

COMPOSITIO MATHEMATICA

WALTER SAXER

Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Schottky

Compositio Mathematica, tome 1 (1935), p. 207-216

http://www.numdam.org/item?id=CM_1935__1__207_0

© Foundation Compositio Mathematica, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Compositio Mathematica » (<http://http://www.compositio.nl/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Schottky

von

Walter Saxer

Zürich.

Das Ziel dieser Untersuchung besteht darin, den folgenden Satz zu beweisen:

$f(z)$ sei für $|z| < 1$ eine reguläre Funktion mit der Taylor-Entwicklung

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p + \dots$$

Es seien die $p + 1$ ersten Koeffizienten a_i der Bedingung

$$|a_i| \leq k_i$$

unterworfen, wobei die k_i irgendwelche reelle positive Zahlen bedeuten. $f(z)$ besitze im Einheitskreise höchstens p Nullstellen, und es existiere ein solcher Kreisring $r < |z| < 1$, so daß in demselben höchstens q Punkte liegen, in welchen $f(z)$ den Wert 1 annimmt. q bedeute eine positive ganze Zahl $\geq p$. Dann gibt es eine nur von den k_i , p , q , sowie von ϑ und r abhängende Schranke $S(k_0, k_1, \dots, k_p, p, q, r, \vartheta)$, so daß für $|z| \leq 1 - \vartheta$ die Abschätzung

$$|f(z)| \leq S(k_0, k_1, \dots, k_p, p, q, r, \vartheta)$$

gilt. Für S kann z.B. die folgende Funktion verwendet werden

$$S(k_0, k_1, \dots, k_p, p, q, r, \vartheta) \leq e^{\frac{C}{\vartheta}}$$

wobei C eine unbekannte Konstante bedeutet, die nur von den Zahlen $k_0, k_1, \dots, k_p, p, q, r$, nicht aber von ϑ abhängig ist.

Man erkennt in diesem Satze sofort eine Verschärfung der Verallgemeinerung des klassischen Satzes von Schottky, wie sie seiner Zeit von Bieberbach¹⁾ und Montel²⁾ gleichzeitig und

¹⁾ L. BIEBERBACH, Über die Verteilung der Null- und Einstellen analytischer Funktionen [Math. Ann. 85 (1922), 141—148].

²⁾ P. MONTEL, Sur les familles quasi-normales de fonctions holomorphes [Mém. Acad. Belgique, Classe des Sciences, (2) 6 (1922), 1—41] oder

P. MONTEL, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications [Collection Borel, Paris (1927), (69—74, 88—92)].

unabhängig von einander bewiesen wurde. Die Verschärfung ist doppelter Natur:

1. Bieberbach und Montel haben vorausgesetzt, daß die Funktion im ganzen Einheitskreise höchstens q Einsstellen besitzen soll, während ich lediglich die Existenz eines solchen Kreisringes mit $|z| = 1$ als äußere Peripherie postuliere. 2. In den Voraussetzungen meines Satzes spielt die Multiplizität der 1-Stellen keine Rolle. Ich setze nur voraus, daß im kritischen Kreisring höchstens q Punkte existieren, in welchen die Funktion den Wert 1 annimmt.

Schließlich möchte ich auch darauf hinweisen, daß Bieberbach und Montel lediglich die Existenz von Schranken bewiesen, ohne Angaben über ihre Größenordnung zu machen. Die folgende Methode gestattet allerdings nicht, Aussagen über die Größe der unbekannten Konstanten C zu geben. Aber mit Hilfe feinerer funktionentheoretischer Mittel und gewisser Abänderungen der Methode gelingt es, auch numerische Schranken für den obigen Satz zu erhalten, was an anderer Stelle dargestellt werden soll ³⁾.

Durch Anwendung des Satzes von Rouché und des Prinzips der vollständigen Induktion gelingt es, den mitgeteilten Satz auf den klassischen Satz von Schottky zurück zu führen. Bei der Bestimmung der Größenordnung der Schranke muß natürlich verwendet werden, daß die Schranke im Falle des klassischen Satzes von Schottky bekannt ist ⁴⁾.

