

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

YVES COLIN DE VERDIÈRE

Chapitre 3 Multiplicités des valeurs propres

Cours de l'institut Fourier, tome 22 (1993-1994), p. 38-61

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1993-1994__22__38_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Chapitre 3

MULTIPLICITES DES VALEURS PROPRES

1. INTRODUCTION. —

Dans ce chapitre, contrairement au précédent, on considèrera l'ensemble des opérateurs de O_Γ (voir définition au chapitre 1) ou même de M_Γ .

On s'intéresse, par exemple, au problème de savoir quels spectres sont réalisables comme spectre d'une matrice de O_Γ lorsque Γ est donné. Tel quel ce problème est mal posé: nous lui préférons une version *stable* utilisant des notions de *transversalité*.

Nous commençons par décrire en détail la théorie des perturbations des valeurs propres multiples (section 2).

En vue de l'appliquer aux dégénérescences de graphes (mineurs), il est ensuite nécessaire d'étendre cette théorie à une compactification naturelle de l'espace des formes quadratiques (section 3): on reformule ainsi cette théorie des perturbations en termes de géométrie symplectique.

Nous appliquons alors ce qui précède au spectre des graphes (section 4). En particulier, on définit 2 invariants numériques $\mu(\Gamma)$ et $\nu(\Gamma)$ d'un graphe fini qui ont la propriété essentielle d'être des fonctions croissantes pour la relation de mineur (section 5). On y montre que $\mu(\Gamma)$ permet de lire la planarité de Γ et comment $\nu(\Gamma)$ est relié à la largeur d'arbre.

Dans la section 6, nous donnons quelques indications sur la compactification des différentes familles d'opérateurs différentiels auto-adjoints associés à un graphe fini: $R_\Gamma \subset O_\Gamma \subset M_\Gamma$. En particulier, nous montrons le rôle que jouent les transformations étoile-triangle généralisées.

Enfin, dans la section 7, nous étendons ce qui précède aux graphes infinis.

La section 8 est consacré à différents problèmes et commentaires.

On s'est largement inspiré des publications [CV2] et [CV6].

2. PERTURBATIONS DES VALEURS PROPRES MULTIPLES ET TRANSVERSALITE. —

2.1. Perturbations des valeurs propres multiples. —

Références pour cette section: [AR], [R-S].

Plaçons-nous dans un espace de Hilbert *réel* $\mathcal{H}$ qu'on va supposer de dimension finie pour alléger l'écriture (en dimension infinie, il faudrait considérer des opérateurs auto-adjoints tous de même domaine) dont on notera $(.|.)$ le produit scalaire. On notera $\text{Sym}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs symétriques sur $\mathcal{H}$ qu'on pourra identifier à l'espace des formes quadratiques $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ au moyen de la bijection

$$A \rightarrow q_A ,$$

qui associe à A la forme quadratique $q_A(x) = (Ax|x)$.

Soit $A_o \in \text{Sym}(\mathcal{H})$, λ_o une valeur propre de A_o , E_o l'espace propre associé et N la dimension de E_o (en dimension infinie, on supposerait que λ_o est un point isolé du spectre et que l'espace propre associé est de dimension finie) .

Soit D un disque fermé de centre λ_o du plan complexe ne contenant pas d'autre valeur propre de A_o que λ_o . Soit V un voisinage ouvert connexe de A_o tel que les opérateurs $A \in V$ n'ont pas de valeur propre sur $\gamma = \partial D$.

Alors $P_A = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} (\lambda - A)^{-1} d\lambda$ est le projecteur orthogonal (cela se vérifie immédiatement par diagonalisation de A) sur le sous-espace de $\mathcal{H}$ engendré par les vecteurs propres de A dont la valeur propre est dans D . Il est clair que P_A dépend analytiquement de A dans V . Quitte à restreindre V , on peut supposer que l'image E du projecteur P_A est transverse à l'orthogonal F_o de E_o . On définit alors une *isométrie* $U_{E_o, E}$ de E_o sur E par la formule:

$$U_{E_o, E} = (\text{Id}_{E_o} + B) \circ C ,$$

où $B : E_o \rightarrow F_o$ est l'application linéaire dont le graphe est E et

$$C = [({}^t(\text{Id}_{E_o} + B))(\text{Id}_{E_o} + B)]^{-\frac{1}{2}} ,$$

où la puissance $-\frac{1}{2}$ est prise au sens du calcul fonctionnel des opérateurs symétriques dans E_o .

On considère alors, toujours pour $A \in V$, l'opérateur $\Phi(A) = (U_{E_o, E})^{-1} \circ A|_E \circ U_{E_o, E}$ qui est symétrique sur E_o et admet pour spectre celui de $A|_E$ c'est-à-dire les valeurs propres de A situées dans D .

L'application Φ est analytique dans V et on peut calculer la différentielle L de $\Psi : V \rightarrow \mathcal{Q}(E_o)$ définie par $\Psi(A) = q_{\Phi(A)}$ en A_o .

On trouve, par un calcul sans malices:

$$L(\delta A) = (\delta A.|.)|_{E_o} :$$

en effet $\Psi(A)(x, y) = (AUx|Uy)$, d'où en dérivant:

$$\delta\Psi(x, y) = (\delta Ax|y) + (A\delta Ux|y) + (Ax|\delta Uy)$$

et l'on utilise alors la symétrie de A et le fait que $x, y \in E_o$ pour finir le calcul grâce à l'antisymétrie de δU .

On en déduit que Ψ est une submersion de V sur $\mathcal{Q}(E_o)$. En particulier, on a les résultats suivants:

THÉORÈME. — Les valeurs propres $\lambda_1(\epsilon) \leq \dots \leq \lambda_N(\epsilon)$ situées dans D de $A_o + \epsilon \delta A$ vérifient :

$$\lambda_i(\epsilon) = \lambda_o + \epsilon \mu_i + O(\epsilon^2) ,$$

où $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_N$ sont les valeurs propres de $L(\delta A) = (\delta A \cdot | \cdot)|_{E_o}$.

En effet, ces valeurs propres sont celles de $\Phi(A) = A_o + \epsilon L(\delta A) + O(\epsilon^2)$ et l'on applique le minimax.

THÉORÈME. — W_{N, λ_o} , l'ensemble des matrices de $\text{Sym}(\mathcal{H})$ ayant λ_o comme valeur propre de multiplicité N , est une sous-variété (non fermée) de codimension $\frac{N(N+1)}{2}$ de $\text{Sym}(\mathcal{H})$ et $W_N = \cup_{\lambda \in \mathbf{R}} W_{N, \lambda}$ en est une sous-variété de codimension $\frac{N(N+1)}{2} - 1$.

En effet, W_{N, λ_o} est l'image inverse de $\lambda_o Id$ par Ψ et donc son espace tangent en A_o est le noyau de L .

En particulier W_2 est de codimension 2, W_3 de codimension 5, etc...

Une famille à un paramètre réel générique de matrices symétriques n'a donc pas de valeurs propres dégénérées, une famille à 2 paramètres peut en avoir en des points isolés, etc... Cette observation remonte à Von Neumann et Wigner [vN-W], et a été amplifiée par Arnold [AR].

Il faut remarquer la formule très simple donnant la variation première des valeurs propres. Cette formule est un cas particulier de la théorie des perturbations des variétés critiques non-dégénérées au sens de Bott [BO].

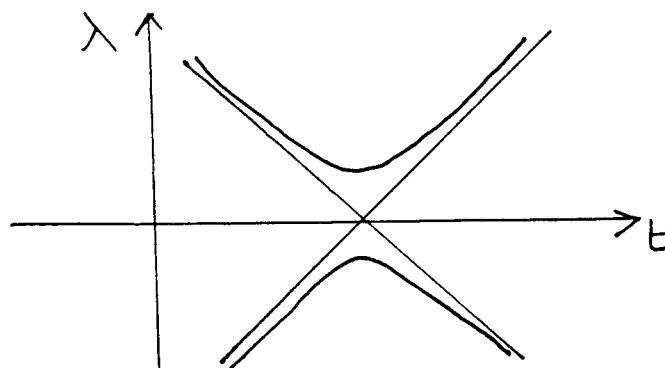
Si $F_\epsilon : Z \rightarrow \mathbf{R}$, où Z est une variété C^∞ , admet pour $\epsilon = 0$ une variété critique non-dégénérée C , on obtient une formule pour les valeurs critiques de F_ϵ au premier ordre en considérant les valeurs critiques de la restriction à C de $\frac{dF_\epsilon}{d\epsilon}$ en $\epsilon = 0$. Ici il faudrait considérer les valeurs propres de A comme les valeurs critiques de q_A restreinte à la sphère unité de $\mathcal{H}$.

