\mu} e^\mu_\beta &= \frac{\partial \bar{a}^\lambda}{\partial \bar{x}_\beta} e^\alpha_\lambda \Delta^r + e^\alpha_{\beta\lambda} \bar{a}^\lambda \Delta^r + e^\alpha_\lambda \bar{a}^\lambda r\, d_\beta \Delta^r \\ \frac{\partial b^\alpha}{\partial x_\mu} e^\mu_\beta &= \dots\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Wir multiplizieren mit $\bar{b}^\beta$ und $\bar{a}^\beta$ und subtrahieren:

$$q^\alpha = \bar{q}^\lambda e^\alpha_\lambda \Delta^{r+s} + e^\alpha_\lambda (\bar{a}^\lambda \bar{b}^\beta r - \bar{a}^\beta \bar{b}^\lambda s)\, d_\beta \Delta^{r+s}$$

oder

$$\bar{q}^\mu = q^\alpha \bar{e}^\mu_\alpha \Delta^{-r-s} - r\bar{a}^\mu \bar{b}^\beta d_\beta + s\bar{b}^\mu \bar{a}^\beta d_\beta \tag{34}$$

mit

$$q^\alpha = b^\mu \frac{\partial a^\alpha}{\partial x_\mu} - a^\mu \frac{\partial b^\alpha}{\partial x^\mu}. \tag{35}$$

Man bilde

$$\begin{vmatrix} \bar{q}^\lambda & \bar{a}^\lambda & \\ \bar{q}^\mu & \bar{a}^\mu & \bar{b}^\mu \\ \bar{q}^\nu & \bar{a}^\nu & \bar{b}^\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q^\alpha\, \bar{e}^\lambda_\alpha \Delta^{-r-s} & \bar{a}^\lambda & \bar{b}^\lambda \\ q^\alpha\, \bar{e}^\mu_\alpha \Delta^{-r-s} & \bar{a}^\mu & \bar{b}^\mu \\ q^\alpha\, \bar{e}^\nu_\alpha \Delta^{-r-s} & \bar{a}^\nu & \bar{b}^\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q^\alpha\, \bar{e}^\lambda_\alpha & a^\beta\, \bar{e}^\lambda_\beta & b^\gamma\, \bar{e}^\lambda_\gamma \\ q^\alpha\, \bar{e}^\mu_\alpha & a^\beta\, \bar{e}^\mu_\beta & b^\gamma\, \bar{e}^\mu_\gamma \\ q^\alpha\, \bar{e}^\nu_\alpha & a^\beta\, \bar{e}^\nu_\beta & b^\gamma\, \bar{e}^\nu_\gamma \end{vmatrix} \Delta^{2r+2s}.$$

Also

$$a^{\alpha\beta\gamma} = \bar{a}^{\lambda\mu\nu} e^\alpha_\lambda e^\beta_\mu e^\gamma_\nu \Delta^{2r+2s}$$

mit

$$a^{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} q^\alpha & a^\alpha & b^\alpha \\ q^\beta & a^\beta & b^\beta \\ q^\gamma & a^\gamma & b^\gamma \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Man beweist wie in § 1 oder § 2, daß man keine weiteren Tensoren zu adjungieren hat. Ein System von n kontravarianten Vektoren kann durch ein System von n kovarianten ersetzt werden.

§ **5.** *Differentialinvarianten zweiter Ordnung von zwei relativen kovarianten Vektoren für* $n = 3$.

Die alternierenden Tensoren (14) *und* (15) *sind jetzt relative Invarianten*; demgemäß setzen wir

$$P = p_{\lambda\mu\nu},\quad Q = q_{\lambda\mu\nu} \text{ und } R = r_{\lambda\mu\nu} \tag{37}$$

mit den Gewichten $2r + 1$, $2s + 1$ und $r + s + 1$.

Zur Bestimmung der Differentialinvarianten zweiter Ordnung differenzieren wir die Transformationsformeln für P, Q und R:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \overline{P}}{\partial \overline{x}_\alpha} &= \frac{\partial P}{\partial x_\mu} e^\mu_\alpha \Delta^{2r+1} + P(2r+1)\Delta^{2r+1} d_\alpha \\ \frac{\partial \overline{Q}}{\partial \overline{x}_\alpha} &= \dots \\ \frac{\partial \overline{R}}{\partial \overline{x}_\alpha} &= \dots\end{aligned}\right\}. \tag{38}$$