§ 1. *Beweis der Existenz einer Schranke.*

Zunächst werde ich beweisen, daß diejenigen Funktionen, welche die Voraussetzungen meines Satzes erfüllen, eine im Einheitskreise normale Funktionsschar bilden. Wegen der Beschränktheit der Funktionswerte im Nullpunkt muß es sich dann um eine in jedem Kreis $|z| \leq 1 - \vartheta$ gleichmäßig beschränkte Funktionsschar handeln, womit die Existenz einer Schranke im Sinne meines Satzes gesichert ist. Den Beweis dieser Behauptung zerlege ich in 2 Schritte.

1. Zunächst betrachte ich das Polynom

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_p z^p.$$

³⁾ Ich hatte ursprünglich schlechtere, allerdings numerische Schranken berechnet. Herr OSTROWSKI machte mich in einem Gespräch darauf aufmerksam, daß wahrscheinlich auch noch bei der obigen Konfiguration die mitgeteilte Schranke gültig sei.

⁴⁾ Vergl. z.B. H. BOHR und E. LANDAU, Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_{\chi}(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$ [Göttinger Nachrichten 1910, 303—330 (321)].

Dieses Polynom besitzt als Majorante infolge der Beschränktheit seiner Koeffizienten das folgende Polynom

$$|P(z)| \leq |K(z)| = k_0 + k_1 |z| + \dots + k_p |z^p|.$$

Das Maximum von $|P(z)|$ im abgeschlossenen Einheitskreise werde mit m bezeichnet. Es gilt

$$m \leq k_0 + k_1 + \dots + k_p.$$

m ist offensichtlich nur von den Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_p$ abhängig. Nun besitzt $f(z)$ folgende Eigenschaft:

Auf dem Rande jedes einfach zusammenhängenden, den Nullpunkt enthaltenden und ganz im Innern des Einheitskreises liegenden Bereiches existiert mindestens ein Punkt, in dem $|f(z)| \leq m$ ⁵⁾.

Wäre dies nicht der Fall, so bestände in sämtlichen Randpunkten die Ungleichung

$$|f(z)| > |P(z)|.$$

Nach dem Satz von Rouché müßten demnach die Funktionen $f(z)$ und $f(z) - P(z)$ in diesem Bereich die gleiche Anzahl Nullstellen besitzen. Die Taylorentwicklung von $f(z) - P(z)$ lautet

$$f(z) - P(z) = a_{p+1} z^{p+1} + \dots$$

D.h. $f(z) - P(z)$ und damit auch $f(z)$ hätten im Einheitskreis mindestens $p + 1$ Nullstellen, was in den Voraussetzungen verboten wurde. Insbesondere existiert also auf jedem Kreis $|z| = 1 - \vartheta$ mindestens ein Punkt, in welchem $|f(z)| \leq m$.

2. Jetzt ist es leicht, zu beweisen, daß die in Betracht kommenden Funktionen eine im Einheitskreise normale Funktionsschar bilden. Es sei $r < 1 - \vartheta < 1$. Ich teile den Kreisring $1 - \vartheta \leq |z| \leq 1$ in $p + q + 1$ Kreisringe, die z.B. die gleiche Dicke haben dürfen. Dank den gemachten Voraussetzungen existiert dann für jede Funktion mindestens ein solcher Kreisring, in dem die

⁵⁾ Diese Bemerkung gestattet, einen bekannten Satz von MILLOUX auf diese Funktion anzuwenden, was für die Berechnung von numerischen Schranken sehr nützlich ist. Ich zitiere diesen Satz in der allerdings nicht allgemeinsten Fassung, wie sie kürzlich von R. NEVANLINNA [Göttinger Nachrichten 1933, 103—115] gegeben wurde: Es sei die analytische Funktion $f(z)$ regulär und ≤ 1 im Innern des Einheitskreises. Auf jedem Kreis $|z| = r < 1$ existiere mindestens ein Punkt, in welchem $|f(z)| \leq \delta$, wobei δ eine feste, von r unabhängige Zahl bedeute. Unter diesen Voraussetzungen gilt die Abschätzung:

$$|f(re^{i\varphi})| \leq \delta^{\frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1-r}{1+r}} \leq \delta^{\frac{1}{\pi}(1-r)}.$$