Ce phénomène est aussi à la base de la possibilité d'évaluer l'effet tunnel en régime semi-classique même en l'absence d'analyticité du potentiel [CV3], voir chapitre 4.

2.2. L'hypothèse de transversalité. —

Il faut remarquer que la transversalité ne se voit pas au niveau des valeurs propres, mais au niveau des matrices: si $A(t) = \text{diag}(t, -t) \in \text{Sym}(\mathbf{R}^2)$. Les valeurs propres $\lambda_1(t) = -|t|$ et $\lambda_2(t) = |t|$ semblent se croiser transversalement. Mais il n'en est rien: si on considère $A_\epsilon(t)$ obtenu en ajoutant ϵ hors de la diagonale à $A(t)$, les valeurs propres de $A_\epsilon(t)$, pour $\epsilon \neq 0$ ne sont dégénérées

pour aucune valeur de t .



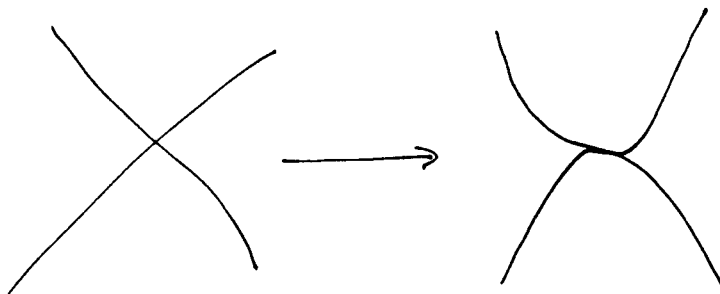
Les valeurs propres de $A(t)$ et $A_\epsilon(t)$

DÉFINITION. — Si Z et W sont 2 sous-variétés de X se coupant en x_0 , on dit qu'elles se coupent transversalement en x_0 si on a:

$$T_{x_0}Z + T_{x_0}W = T_{x_0}X.$$

Ce n'est possible que si $e = \dim W + \dim Z - \dim X \geq 0$. Dans ce cas l'intersection de Z et W est une sous-variété de dimension e au voisinage de x_0 .

La transversalité permet une reformulation géométrique des théorèmes de type fonctions implicites. En particulier si W et Z se coupent transversalement en x_0 , et W_ϵ une perturbation C^1 de W , il existe, pour ϵ petit; un point x_ϵ convergent vers x_0 tel que W_ϵ et Z se coupent transversalement en x_ϵ . Pour une perturbation C^0 , on a existence de x_ϵ mais on peut seulement garantir que les variétés se coupent en x_ϵ , la transversalité peut disparaître:



Perturbations C^0 et C^1 de l'intersection de 2 courbes planes

Soit maintenant

$$Z \subset \text{Sym}(\mathcal{H})$$

une sous-variété et $A_0 \in Z$. On dira que la suite de valeurs propres

$$\Sigma = ((\lambda_1, m_1), (\lambda_2, m_2), \dots, (\lambda_k, m_k))$$

de A_0 de multiplicités $m_i = \dim E_i$ est transversale pour Z en A_0 ou stable si Z est transversale en A_0 à la sous-variété W_Σ de $\text{Sym}(\mathcal{H})$ formée des matrices ayant Σ comme partie de leur spectre avec les multiplicités $m(\lambda_i) = m_i$. On construit alors une application $\Phi : V \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k Q(E_i)$ comme au 2.1. où V est un voisinage de A_0 dans Z . On a alors

transversalité si et seulement si la différentielle

$$L : T_{A_o} Z \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{i=k} Q(E_i) ,$$

de Φ , définie par $L(\delta A) = \bigoplus ((\delta A) \cdot | \cdot)|_{E_i}$ est surjective.

Il est clair que si c'est le cas et si Z_ϵ converge au sens C^0 vers Z , alors il existe A_ϵ convergeant vers A_o tel que le spectre de A_ϵ admette les valeurs propres λ_i avec la multiplicité m_i .

2.3. La topologie. —

Il est intéressant de pouvoir détecter la présence de valeurs propres multiples dans une famille d'opérateurs de façon purement topologique. Bornons-nous au cas de la dimension 2.

Soit Z de dimension 2 coupant W_2 en A_o transversalement avec $\lambda_k(A_o) = \lambda_{k+1}(A_o)$.

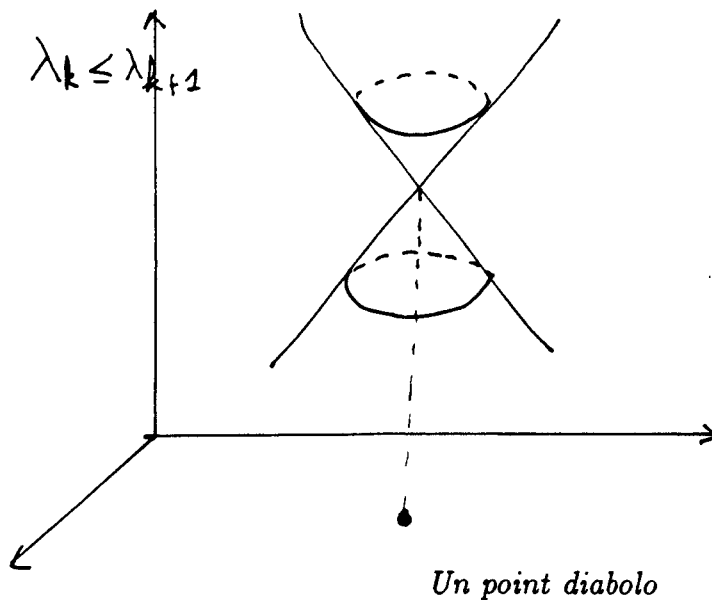
Soit maintenant γ un petit cycle de Z entourant A_o , soit E_k (resp. E_{k+1}) les fibrés vectoriels réels de dimension 1 définis dans un voisinage de A_o dans Z privé de A_o par $E_j(A) = \text{Ker}(A - \lambda_j(A))$ avec $j = k$ ou $k + 1$.

Alors ces fibrés ont une holonomie non triviale sur γ : si on suit par continuité une fonction propre normalisée de E_k , lorsqu'on parcourt γ une fois, elle change de signe. Cela se prouve en faisant une homotopie de façon à rendre γ très petit et en linéarisant: on se ramène au cas de $\mathbf{R}^2$ et de la courbe fermée de matrices

$$A(t) = \begin{pmatrix} \epsilon \cos t & \epsilon \sin t \\ \epsilon \sin t & -\epsilon \cos t \end{pmatrix} ,$$

pour laquelle les vecteurs propres font un angle $t/2$ et $t + \pi/2$ avec le premier axe de coordonnées.

Un tel point A_o de Z est appelé point *diabolo*, en effet le dessin dans $Z \times \mathbf{R}$ formé des graphes des valeurs propres λ_k et λ_{k+1} est un cône dont le sommet correspond au point A_o .



Cette propriété permet de détecter numériquement les valeurs propres dégénérées dans les familles à 2 paramètres. Si γ est le bord d'un domaine D et que le fibré E_k est non trivial sur γ , D contient des points où la k -ème valeur propre est dégénérée. Cette propriété est utilisée dans [B-W].

On peut généraliser au cas *hermitien complexe*. Dans ce cas W_2 est de codimension réelle 3 et on doit regarder l'entrelacement avec une surface compacte. La classe de Chern du fibré analogue à E_k permet de calculer le nombre d'entrelacement qui est ici un entier. On peut le calculer par intégrale de la courbure d'une connection naturelle, c'est l'interprétation géométrique que B. Simon a donné de la phase de Berry [BY1],[BY2].

3. COMPACTIFICATIONS. —

Ce §3 s'inspire largement de [CV6].

Remarque.—

Certaines compactifications utilisées en géométrie relèvent de variantes de la méthode que nous allons décrire: par exemple la compactification de l'espace de Teichmüller d'une surface au moyen des (classes d'isotopie de) feuilletages mesurés. Dans ce cas, l'espace E est l'espace des 1-formes différentielles sur la surface et il est facile d'associer à une métrique riemannienne aussi bien qu'à un feuilletage mesuré une forme quadratique positive sur E . La difficulté est de faire le quotient par les difféomorphismes isotopes à l'identité.