Man eliminiere d_α aus (11) und (38). Es sind dies 15 Gleichungen, welche aber schon 3 Invarianten geliefert haben. Wir erwarten jetzt also $12 - 3 = 9$ neue Relationen. Man findet

$$v_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{Q^{2r+1}}{P^{2s+1}}\right), \quad w_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{R^{2r+1}}{P^{r+s+1}}\right) \tag{39}$$

und

$$\left.\begin{aligned}P_{\alpha\beta} &= \frac{p_{\alpha\beta}}{r} - \frac{a_\alpha}{2r+1}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_\beta} + \frac{a_\beta}{2r+1}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} \\ Q_{\alpha\beta} &= \frac{q_{\alpha\beta}}{s} - \frac{b_\alpha}{2r+1}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_\beta} + \frac{b_\beta}{2r+1}\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial x_\alpha}\end{aligned}\right\}. \tag{40}$$

(39) *und* (40) *bilden ein Adjunktionssystem zweiter Ordnung.* Man bildet leicht ein volles Invariantensystem von a_α, b_α, v_α, w_α, $P_{\alpha\beta}$ und $Q_{\alpha\beta}$. Es sind $\sum\limits_{\text{zykl.}} a_\alpha P_{\beta\gamma}$, $\sum\limits_{\text{zykl.}} b_\alpha Q_{\beta\gamma}$ und $\sum\limits_{\text{zykl.}} b_\alpha P_{\beta\gamma} + \sum\limits_{\text{zykl.}} a_\alpha Q_{\gamma\beta}$ schon die bekannten Invarianten P, Q und R. Die 9 unabhängigen Gleichungen (39) und (40) mit den 6 Gleichungen (10) liefern schließlich nach Elimination von e^i_k $15 - 8 = 7$ absolute Invarianten.

Zwei relative kovariante Vektoren im ternären Gebiet haben 7 unabhängige Differentialinvarianten zweiter Ordnung, z.B.

$$(abv),\ (abw),\ (avw),\ (bvw),$$

$$\sum_{\text{zykl.}} b_\alpha P_{\beta\gamma},\quad \sum_{\text{zykl.}} v_\alpha P_{\beta\gamma} \ \textit{und}\ \sum_{\text{zykl.}} v_\alpha Q_{\beta\gamma},$$

wenn man jede durch eine geeignete Potenz von P dividiert.

Man findet Differentialinvarianten zweiter Ordnung, während die zweiten Ableitungen $e^\lambda_{\alpha\beta}$ nicht lösbar sind und es also keine Übertragung gibt.

§ 6. *Differentialinvarianten zweiter Ordnung von zwei relativen kovarianten Vektoren für $n = 4$.*

Die alternierenden relativen Tensoren dritter Stufe $p_{\lambda\mu\nu}$,

$q_{\lambda\mu\nu}$ und $r_{\lambda\mu\nu}$ liefern zwei unabhängige relative Invarianten $i_1 = (p^3 b)$ und $i_2 = (q^3 a)$ resp. vom Gewicht $2r + s + 1$ und $r + 2s + 1$. Wenn wir vom Fall $r = s = -\frac{1}{3}$ absehen, können wir mit Hilfe von i_1 und i_2 eine absolute Invariante I und eine relative Invariante i vom Gewicht eins bilden und die alternierenden relativen Tensoren durch kontravariante absolute Vektoren P^α, Q^α und R^α ersetzen.

Die Differentialinvarianten zweiter Ordnung sind jetzt projektive Invarianten von

$$a_\alpha,\ b_\alpha,\ P^\alpha,\ Q^\alpha,\ R^\alpha,\ v_\alpha = \frac{\partial I}{\partial x_\alpha},$$

$$U^\alpha = P^\lambda \frac{\partial Q^\alpha}{\partial x_\lambda} - Q^\lambda \frac{\partial P^\alpha}{\partial x_\lambda} = (P,Q),\ V^\alpha = (P,R),\ W^\alpha = (Q,R)$$

und

$$S_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} - \frac{a_\alpha}{i}\frac{\partial i}{\partial x_\beta} + \frac{a_\beta}{i}\frac{\partial i}{\partial x_\alpha},$$

$$T_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta} - \frac{b_\alpha}{i}\frac{\partial i}{\partial x_\beta} + \frac{b_\beta}{i}\frac{\partial i}{\partial x_\alpha}.$$

Man bildet leicht ein volles Invariantensystem dieser Tensoren. Man kann nachrechnen, daß es 14 unabhängige absolute Invarianten erster und zweiter Ordnung gibt, also 13 absolute Invarianten zweiter Ordnung. Bilden wir mit Hilfe der kontravarianten Vektoren P^α, Q^α, R^α und U^α einen kovarianten Vektor w_α, so gilt:

Eine algebraische Basis unabhängiger Differentialinvarianten zweiter Ordnung besteht aus 13 *Invarianten, z.B.*

$$(vP),\ (vQ),\ (vR),\ (vU),\ (vV)\ \textit{und}\ (vW),$$
$$(PQRU),\ (PQRV)\ \textit{und}\ (PQRW),$$
$$(bvS^2),\ (bwS^2),\ (vwS^2)\ \textit{und}\ (vwT^2).$$

(Eingegangen den 16. März 1934.)