Funktion weder eine Null- noch eine Einsstelle besitzt. Ich betrachte sämtliche Funktionen, die zum gleichen Kreisring gehören. Sie bilden gemäß einem wichtigen Satz der Theorie der normalen Funktionsscharen eine in diesem Kreisring normale Funktionsschar. Da für jede Funktion auf der Mittellinie des Kreisringes mindestens ein Punkt existiert, in welchem sie $\leq m$, bilden sie eine in diesem Kreisring gleichmäßig beschränkte Funktionsschar. Insbesondere sind also die Funktionen der betrachteten Klasse auf der Mittellinie des betrachteten Kreisringes und gemäß dem Maximumprinzip auf dem Kreis $|z| = 1 - \vartheta$ gleichmäßig beschränkt. Da es sich um höchstens $p + q + 1$ Klassen handelt, ist damit die Existenz einer Schranke im Sinne meines Satzes gesichert.

§ 2. Berechnung der Schranke.

Die Zahlen C_i sollen im Folgenden Konstante bedeuten.

A. Zunächst werde der klassische Fall von Schottky betrachtet. Bohr und Landau ⁶⁾ haben z.B. bewiesen, daß in diesem Fall der Satz gilt: Ist $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und von 0 und 1 verschieden, so gilt für $|z| \leq 1 - \vartheta$ die Ungleichung

$$|f(z)| < e^\Omega, \text{ wobei } \Omega \leq C_1 \frac{\log(|f(0)| + 2)}{\vartheta}$$

und C_1 eine gewisse, unbekannte Konstante bedeutet.

Daraus folgt in leichter Weise die Abschätzung

$$|f(z)| < |f(0)|^{\frac{C_2}{\vartheta}} = e^{\frac{C_3}{\vartheta}},$$

wobei $|f(0)| \geq e$ vorausgesetzt wird. Im entgegengesetzten Fall ist an Stelle von $|f(0)|$ die Zahl e einzusetzen.

In den Fällen B, C und D werde die leicht verallgemeinerte Bieberbach-Montelsche Konfiguration vorausgesetzt. D.h. es wird angenommen, daß die Funktionen $f(z)$ im Einheitskreis höchstens p Nullstellen besitzen und in höchstens q Punkten den Wert 1 annehmen. Die Multiplizität dieser Einsstellen darf jedoch beliebig sein.

B. $p = 0$, q beliebig, jedoch fest.

Dieser Fall läßt sich mit einem Kunstgriff von P. Lévy ⁷⁾ auf den klassischen Satz von Schottky zurückführen. Man

⁶⁾ loc. cit ⁴⁾, (321).

⁷⁾ Vergl. A. OSTROWSKI, Studien über den Schottky'schen Satz [Rektoratsprogramm der Universität Basel 1932, 1—111 (20)].

betrachtet $\sqrt[q+1]{f(z)}$, deren Zweige im Einheitskreis eine reguläre Funktion bilden. Da nur einer der Zweige in einer Einsstelle von $f(z)$ den Wert 1 annimmt, gibt es also mindestens einen Zweig, der im Einheitskreis weder den Wert 0 noch den Wert 1 annimmt. Auf diesen Zweig läßt sich die Abschätzung von (A) anwenden. Man findet

$$\left| \sqrt[q+1]{f(z)} \right| \leq |f(0)|^{\frac{C_2}{\vartheta(q+1)}} \text{ resp. } e^{\frac{C_2}{\vartheta}}$$

je nachdem $|f(0)|^{\frac{1}{q+1}} \geq e$ oder $< e$.

D.h. $|f(z)| < \mu^{\frac{C_2}{\vartheta}}$, wobei μ die größere der Zahlen $|f(0)|$ und e^{q+1} bedeutet. Für genügend große $|f(0)|$ gilt demnach auch noch in diesem Falle die Abschätzung des Falles (A). k_0 wird so groß angenommen, daß in dieser Ungleichung k_0 an Stelle von μ gesetzt werden kann.