3.1. Formes quadratiques et espaces Lagrangiens. —

Il s'agit d'une adaptation de la théorie dite de la Γ -convergence en calcul des variations [DM]. Le but de cette section est de mettre en place un cadre général pour les problèmes de limites singulières en théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints et pour les problèmes de type Dirichlet. Comme applications simples, on décrira dans le §5 les dégénérescences de graphes connues sous le nom de mineurs: on obtient ainsi des démonstrations simples de la propriété de monotonie de l'invariant $\mu(\Gamma)$ introduit dans [CV1] (voir aussi [CV2]).

Dans la suite X est un espace vectoriel réel de dimension finie n . En fait tout s'étend au cas complexe et une partie à la dimension infinie (voir §7). Dans les applications aux graphes, X sera $\mathbf{R}^V$.

On note $Z = T^*(X) = X \oplus X^*$ le cotangent de X , muni de la structure symplectique canonique

$$\omega((x, \xi), (x', \xi')) = \xi(x') - \xi'(x) .$$

On désigne par $\mathcal{L}_X$ (ou $\mathcal{L}$ si aucune ambiguïté sur X n'existe) la grassmannienne des *sous-espaces lagrangiens* de Z . Rappelons qu'un sous-espace lagrangien de Z est un sous-espace maximal sur lequel ω s'annule: ils sont tous de dimension n . $\mathcal{L}_X$ est une variété analytique réelle compacte de dimension $n(n+1)/2$, cf [DU].

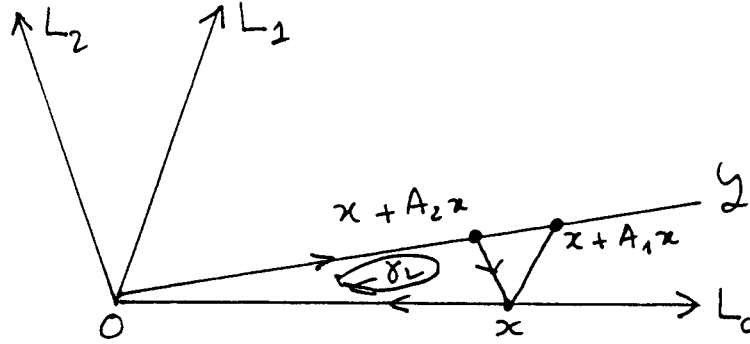
Toute forme quadratique sur X s'identifie à une application linéaire de X dans X^* et on définit ainsi une application injective d'image dense $j : \mathcal{Q}(X) \rightarrow \mathcal{L}_X$ en associant à une forme quadratique le graphe de cette application linéaire qui lui est associée.

On peut identifier l'espace tangent de $\mathcal{L}$ en L_o à l'espace $\mathcal{Q}(L_o)$ de la façon suivante: L_o admet un supplémentaire lagrangien L_1 qui s'identifie par ω au dual de L_o . Et donc les lagrangiens proches de L_o sont des graphes d'applications linéaires symétriques de L_o dans $L_1 = L_o^*$. On a ainsi des cartes au voisinage de L_o associées aux choix des L_1 .

PROPOSITION (VOIR [DU]). — *Les changements de cartes ont une différentielle égale à l'identité en 0 et donc l'identification de l'espace tangent à $\mathcal{L}$ en L_o à $\mathcal{Q}(L_o)$ est canonique.*

Preuve. —

En effet, soient $Z = L_o \oplus L_i$, $i = 1, 2$ deux décompositions lagrangiennes de l'espace symplectique (Z, ω) . Soit $\mathcal{L}$ un lagrangien proche de L_o qui s'écrit comme graphes des applications linéaires $A_i : L_o \rightarrow L_i$. Soit γ_i les lacets fermés d'origine O définis par 1 chemin de O à $x + A_i x$ dans $\mathcal{L}$, puis 1 chemin de $(x + A_i x)$ à x dans $x + L_i$, puis un chemin de x à O dans L_o . L'aire pour ω de n'importe quel triangle dont le bord est un de ces chemins est indépendante du choix précis des chemins et vaut $q_i(x) = \frac{1}{2}(A_i x | x)$. Si x reste borné, on voit que la différence de ces intégrales est $O(\|A_i\|^2)$.



Les γ_i

□

D'autre part, si $\rho = (F, q)$ est une forme quadratique de domaine $F \subset X$ où $q \in \mathcal{Q}_F$, on peut aussi lui associer un espace lagrangien:

$$j(\rho) = \{(x, \xi) | x \in F \text{ et } \forall y \in F, C_q(x, y) = \xi(y)\} ,$$

où C_q est la forme bilinéaire symétrique associée à q . Autrement dit si $B_q : F \rightarrow F^*$ est l'application linéaire associée à q

$$j(\rho) = \{(x, \xi) \in F \times X^* | \xi|_F = B_q x\} .$$

Réciproquement, si L est lagrangien, on lui associe une forme quadratique $\rho = (F, q)$ dont le domaine F est la projection de L sur X et $\forall x, y \in F$, $q(x, y) = \xi(y)$ où $(x, \xi) \in L$. Le

fait que $\xi(y)$ ne dépende pas du choix de $(x, \xi) \in L$ provient du fait que L est lagrangienne: si (x, ξ) et (x, ξ') sont dans L ,

$$0 = \omega((x, \xi), (x, \xi')) = \xi(x) - \xi'(x) .$$

On obtient ainsi une bijection de $\mathcal{L}$ avec les formes quadratiques non partout définies sur X et par suite une compactification de Q_X puisque $\mathcal{L}$ est compacte. La topologie ainsi définie sur les formes quadratiques sera nommée plus bas *topologie lagrangienne*.

3.2. Spectres. —

On suppose X muni d'une structure euclidienne qui permet d'identifier X et X^* . Soit $L \in \mathcal{L}$, on définit le spectre de L par

$$\sigma(L) = \{\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{\dim F}\} \cup \infty ,$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la forme quadratique q sur son domaine de définition $F \subset X$ muni de la structure euclidienne induite par X et où ∞ est de multiplicité $\dim X - \dim F$ (l'espace propre E_∞ est l'orthogonal de F dans X).

Soit $B : F \rightarrow F$ l'application linéaire symétrique associée à q , on définit, pour λ non valeur propre de L , la résolvante $R(\lambda) : X \rightarrow X$ par

$$R(\lambda) = j \circ (\lambda - B)^{-1} \circ P$$

où j est l'injection de F dans X et P la projection orthogonale de X sur F .

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $L \in \mathcal{L}$, on définit $L_\lambda \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ (complexifié de $\mathcal{L}$ formé des sous-espaces lagrangiens complexes de $(X \oplus X^*) \otimes \mathbb{C}$) comme

$$L_\lambda = \{(x, \lambda x - \xi) | (x, \xi) \in L\} .$$

C'est un espace lagrangien dépendant analytiquement de L et λ .

$\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $\rho = (F, q)$ de variété lagrangienne L si et seulement si L_λ ne rencontre pas $X \oplus 0$ transversalement. La multiplicité de λ est la dimension de cette intersection et l'espace propre est cette intersection. Si λ n'est pas valeur propre, L_λ est le graphe d'une application linéaire de $0 \oplus X^*$ (que l'on identifie à X) dans $X \oplus 0$ dont l'image est contenue dans F : cette application $R(\lambda) : X \rightarrow X$ qui est définie lorsque λ n'est pas valeur propre est la résolvante. Elle dépend analytiquement de L et λ .

Il en est donc de même des projecteurs spectraux définis de la façon habituelle

$$\Pi_I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(\lambda) d\lambda ,$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont les extrémités ne rencontrent pas le spectre et γ un cercle de diamètre I dans $\mathbb{C}$.

On peut ainsi définir des variétés $\bar{W}_{\mu, m}$ dans $\mathcal{L}$ qui sont formées des L qui admettent μ comme valeur propre de multiplicité m . On a évidemment, en posant $D_\mu = \{(x, \mu x) | x \in X\}$:

$$\bar{W}_{\mu, m} = \{L \in \mathcal{L} | \dim(L \cap D_\mu) = m\}$$

qui est une variété de codimension $m(m+1)/2$ de $\mathcal{L}$ (on notera la variété $\bar{W}_{m,0}$ et son analogue hermitien Y_m). En effet, dans le cas où L est partout définie, cela résulte du §2; dans le cas général, l'isotropie de la grassmannienne lagrangienne montre que $\bar{W}_{\mu,m}$ est une sous-variété compacte de $\mathcal{L}$ dont l'espace tangent est défini de la façon suivante: si $E_o \subset F$ est l'espace propre, on a

$$T_L \bar{W}_{\mu,m} = \{r \in \mathcal{Q}(L) | r|_{E_o} = 0\} .$$

On voit ainsi que les notions usuelles liées au spectre des matrices symétriques s'étendent sans difficultés aux éléments de $\mathcal{L}$.

En particulier la théorie des perturbations des valeurs propres multiples s'étend avec les formules évidentes faisant intervenir la forme quadratique sur L associée à δA qu'il faut restreindre à l'espace propre qui s'identifie évidemment à un sous-espace de L_λ .

3.3. L'indice de Maslov revisité. —

Rappelons que le groupe de Poincaré (π_1) de la grassmannienne lagrangienne $\mathcal{L}$ est égal à $\mathbf{Z}$. Cela permet de définir l'indice de Maslov d'une courbe fermée. On peut le définir aussi comme le nombre d'intersection avec le cycle orienté de codimension 1 formé des lagrangiens qui ne sont pas transverses à un lagrangien L_o donné.

Dans notre exemple précédent, prenons pour L_o le lagrangien $0 \oplus \mathbf{R}^V$: L_o est formé des formes quadratiques non partout définie ou ayant une valeur propre infinie.

Soit maintenant γ un lacet fermé de $\mathcal{L}$ et γ_o une petite perturbation de γ telle que les valeurs propres des formes de γ soient toutes simples (c'est possible, car condition de codimension 2).

Alors on suit une valeur propre $\lambda(\gamma_o(t))$ par continuité dans $P^1(\mathbf{R})$. Le degré de $t \rightarrow \lambda(\gamma_o(t))$ est alors égal à l'indice de Maslov de γ et en particulier indépendant de la petite perturbation choisie.

On voit ainsi qu'il n'y a pas d'indexation uniforme possible pour le spectre...

3.4. Un exemple de limite singulière. —

On considère une famille d'opérateurs de la forme:

$$A(\varepsilon) = A_0(\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} A_1 ,$$

où A_0 dépend de façon C^0 de ε .

Alors, dans la grassmannienne $\mathcal{L}$, $A(\varepsilon)$ converge vers la forme quadratique associée à $A_0(0)$ restreinte à $\ker(A_1)$.

De plus si A_0 et A_1 dépendent de façon différentiable de paramètre auxiliaire, on a une convergence différentiable.

Preuve. —

On décompose de façon orthogonale $\mathbf{R}^V = E \oplus F$, avec $E = \ker A_1$. On écrit alors le graphe de $A(\varepsilon)$ sous la forme:

$$\xi = B(\varepsilon)(x, y), \quad \eta = C(\varepsilon)(x) + D(\varepsilon)(y) + \frac{1}{\varepsilon}Ey,$$

équations que l'on réécrit:

$$\xi = B(\varepsilon)(x, y), \quad (E + \varepsilon D(\varepsilon))(y) = \eta - C(\varepsilon)(x).$$

De la 2ème équation, on tire:

$$y = K(\varepsilon)(\eta, x),$$

et en reportant dans la 1ère

$$\xi = L(\varepsilon)(\varepsilon, x).$$

Cela montre la continuité, la limite est facile à identifier:

$$y = 0, \quad \xi = B(0)(x, 0).$$

4. INVARIANTS SPECTRAUX DE GRAPHS. —

Le théorème de Perron-Frobenius affirme que si le graphe est connexe et $A \in O_\Gamma$ la première valeur propre de A est simple.

Remarquons que ce théorème s'étend au cas non connexe à condition d'imposer une condition de transversalité: si O_Γ coupe transversalement $W_{\lambda_1(A), n}$ en A , alors $n = 1$.

En effet dans le cas contraire, soit φ_1, φ_2 2 éléments de $E_1 = \ker(A - \lambda_1)$ de supports disjoints contenus dans 2 composantes connexes de Γ , alors si q est une forme quadratique sur E_1 telle que $q(\varphi_1, \varphi_2) = 1$, il est impossible de la réaliser par une restriction d'une forme quadratique de $T_A O_\Gamma$ car de telles formes rendent toutes φ_1 orthogonale à φ_2 .

4.1. L'invariant $\mu(\Gamma)$. —

On est amené ainsi à s'intéresser à la 2ème valeur propre $\lambda_2(A)$:

soit Γ un graphe fini, et $A \in O_\Gamma$, on dira que $\lambda_k(A) = \lambda$ est *stable* si cette valeur propre est de multiplicité n et que $W_{\lambda, n}$ et O_Γ se coupent transversalement en A : autrement dit, si E_λ est l'espace propre, on demande que l'ensemble des formes quadratiques sur E_λ soit engendré par les formes $q_{i,j} = x_i x_j$ $\{i, j\} \in E$ et x_i^2 , $i \in V$ qui engendrent l'espace tangent $T_A O_\Gamma$.

Si cette propriété est satisfaite, on notera:

$$\lambda_k \in \sigma_s(A; O_\Gamma).$$

On a bien sûr $\sigma_s(A, O_\Gamma) \subset \sigma(A)$ mais en général ces ensembles sont distincts. Un exemple simple est fourni par le graphe sans arêtes en prenant pour A une matrice diagonale quelconque de spectre non simple. Bien sûr, on a souhaité faire figurer O_Γ dans la notation,

car la stabilité est une notion relative à une famille d'opérateurs, on notera d'une manière générale

$$\lambda_k \in \sigma_s(A; \mathcal{F})$$

où $\mathcal{F}$ est une sous-variété de l'espace des matrices symétriques $V \times V$.

On pose alors la:

DÉFINITION. —

$$\mu(\Gamma) = \sup\{n | \exists A \in O_\Gamma, \dim(E_{\lambda_2(A)}) = n, \lambda_2(A) \in \sigma_s(A, O_\Gamma)\}.$$

Exemples:

1) Il est facile de vérifier que $\mu(K_N) = N - 1$ où K_N est le graphe complet à N sommets; on a du reste une réciproque: si $\mu(\Gamma) = \#V - 1$, Γ est un graphe complet.

2) Il est intéressant de vérifier à titre d'exercice que $\mu(K_{3,3}) = 4$ où $K_{3,3}$ est le 2ème graphe de Kuratowski. Ce graphe a 6 sommets répartis en 2 classes de 3 et dont les arêtes ont une extrémité dans chaque classe.

4.2. L'invariant $\nu(\Gamma)$. —

On va définir un nouvel invariant d'un graphe fini (rappelons que M_Γ est l'ensemble de tous les opérateurs différentiels elliptiques auto-adjoints sur Γ):

DÉFINITION. —

$$\nu(\Gamma) = \sup\{n | \exists A \in M_\Gamma, \dim(E_{\lambda_1(A)}) = n, \lambda_1(A) \in \sigma_s(A, M_\Gamma)\}.$$

Exemples:

1) Si T est un arbre, $\nu(T) = 1$.

preuve: changement de jauge.

2) Les graphes planaires P_N .

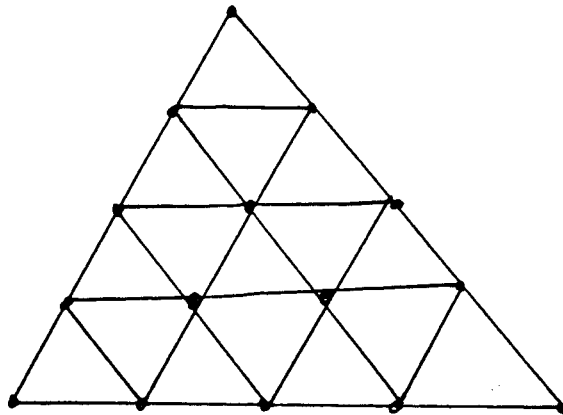


Figure: le graphe P_5 .

Les graphes P_N sont décrits comme graphes plongés dans $\mathbb{C}$ de la façon suivante: $V_N = V(P_N) = \{n + m\omega \mid 1 \leq n, m \leq N, n + m \leq N + 1\}$, où $\omega = e^{i\pi/3}$. $E_N = E(P_N)$ est l'ensemble des paires $z, z' \in V_N$ telles que $|z - z'| = 1$. Autrement dit P_N est une triangulation d'un triangle équilatéral par des triangles équilatéraux de côtés 1.

THÉORÈME. — $\nu(P_N) = N$

Comme corollaire, ν n'est pas borné pour les graphes planaires ce qui est en contraste avec μ qui est ≤ 3 pour les graphes planaires.

Pour prouver le théorème précédent, on va exhiber $A \in M_{P_N}$ telle que $A \geq 0$, $\dim \ker(A) = N$ et $0 \in \sigma_s(A, M_{P_N})$.