C. $p = 1$, q beliebig, jedoch fest.

Die in Betracht fallenden Funktionen besitzen demnach im Einheitskreis höchstens eine Nullstelle. ϱ bedeute eine positive, feste Zahl, wobei die Differenz $1 - \varrho$ genügend klein gewählt sei. Der Sinn dieses „genügend“ wird nachher präzisiert werden. Ich zerlege die zu betrachtenden Funktionen in zwei Klassen, je nachdem der absolute Betrag ihrer Nullstelle $\leq \varrho$ oder $> \varrho$.

1. *Klasse*: Ich betrachte das Verhalten einer solchen Funktion für $|z| = \frac{1+\varrho}{2}$. Gemäß der Bemerkung in § 1 gibt es auf dieser Kreisperipherie mindestens einen Punkt z_0 , in welchem

$$|f(z_0)| \leq m, \text{ wobei } m = k_0 + k_1.$$

D.h. die Funktion $f(z)$ besitzt im Kreis $|z - z_0| < \frac{1-\varrho}{2}$ keine Null- und höchstens q Eins-Stellen, zudem ist der absolute Betrag der Funktion in seinem Mittelpunkt beschränkt. Auf diesen Kreis kann demnach der Fall B angewendet werden. Ich finde z.B., daß für $|z - z_0| \leq \frac{1-\varrho}{4}$ die folgende Abschätzung richtig ist

$$|f(z)| < (k_0 + k_1)^{\frac{C_2}{2}}.$$

Mittelst des klassischen Verfahrens der analytischen Fortsetzung kann damit eine Schranke von $|f(z)|$ für $|z| = \frac{1+\varrho}{2}$ gefunden werden. Man konstruiert einfach eine Kreiskette von Kreisen mit den Radien $\frac{1-\varrho}{2}$, deren Zentren auf der Kreisperipherie $\frac{1+\varrho}{2}$ liegen, und wobei zwei benachbarte Zentren höchstens den Ab-

stand $\frac{1-\varrho}{4}$ besitzen. Auf jeden dieser Kreise wendet man wie vorhin den Fall (B) an und findet folgende Abschätzung:

Für $|z| = \frac{1+\varrho}{2}$ ist $|f(z)| < (k_0 + k_1)^{\frac{C_2}{2}\kappa} = (k_0 + k_1)^{C_4}$, wobei κ eine gewisse Konstante bedeutet, die nur von ϱ abhängt. Da die Funktion nun im Kreisring $\varrho < |z| < 1$ keine Null- und höchstens q Einsstellen besitzt, findet man wieder mittelst Fall B die folgende Abschätzung für $|z| = 1 - \vartheta$, wobei $\vartheta < \frac{1-\varrho}{2}$. Für $|z| = 1 - \vartheta$ ist

$$|f(z)| < (k_0 + k_1)^{\frac{C_2 C_4 (1-\varrho)}{2\vartheta}} = (k_0 + k_1)^{\frac{C_5}{\vartheta}}.$$

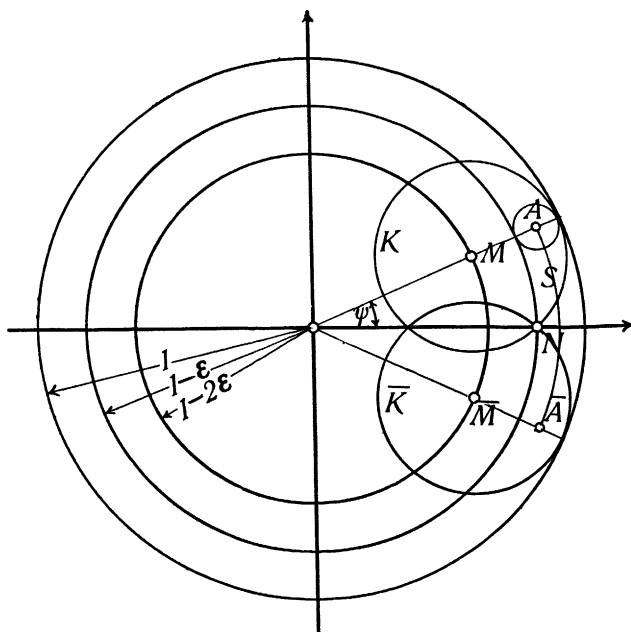
D.h. für die Werte $\vartheta < \frac{1-\varrho}{2}$ ist die behauptete Ungleichung bereits bewiesen. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktion im Kreis $|z| \leq \frac{1+\varrho}{2}$ kann offenbar C_5 so normiert werden, daß die Ungleichung für jeden Wert von ϑ richtig ist.