Mais d'abord remarquons que, si $A \in M_{P_N}$, $\dim(\ker(A)) \leq N$: autrement, il existerait une fonction non nulle dans $\ker A$ nulle sur l'ensemble $B \subset V_N$ défini par:

$$B = \{1 + \omega, 2 + \omega, \dots, N + \omega\};$$

il est clair qu'une telle fonction serait identiquement nulle car on peut calculer grâce à l'équation $A\varphi = 0$ les valeurs de φ sur tous les sommets à partir des valeurs sur B .

L'exemple le plus simple est une matrice A à coefficients réels:

$$Af(z) = \sum_{z' \sim z} f(z') + \frac{d(z)}{2} f(z),$$

où $d(z)$ est le degré z ($d(z) = 2, 4$ ou 6 suivant la position de z).

Maintenant, si $D : \mathbb{C}^{V_N} \rightarrow \mathbb{C}^{V_N}$ est définie par:

$$Df(z) = f(z) + f(z + 1) + f(z + \omega)$$

(ou $Df(z) = 0$ si $z + 1$ et $z + \omega$ ne sont pas dans V_N), alors on vérifie facilement que $A = D^*D$. Cela implique que $A \geq 0$ et $\ker(A) = \ker(D)$. De plus, c'est un exercice facile de vérifier que: $\dim(\ker(D)) = N$. Plus précisément, il y a une base de $\ker D$ formée des

$$\varphi_l \ (l = 1, \dots, N)$$

où $\varphi_l(i + \omega) = \delta_{i,l}$.

On peut vérifier sans trop de mal la propriété de transversalité ([CV13]).

Question: étant donné $A \in M_G$, on peut définir le flux du champ magnétique pour chaque cycle comme un angle dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui est l'argument du produit $\prod_i a_{i,i+1}$ sur les arêtes du cycle. Dans notre exemple, le flux est π pour chaque bord de face triangulaire.

Maintenant, une question: y-a-t'il une borne supérieure de $\dim(\ker A)$ de $A \in M_\Gamma$ en termes d'informations sur les flux?

Comparer aussi à [L-L].

4.3. Signatures spectrales. —

On dira qu'une suite de valeurs propres $\Sigma = (\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k)$ est un *spectre* Γ -stable si il existe $A_0 \in O_\Gamma$ tel que le spectre de A_0 soit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k < \lambda_{k+1} \leq \lambda_N$

et que l'injection canonique de O_Γ dans $\text{Sym}(\mathcal{H})$ soit transversale à W_Σ en A_o , où W_Σ est l'ensemble des matrices ayant Σ comme début du spectre.

On appelle *signature spectrale* de Γ et on note $SS(\Gamma)$ l'ensemble des spectres Σ qui sont Γ -stables.

Comme la signature contient beaucoup d'informations, il peut être utile d'en extraire des invariants plus faibles. Par exemple, l'invariant $\mu(\Gamma)$ défini plus haut.

Exemples de signatures spectrales (on n'a donné que les éléments maximaux des signatures de ces graphes).

Ex1 : Γ est formé de N points et aucune arête, alors $SS(\Gamma) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N\}$.

Ex2 : Γ est le graphe cyclique à N sommets, alors: $SS(\Gamma) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4 \leq \lambda_5 < \dots\}$.

Ex3 : Γ est le graphe complet à N sommets, alors: $SS(\Gamma) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N\}$.

Ex4 : Γ est l'étoile à 3 branches, alors: $SS(\Gamma) = \{\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_4\}$. On remarque que ce graphe a même signature spectrale que le cycle à 4 sommets.

On peut conjecturer que $SS(\Gamma)$ est toujours donné par des restrictions sur la suite des multiplicités.

5. MONOTONIE PAR MINEURS. —

Une des propriétés principales des invariants μ , ν et de la signature spectrale est leur monotonie par rapport à la relation de mineurs des graphes. C'est pour cela que la transversalité est indispensable.

Par exemple, le laplacien canonique sur le graphe E_N (étoile à N branches) a sa 2ème valeur propre de multiplicité $N - 1$ alors qu'il est mineur de triangulations de S^2 pour lesquelles cette multiplicité (Cheng discret) est au plus 3.

5.1. Mineurs. —

On dira que Γ' est un mineur de Γ si on peut passer de Γ à Γ' en effectuant les opérations élémentaires suivantes:

(R) qui consiste à ôter une arête.

(C) qui consiste à contracter une arête et identifier ses 2 extrémités à un seul sommet.

On peut le voir de façon plus globale:

on se donne une partition $V = \cup_{\alpha \in V'} V_\alpha$ des sommets de Γ en sous ensembles connexes. V' est l'ensemble des sommets de Γ' , alors que E' doit satisfaire:

$$(\{\alpha, \beta\} \in E') \Rightarrow (\exists i \in V_\alpha, j \in V_\beta, \{i, j\} \in E) .$$

Si on étudie une propriété (P) des graphes qui est stable par mineur (par exemple le plongement dans une surface), c'est un théorème difficile de théorie des graphes, prouvé par Robertson-Seymour dans une longue série de papiers [graphs minors] que la propriété

admet une caractérisation par *mineurs exclus*: il existe une liste *finie* de graphes telle que la propriété (P) soit équivalente à n'avoir aucun de ces graphes comme mineur.

L'exemple le plus simple est la caractérisation des arbres par exclusion du cycle à 3 sommets. Un autre exemple classique plus difficile est le théorème de Kuratowski qui caractérise la planarité par l'exclusion de K_5 et de $K_{3,3}$.

5.2. Monotonie. —

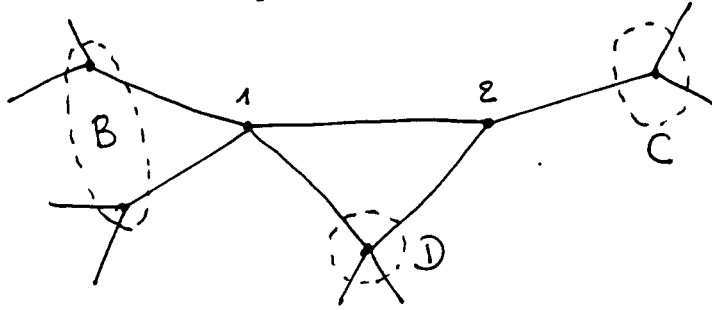
Le résultat principal est le:

THÉORÈME. — Si Γ' est un mineur de Γ , $\mu(\Gamma') \leq \mu(\Gamma)$, $\nu(\Gamma') \leq \nu(\Gamma)$ et $\Sigma \in SS(\Gamma')$, alors Σ est aussi dans la signature spectrale de Γ .

Preuve. —

Nous allons donner la preuve pour μ .

Il suffit bien sûr de travailler avec $\Gamma' = R_{1,2}(\Gamma)$ ou $\Gamma' = C_{1,2}(\Gamma)$ où $\{1, 2\}$ est une arête de Γ . Le cas le plus difficile est celui de la contraction, car alors $\mathbf{R}^{\Gamma'}$ est un espace différent de $\mathbf{R}^{\Gamma}$. C'est ce cas que nous allons traiter.



Figure

Notons 0 le sommet obtenu par contraction de l'arête $\{1, 2\}$, B les sommets de Γ liés à 1 et pas à 2, C les sommets liés à 2 et pas à 1 et D les sommets voisins de 1 et de 2.

Soit $q(x_0, x_3, \dots, x_N)$ une forme quadratique de $O_{\Gamma'}$, nous allons lui associer une famille q_ϵ , ($\epsilon > 0$) de formes quadratiques de O_Γ .

Ecrivons

$$q(x_0, x_3, \dots, x_N) = W_0 x_0^2 + \sum_{j \sim 0} c_{0,j} (x_j - x_0)^2 + r(x_3, \dots, x_N).$$

On pose:

$$\begin{aligned} q_\epsilon(x_1, \dots, x_N) &= \frac{1}{\epsilon} (x_1 - x_2)^2 + \sum_{j \in B} c_{0,j} (x_1 - x_j)^2 + \sum_{j \in C} c_{0,j} (x_2 - x_j)^2 \\ &+ \sum_{j \in D} \frac{c_{0,j}}{2} ((x_1 - x_j)^2 + (x_2 - x_j)^2) + r(x_3, \dots, x_N), \end{aligned}$$

de façon que q_ϵ soit égale à $q(x_1, x_3, \dots, x_N)$ en restriction à $x_1 = x_2$ et que $q_\epsilon \in O_\Gamma$.

Identifions maintenant $O_{\Gamma'}$ à une sous-variété $j(O_{\Gamma'})$ de $\mathcal{L}_V$ en considérant les éléments de $O_{\Gamma'}$ comme des formes quadratiques définies sur le sous-espace $x_1 = x_2 (= x_0)$ de $\mathbf{R}^V$.

On alors le

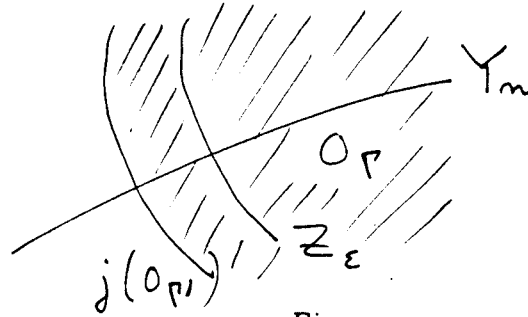
LEMME. — $j(O_{\Gamma'})$ coupe transversalement Y_n en $j(q)$ si et seulement si $O_{\Gamma'}$ coupe transversalement Y_n en q .

Cela résulte du fait que Y_n est transversale à l'ensemble des formes quadratiques de domaine un sous-espace fixe de $\mathbf{R}^V$.

Soit alors $q_0 \in O_{\Gamma'}$ la forme quadratique associée à A_0 telle que

$$\lambda_2(A_0) = 0, \dim \ker(A_0) = n = \mu(\Gamma')$$

et $0 \in \sigma_s(A_0, O_{\Gamma'})$.



Figure

Soit $Z_\epsilon = \{q_\epsilon | q \in O_{\Gamma'}\}$, alors Z_ϵ converge au sens C^∞ vers $j(O_{\Gamma'})$ (voir §3.4.) et donc, pour $\epsilon > 0$ assez petit, il existe un $A_\epsilon \in Z_\epsilon$ tel que $\lambda_2(A_\epsilon) = 0 \in \sigma_s(A_\epsilon; O_\Gamma)$ et $\dim \ker(A_\epsilon) = n$.

5.3. μ et la planarité. —

On va prouver le:

THÉORÈME [CV1]. — $\mu(\Gamma) \leq 3$ si et seulement si Γ est planaire.

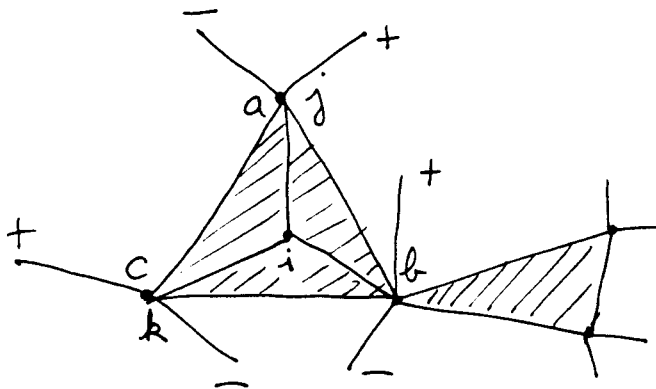
On a besoin pour cela de la variante combinatoire suivante du théorème de Cheng prouvée dans [HT]:

THÉORÈME. — Soit Γ le 1-squelette d'une triangulation de S^2 ou d'un domaine à bord de S^2 , alors si $A \in O_\Gamma$, la multiplicité de la seconde valeur propre de A est ≤ 3 .

Preuve. —

Soit i, j, k 3 sommets d'un triangle de cette triangulation, il existe $\varphi \in F \setminus 0$, telle que $\varphi(i) = \varphi(j) = \varphi(k) = 0$. On peut supposer que φ est de support minimal et donc vérifie le théorème de Courant habituel (th3 du chap1). On étend φ comme fonction affine sur chaque simplexe à partir de ses valeurs aux sommets.

On considère l'ouvert Ω de S^2 qui est le complémentaire du support fermé de φ . Soit V la composante connexe de (i, j, k) dans Ω . Soit a, b, c 3 sommets (il y en a au moins 3 à cause de la 3-connexité!!) de la frontière de V : chacun de ces sommets ($\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = 0$) est connecté à un sommet où $\varphi > 0$ et à un sommet où $\varphi < 0$: la connexité des ensembles $V_+ = \{\varphi > 0\}$ et $V_- = \{\varphi < 0\}$ est alors impossible d'après le théorème de Jordan.



La région V et 3 sommets du bord joints à $V_{\pm}$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème:

une des implication résulte du théorème de Kuratowski [KI]: un graphe non planaire contient un mineur isomorphe à l'un des 2 graphes dits de Kuratowski, le graphe K_5 complet à 5 sommets et le graphe $K_{3,3}$ bipartite complet à 2×3 sommets. On vérifie facilement que $\mu(K_5) = \mu(K_{3,3}) = 4$. On applique alors le théorème de monotonie de μ par rapport à l'opération de mineur.

Je connais 4 preuves différentes de l'autre implication: les 2 premières sont purement combinatoires et données dans [B-CV] et [HT], les 2 autres s'appuient sur des approximations du spectre d'opérateurs de Schrödinger par des laplaciens sur des graphes: on utilise soit l'approximation semi-classique de l'effet tunnel étudiées par Helffer-Sjöstrand (voir [CV3]), soit l'étude asymptotique du spectre de voisinages tubulaires du graphe plongé ([CV11] et [CV2]) (voir la suite).

Donnons par exemple une preuve inspirée de [HT].

Soit Γ planaire avec $\mu(\Gamma) \geq 4$, on peut considérer Γ comme un mineur d'une triangulation de S^2 : on prend une triangulation assez fine de S^2 pour que Γ se trace comme une ligne polygonale sur le 1-squelette Γ_1 de la triangulation. On applique à nouveau la monotonie de μ qui donne $\mu(\Gamma_1) \geq 4$, puis Cheng combinatoire appliqué à Γ_1 donne une contradiction.

5.4. ν et la largeur d'arbre. —

Donnons d'abord une définition de la largeur d'arbre un peu différente de celle de Robertson-Seymour.

D'abord, si G_1, G_2 sont 2 graphes, on définit le produit $G = G_1 \times G_2$ par $V = V_1 \times V_2$ et $\{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\} \in E$ si et seulement si ou $(a_1 = b_1 \text{ et } \{a_2, b_2\} \in E_2)$ ou $(a_2 = b_2 \text{ et } \{a_1, b_1\} \in E_1)$.

DEFINITION . — La largeur d'arbre $TW(G)$ du graphe G est le plus petit N tel qu'il existe un arbre T tel que G est un mineur du produit $T \times K_N$.

Maintenant, on a les 2 théorèmes:

THÉORÈME. — $\nu(\Gamma) = 1$ si et seulement si Γ est un arbre.

THÉORÈME. — Pour tout Γ , $\nu(\Gamma) \leq TW(\Gamma)$.

Nous avons déjà vu que $\nu(T) = 1$ si T est un arbre. La réciproque s'obtient à partir de $\nu(P_2) = 2$ et du fait qu'un graphe qui n'est pas un arbre contient le cycle P_2 comme mineur.

Le 2ème théorème se prouve comme une extension de l'idée de changement de jauge sur les arbres, mais pour des fibrés vectoriels.

Si $\Gamma = (V, E)$ est un graphe fini, un fibré vectoriel hermitien $L = (L_i)_{i \in V}$ sur Γ est une collection d'espaces vectoriels hermitiens L_i tous de même dimension. A cette donnée, on associe l'espace hermitien des sections qui est $H = \oplus_{i \in V} L_i$.

Une matrice $\Omega = (\Omega_{i,j})$ qui est un endomorphisme hermitien de H est dite (Γ, L) -admissible ou simplement *admissible* si on a:

- i) $\Omega_{i,j} = \Omega_{j,i}^*$ est inversible pour chaque arête $\{i, j\} \in E$;
- ii) $\Omega_{i,j} = 0$ si $\{i, j\} \notin E$ et $i \neq j$;
- iii) $\Omega_{i,i}$ est hermitien.

Exemple fondamental:

Γ' est un autre graphe et $L_i = \mathbb{C}^{V'}$. Alors $H = \mathbb{C}^{V \times V'}$ et toute $A \in M_{\Gamma \times \Gamma'}$ est admissible: si $\{i, j\}$ est une arête de Γ , $\Omega_{i,j}$ est diagonale avec des coefficients diagonaux non nuls.

Et nous avons le:

LEMME. — Si Ω est admissible, ≥ 0 et Γ est un arbre, alors $\dim(\ker(\Omega)) \leq N = \dim(L_i)$.