2. Klasse: Die Funktion besitzt in diesem Fall im Kreisring $\varrho < |z| < 1$ eine Nullstelle N . Der absolute Betrag derselben sei $1-\varepsilon$; im übrigen kann sie auf der positiven reellen Achse angenommen werden. Der Abschätzung der Funktion sei zunächst eine kleine, für das Folgende sehr wesentliche elementare geometrische Betrachtung vorausgeschickt. (Vergl. Figur.) Ich betrachte diejenigen symmetrisch zur reellen Achse gelegenen zwei Kreise K und $\bar{K}$ mit den Radien 2ε , welche durch die Nullstelle hindurchgehen, den Einheitskreis berühren, und deren Zentren M und $\bar{M}$ auf der Kreisperipherie $|z| = 1 - 2\varepsilon$ liegen. Wenn ε genügend klein resp. ϱ genügend nahe bei 1 gewählt wird, beträgt das Argument $\pm \psi$ dieser beiden Mittelpunkte $\pm O(\varepsilon)$, wie eine leichte Rechnung zeigt. Nun betrachte ich den Kreisringsektor, der durch folgende Ungleichung charakterisiert wird:

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq |z| \leq 1 \\ -\psi &\leq \varphi \leq +\psi. \end{aligned}$$

Die Kreis-Mittellinie S dieses Sektors besitzt den Radius $1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Indem man die äußersten Punkte $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) e^{\pm i\psi}$ derselben als Mittelpunkte A und $\bar{A}$ von 2 Kreislein mit dem Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ wählt, (welche also den Einheitskreis berühren), kann man mittelst genau der gleichen Methode wie bei der 1. Klasse durch Fortschreiten um je den halben Radius $\frac{\varepsilon}{4}$ eine Kreiskette von Kreisen mit dem

Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ konstruieren, deren sämtliche Zentren auf S liegen. Wieder zeigt eine elementare Rechnung, daß die Anzahl dieser Kreise beschränkt ist, wenn die Fortsetzung vom Punkte A resp. von $\bar{A}$ bis zum Schnittpunkte von S mit der positiven reellen Achse ausgeführt wird.



Jetzt kann die Abschätzung in folgender Reihenfolge durchgeführt werden:

- Abschätzung im Kreis $|z| \leq 1 - \varepsilon$.
- Abschätzung in den Kreisen K und $\bar{K}$, damit im obigen Kreisringsektor und schließlich im Kreisring $1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq |z| < 1$.
- Abschätzung im Kreisring $1 - 2\varepsilon \leq |z| < 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Abschätzung (a): Im Kreis $|z| \leq 1 - \varepsilon$ besitzt die Funktion keine Nullstellen und höchstens q Einstellen. Es kann deshalb der Fall (B) angewendet werden.

Man findet für $|z| = 1 - \vartheta$, wobei $\vartheta \geq 2\varepsilon$:

$$|f(z)| < |f(0)| \frac{C_2(1-\varepsilon)}{\vartheta-\varepsilon} < |f(0)| \frac{C_2}{\vartheta}.$$

Diese Abschätzung ist für alle ε gültig, wobei $0 < \varepsilon \leq 1 - \varrho$.

b) Um eine Abschätzung für die Punkte A resp. $\bar{A}$ zu gewinnen, kann offenbar wieder der Fall B auf die Kreise K resp. $\bar{K}$ angewendet werden. Man findet

$$|f(A)| < |f(0)|^{\frac{2C_6C_2}{\varepsilon}} = |f(0)|^{\frac{C_7}{\varepsilon/2}}.$$

Eine gleiche Abschätzung ist auch im Punkt $\bar{A}$ richtig. Da man durch eine beschränkte Anzahl von Kreisen von A nach $\bar{A}$ im Sinne des Verfahrens der Klasse (1) gelangen kann, gilt demnach auf dem im positiven Sinn durchlaufenen Kreisbogen $\bar{A}A$ die Abschätzung

$$|f(z)| < |f(0)|^{\frac{C_8}{\varepsilon/2}}.$$

Offenbar gilt auch die gleiche Abschätzung für den Komplementärbogen $A\bar{A}$, wie man in ganz gleicher Weise wie für die Punkte A und $\bar{A}$ schließen kann. Für $|z| = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ gilt demnach die obige Abschätzung. Es sei nun $|z| = 1 - \vartheta$, wobei $\vartheta < \frac{\varepsilon}{2}$. Für diese Kreisperipherie kann gemäß Fall B abgeschätzt werden, indem man sich jeden Punkt der Kreislinie $|z| = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ als Zentrum von diesen Kreislein mit den Radien $\frac{\varepsilon}{2}$ denkt. Man findet für $|z| = 1 - \vartheta$, wobei $\vartheta < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$|f(z)| < |f(0)|^{\frac{C_8C_2}{\vartheta}} = |f(0)|^{\frac{C_9}{\vartheta}}.$$

Damit ist die Abschätzung für der Kreisring $1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq |z| < 1$ sichergestellt.

c) Im Kreisring $1 - 2\varepsilon \leq |z| \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ gilt nach dem Maximumprinzip zunächst die Abschätzung

$$|f(z)| < |f(0)|^{\frac{C_9}{\varepsilon/2}} < e^{\frac{C_{10}}{\vartheta}},$$

wenn $\frac{\varepsilon}{2} \leq \vartheta \leq 2\varepsilon$.

Zusammenfassend gilt demnach im Falle C die folgende Ungleichung:

$$\text{Wenn } |z| = 1 - \vartheta, \text{ so ist } |f(z)| < |k_0 + k_1|^{\frac{C_{11}}{\vartheta}}.$$

D. p beliebig, q beliebig.

Es soll nun der Induktionsschluß bewiesen werden. D.h. für $p-1$ und q gelte die Ungleichung

$$|f(z)| < |k_0 + \dots + k_{p-1}|^{\frac{C_{12}}{\vartheta}}.$$

Daraus soll für p und q die Ungleichung bewiesen werden

$$|f(z)| < |k_0 + \dots + k_p| \frac{C_{13}}{\vartheta}.$$

Eigentlich wäre für diesen Beweis die Darstellung des Falles C nicht nötig gewesen. Da jedoch bei diesem einfachen Fall alle für den Fall D wesentlichen Schlüsse vorgekommen sind, kann man sich nun bei der Schilderung des letzteren um so kürzer fassen.

Man zerlegt auch hier die Funktionen $f(z)$ in zwei Klassen mittels einer zweckmäßig gewählten Zahl ϱ , wobei die Differenz $1 - \varrho$ wieder genügend klein gewählt werde.

1. Klasse: Zu dieser Klasse gehören jene Funktionen, deren Nullstellen im Einheitskreis einen absoluten Betrag $\leq \varrho$ besitzen. D.h. im Kreisring $\varrho < |z| < 1$ besitzen diese Funktionen keine Nullstellen und höchstens q Einsstellen. Zudem existiert wieder auf der Mittellinie dieses Kreisringes für jede Funktion mindestens ein Punkt z_0 , in dem

$$|f(z_0)| \leq k_0 + \dots + k_p.$$

Deshalb kann man genau wie für die 1. Klasse des Falles C schließen, daß für diese sämtlichen Funktionen

$$|f(z)| < |k_0 + \dots + k_p| \frac{C_{13}}{\vartheta} \quad \text{für} \quad |z| \leq 1 - \vartheta.$$