Preuve du lemme:

par l'absurde. Si la conclusion est fausse, il existe $\varphi \in \ker(\Omega)$ et une arête $\{i_0, j_0\}$ tels que $\varphi(i_0) = 0, \varphi(j_0) \neq 0$. Soit $T_1, \dots, T_l$ la collection des arbres disjoints tels que $T \setminus i_0 = T_1 \cup \dots \cup T_l$ et supposons que $j_0 \in T_1$.

Soit $\omega_1, \dots, \omega_l$ des nombres complexes de module 1 et φ_ω définie par $\varphi_\omega(i) = \omega_j \varphi(i)$ si $i \in T_j$ and $\varphi_\omega(i_0) = 0$.

Alors, il est facile de voir que, si $Q(\varphi_\omega) = (\Omega\varphi_\omega|\varphi_\omega)$, $Q(\varphi_\omega) = 0$ et donc $\varphi_\omega \in \ker \Omega$.

Maintenant, on peut choisir $v_0 \in L_{i_0}$ qui satisfait $(A_{i_0,j_0}\varphi(j_0)|v_0) \neq 0$ (i) implique $A_{i_0,j_0}\varphi(j_0) \neq 0$.

Donc, on peut choisir ω_j tels que

$$\operatorname{Re}(A_{i_0,j_0}\varphi_\omega(j_0)|v_0) > 0$$

et

$$\operatorname{Re}(A_{i_0,j}\varphi_\omega(j)|v_0) \geq 0$$

pour tous les $j \sim i_0$.

On voit maintenant que

$$Q(\varphi_\omega + \varepsilon v_0 \delta_{i_0}) = a\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

où $a > 0$. Ainsi, en prenant un petit $\varepsilon < 0$, on obtient une contradiction avec le fait que $Q \geq 0$.

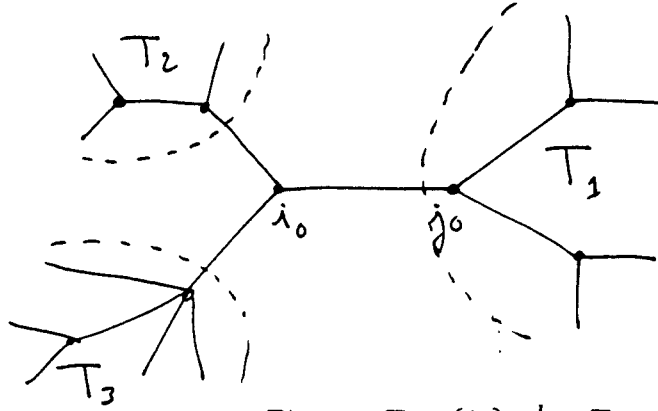


Figure : $T = \{i_0\} \cup_{j=1}^l T_j$.

□

Comme conséquence et utilisant l'exemple de base for $T \times K_N$, on obtient le second théorème.

6. COMPACTIFICATIONS. —

Les techniques de compactification (§3) permettent de compactifier les ensembles naturels d'opérateurs différentiels sur un graphe Γ donné:

$$R_\Gamma \subset O_\Gamma \subset M_\Gamma .$$

Nous allons montrer que si la compactification de R_Γ se décrit complètement en termes de mineurs, il n'en est pas de même des autres qui font intervenir d'autres opérations de dégénérescences de graphes, en particulier les transformations *étoile-clique*.

6.1. Compactification de R_Γ . —

Rappelons qu'on désigne par R_Γ l'ensemble des *Laplaciens* sur Γ c'est à dire des $A \in O_\Gamma$ tels que $A(1) = 0$. La forme quadratique associée à un tel A peut s'écrire:

$$q_A(x) = \sum_E \rho_{i,j}(x_i - x_j)^2 .$$

6.1.1. Convergence simple et lagrangienne. —

Désignons dans la suite par $I =]0, +\infty[\subset J = [0, +\infty]$.

Soit $Z_+ = \{(x, \xi) \in Z \mid \xi(x) \geq 0\}$, et $\mathcal{L}_+ = \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda \subset Z_+\}$. Les éléments de $\mathcal{L}_+$ sont les formes quadratiques positives sur leur domaine de définition. On peut voir une telle forme $\rho = (F, q)$ comme une fonction semi-continue inférieurement sur X à valeurs dans $[0, +\infty]$ en étendant $q(x)$ par $+\infty$ hors de F . $\mathcal{L}_+$ est visiblement fermé dans $\mathcal{L}$ car Z_+ l'est. On voit aussi facilement que $\mathcal{L}_+$ est fermé pour la topologie de la convergence simple; cependant ces 2 topologies ne coïncident pas bien qu'elles rendent $\mathcal{L}_+$ compact.

EXEMPLE. — Si $X = \mathbf{R}^2$ et $q_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{2}(x - \frac{y}{\varepsilon})^2$, $\varepsilon > 0$, il est facile de vérifier que si F est l'espace $y = 0$, alors q_ε converge vers $(F, \frac{1}{2}x^2)$ pour la convergence simple et vers $(F, 0)$ pour la topologie lagrangienne lorsque ε tend vers 0.

Cependant, si Q_X^+ est le cône de Q_X formé des formes quadratiques ≥ 0 et que l'on introduit la

DÉFINITION. — Un cône C de Q_X^+ sera dit simplicial s'il existe des formes quadratiques $q_1, \dots, q_m$ de Q_X^+ linéairement indépendantes et telles que C soit l'ensemble des $\sum_i t_i q_i$ où les t_i sont ≥ 0 ,

on a le

THÉORÈME. — Si C est un cône simplicial de Q_X^+ , sur l'adhérence $\bar{C}$ de C dans $\mathcal{L}$, la topologie de la convergence simple coïncide avec la topologie lagrangienne. De plus, l'application $\psi : [0, +\infty[^m \rightarrow \mathcal{L}_X$ qui à $t = (t_i)$ associe la forme $\sum_i t_i q_i$ se prolonge naturellement et continûment en une application $\Psi : J^m \rightarrow \mathcal{L}_X$; Ψ n'est pas injective en général.

On a besoin de 2 lemmes:

LEMME 1. — Soit $\rho = (F, q) \in \mathcal{L}_+$, K un compact de X et x un point intérieur de K , alors $\rho - 2\xi$ (vue comme fonction sci de K à valeurs dans J) atteint un minimum fini en x si et seulement si $(x, \xi) \in \Lambda_\rho$, la variété lagrangienne associée à ρ .

Preuve. —

Il suffit en effet d'écrire que la dérivée de la restriction de $\rho - 2\xi$ au domaine F de ρ est nulle. $\square$

LEMME 2. — Soit K un compact et f_n une suite de fonctions sci définies sur K et à valeurs dans $[0, +\infty]$ telles que f_n converge simplement vers une fonction f_o et qu'il existe des fonctions sci sur K , $g_n \leq f_n$ telles que la suite g_n soit croissante et ait même limite simple que la suite f_n . Alors si m_n (resp m_o) = $\inf_{x \in K} f_n(x)$ (resp = $\inf_{x \in K} f_o(x)$), $m_o = \lim m_n$ et, si $f_n(x_n) = m_n$ et x_n tend vers x_o , alors $f_o(x_o) = m_o$.

Preuve. — (du lemme 2)

1) f_o est sci comme limite croissante de fonctions sci et donc il existe $x_o \in K$ tel que $f_o(x_o) = m_o$. On a évidemment $\limsup m_n \leq m_o$. Supposons donc que $\liminf m_n = m_o - \alpha$, $\alpha > 0$; Soit $K_n = \{x \in K | g_n(x) \leq m_o - \frac{\alpha}{2}\}$, il est clair que la suite des compacts K_n est décroissante et d'intersection vide. Donc, il existe $K_{n_o} = \emptyset$ et donc $g_n(x) > m_o - \frac{\alpha}{2}$ pour $n \geq n_o$ et $x \in K$. On a ainsi une contradiction car $f_n \geq g_n$.

2) Si $f_{n_k}(x_{n_k}) = m_{n_k}$ et $x_{n_k} \rightarrow a$, supposons $f_o(a) = m_o + \beta$ avec $\beta > 0$. Soit U un voisinage compact de a où $f_o \geq m_o + \frac{\beta}{2}$ et pour k grand, $x_{n_k} \in U$ et $\lim f_{n_k}(x_{n_k}) = m_o$ d'après le 1) et on a aussi $\lim(\inf_U f_{n_k}) = \inf_U f_o$ (d'après le 1)) et $\geq m_o + \frac{\beta}{2}$; d'où contradiction.