2. Klasse: Zu dieser Klasse gehören diejenigen Funktionen, die mindestens eine Nullstelle mit einem absoluten Betrag $> \varrho$ besitzen. Man konstruiert sich genau die gleiche Figur wie bei der 2. Klasse des Falles C, die Rolle der Nullstelle N jener Figur übernimmt in diesem Fall die Nullstelle von $f(z)$ mit dem größten absoluten Betrage, der $1 - \varepsilon$ betrage. (Sofern mehrere solche existieren, kann eine beliebige davon diese Rolle übernehmen). Nun kann in der gleichen Reihenfolge abgeschätzt werden.

a) Im Kreis $|z| < 1 - \varepsilon$ besitzt die Funktion höchstens $p - 1$ Nullstellen und q Einsstellen. Man findet:

Für $|z| = 1 - \vartheta$, wobei $\vartheta \geq \frac{3}{2}\varepsilon$,

$$|f(z)| < |k_0 + \dots + k_{p-1}| \frac{C_{12}(1-\varepsilon)}{\vartheta-\varepsilon} < |k_0 + \dots + k_{p-1}| \frac{C_{14}}{\vartheta}.$$

Insbesondere gilt

$$|f(z)| < |k_0 + \dots + k_{p-1}| \frac{2C_{14}}{3\varepsilon}, \quad \text{wenn} \quad |z| = 1 - \frac{3\varepsilon}{2}.$$

Daraus ergeben sich mittelst der Ungleichung von Cauchy die

folgenden Abschätzungen für die $p - 1$ ersten Ableitungen von $f(z)$ auf der Kreisperipherie $|z| = 1 - 2\varepsilon$:

$$\left| \frac{f^k(z)}{k!} \right| < \frac{|k_0 + \dots + k_{p-1}|^{\frac{2C_{14}}{3\varepsilon}}}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^k} < |k_0 + \dots + k_{p-1}|^{\frac{C_{15}}{2\varepsilon}} \\ \text{für } k = 0, 1, \dots, p - 1.$$

b) Um eine Abschätzung in den Punkten $A, \bar{A}$ zu erhalten, kann nun offenbar der Fall $(p - 1, q)$ auf die Kreise K und $\bar{K}$ angewendet werden. Man findet

$$|f(A)| < |k_0 + \dots + k_{p-1}|^{\frac{2C_{15}C_{12}}{\varepsilon}} |1 + (2\varepsilon) + \dots + (2\varepsilon)^{p-1}|^{4C_{12}} < \\ < |k_0 + \dots + k_{p-1}|^{\frac{C_{16}}{\varepsilon/2}}.$$

Eine gleiche Abschätzung ist auch in Punkte $\bar{A}$ richtig. Damit findet man nun genau gleich wie beim Falle C für den Kreis $|z| = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ die Abschätzung

$$|f(z)| < |k_0 + \dots + k_{p-1}|^{\frac{C_{17}}{\varepsilon/2}}.$$

Ebenso kann die Abschätzung genau nach der Methode des Falles C zu Ende geführt werden. Der beim Fall D behauptete Induktionsschluß ist damit bewiesen.

E. Nun kann die allgemeine Konfiguration des behaupteten Satzes behandelt werden. Man betrachtet zu diesem Zwecke die Mittellinie des Kreisringes $r \leq |z| \leq 1$. Gemäß den Ausführungen von § 1 sind die Funktionen und damit auch ihre p ersten Ableitungen auf der Kreisperipherie $|z| = \frac{1+r}{2}$ gleichmäßig beschränkt. Indem man alle Punkte dieser Kreisperipherie als Zentren von Kreisen mit dem festen Radius $\frac{1-r}{2}$ wählt, kann man auf diese Kreise den Fall D anwenden. Die behauptete Ungleichung ist damit für den Kreisring $\frac{1+r}{2} \leq |z| < 1$ bewiesen. Für den Kreis $|z| \leq \frac{1+r}{2}$ ist sie infolge der Beschränktheit der betrachteten Funktionsklasse in diesem abgeschlossenen Kreis klar.

Damit ist der Beweis auch für diese allgemeinste Konfiguration geleistet.

(Eingegangen den 2. Oktober 1933.)