□

Preuve. — (du théorème)

1) Construction de Ψ :

soit $t_i \in J$, il est facile de définir la forme quadratique avec domaine $\sum t_i q_i$ en prenant comme domaine les points de X où cette somme est finie. Cela définit l'application Ψ .

2) Continuité de Ψ pour les 2 topologies:

il est évident que Ψ est continue si on munit $\mathcal{L}_+$ de la topologie de la convergence simple.

Pour la topologie lagrangienne, cela résulte des 2 lemmes. En effet, si t_n tend vers t_o dans J^m muni de la topologie produit et $\rho_n = \Psi(t_n)$, soit $(x_n, \xi_n) \in \Lambda_n (= \Lambda_{\rho_n})$ convergent vers (x_o, ξ_o) . Alors, on peut appliquer le lemme 2 avec K un voisinage compact de x_o , $f_n = \rho_n - 2\xi_n$ et $g_n = \Psi(\inf_{k \geq n} t_k) - 2\xi_o - \varepsilon_n$, où ε_n tend vers 0 en décroissant et $\|\xi_n - \xi_o\|_{L^\infty(K)} \leq \varepsilon_n$. On déduit alors du lemme 1 que $(x_o, \xi_o) \in \Lambda_{\Psi(t_o)}$.

3) Conclusion:

il est facile de conclure de ce qui précède que les 2 topologies sur $\bar{C}$ coïncident.

□

6.1.2. Compactification de R_Γ et mineurs. —

Soit Γ un graphe fini dont V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. On peut penser Γ comme un réseau électrique.

L'ensemble des conductances est I^E et on associe à un élément $\rho = (\rho_{i,j})$ de I^E une forme quadratique $q_\rho = \psi_\Gamma(\rho)$ sur $X = \mathbf{R}^V$ par la formule:

$$q_\rho(x) = \sum_{\{i,j\} \in E} \rho_{i,j} (x_i - x_j)^2 .$$

Comme plus haut, on identifie l'ensemble des q_ρ à R_Γ . On désigne par S_Γ l'adhérence dans $\mathcal{L}_X$ de l'ensemble R_Γ .

Alors on va montrer qu'on peut identifier cette compactification de R_Γ à la réunion des $R_{\Gamma'}$ où Γ' parcourt l'ensemble des mineurs de Γ . De plus ceci définit une bonne

stratification de S_Γ .

Soit maintenant $q_\rho \in R_{\Gamma'}$ où Γ' est un mineur de Γ , on lui associe une forme quadratique $r_\rho = (F_{\Gamma'}, q_\rho)$ et donc une variété lagrangienne:

$F_{\Gamma'}$ est l'espace des $x = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $\forall \alpha, \forall j, k \in V_\alpha, x_j = x_k$. Si X_α est la valeur commune de x_j sur V_α , on définit ainsi, pour $x \in F_{\Gamma'}$, $q_\rho(x) = \sum \rho_{i,j} (X_i - X_j)^2$.

Il est clair que l'application $\varphi_{\Gamma'} : R_{\Gamma'} \rightarrow L$ ainsi définie est un plongement dont l'image est une sous-variété $Z_{\Gamma'}$ de $\mathcal{L}$. Ces variétés sont 2 à 2 disjointes: en effet le domaine de la forme quadratique définit Γ' et la forme q_ρ détermine alors ρ . On identifiera donc $R_{\Gamma'}$ et $Z_{\Gamma'}$.

Nous allons prouver que les $R_{\Gamma'}$ forment une stratification de S_Γ .

THÉORÈME . — S_Γ est la réunion disjointe des $R_{\Gamma'}$ où Γ' décrit les mineurs de Γ . $R_{\Gamma''}$ est contenu dans l'adhérence de $R_{\Gamma'}$ si et seulement si Γ'' est un mineur de Γ' . Cette stratification satisfait la condition (a) de Whitney: si $\Lambda_n \in R_{\Gamma'}$ converge vers $\Lambda_0 \in R_{\Gamma''}$ et $V \in T_{\Lambda_0}(R_{\Gamma''})$, il existe $V_n \in T_{\Lambda_n}(R_{\Gamma'})$ tels que V_n tend vers V . De plus, sur S_Γ , la topologie de la convergence simple et la topologie lagrangienne coïncident .

Preuve. — Le cône R_Γ est simplicial. Soit $(\rho_{i,j}) \in J^E$, on lui associe le mineur Γ' de Γ obtenu en contractant les arêtes $\{i, j\}$ où $\rho_{i,j} = \infty$ et en effaçant celles où $\rho_{i,j} = 0$. L'application Ψ vue au §2 peut ainsi se lire comme un passage d'une définition des mineurs par contractions et éliminations d'arêtes à la définition globale qu'on vient de donner. On en déduit facilement la première partie du théorème.

Il reste à prouver la condition (a) de Whitney.

Elle résulte de la construction du §5.2. où l'on a vu que si Γ' est un mineur de Γ , on peut construire des sous-variété Z_ϵ de R_Γ qui convergent au sens C^∞ vers $R_{\Gamma'}$.

□

6.2. Transformations étoile-triangle. —

Maintenant, pour O_Γ (et a fortiori pour M_Γ), la situation est plus compliquée.

Il y a d'autres dégénérescences: la plus simple est la transformation *étoile-triangle*.

Si 0 est un sommet de degré 3 de voisins 1, 2, 3 de Γ , on remplace le sommet 0 et les 3 arêtes qui en partent par le triangle (1, 2, 3).

On note Γ' le nouveau graphe obtenu, alors:

THÉORÈME. — Il existe une injection canonique j de $O_{\Gamma'}$ dans $\mathcal{L}_V$ dont l'image est une des strates de l'adhérence de O_Γ .

COROLLAIRE. — En particulier, $\mu(\Gamma') \leq \mu(\Gamma)$.

Considérons en effet une forme quadratique de la forme:

$$q_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^N c_i \left(x_i - \frac{x_0}{\varepsilon}\right)^2 + r(x_1, \dots, x_N) .$$

Soit L_ε la sous-variété lagrangienne associée et cherchons sa limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

LEMME. — Si $S = \sum_{i=1}^N c_i \neq 0$, la limite des L_ε est la forme quadratique de domaine $x_0 = 0$ obtenue en remplaçant dans q_ε , x_0/ε par $L(x_1, \dots, x_n)$ où L est la solution de

$$\sum_{i=1}^n c_i (x_i - L) = 0 .$$

Preuve. —

On peut écrire la variété lagrangienne associée à q_ε sous la forme:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{\varepsilon} \sum c_i \left(x_i - \frac{x_0}{\varepsilon}\right) , \\ \xi_i &= c_i \left(x_i - \frac{x_0}{\varepsilon}\right) + L_i(x') . \end{aligned}$$

Posant $\eta_i = \xi_i - L_i(x')$, on obtient les équations:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\varepsilon}{S} \left(\sum c_i x_i + \varepsilon \xi_0 \right) , \\ \sum \eta_i + \varepsilon \xi_0 &= 0 , \\ c_j \eta_i - c_i \eta_j &= c_i c_j (x_i - x_j) . \end{aligned}$$

On peut résoudre sous la forme:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\varepsilon}{S} \left(\sum c_i x_i + \varepsilon \xi_0 \right) , \\ \xi_i &= L_i(x') + c_i \left(x_i - \frac{1}{S} \left(\sum c_j x_j + \varepsilon \xi_0 \right) \right) . \end{aligned}$$

□

La forme

$$s(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - L(x_1, \dots, x_n))^2$$

se réécrit

$$s = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} (x_i - x_j)^2 ,$$

où les $a_{i,j}$ se calculent explicitement en fonction des c_i .

Si $c_1, c_2, c_3 > 0$ et $c_j = 0$ pour $j > 3$, $\Phi : (c_1, c_2, c_3) \rightarrow (a_{2,3}, a_{3,1}, a_{1,2})$ est un difféomorphisme de $(\mathbf{R}^+ \setminus 0)^3$ sur lui-même.

On en déduit le résultat cherché et la forme explicite de j :

si

$$q(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^3 a_{i,i+1} (x_i - x_{i+1})^2 + Q(x) ,$$

où $q \in O_{\Gamma'}$ et $Q \in O_{\Gamma''}$ où Γ'' est Γ' privé des arêtes qui joignent entre eux les sommets 1, 2, 3, alors $j(q)$ est l'espace lagrangien de $\mathcal{L}_{0 \cup V'}$ associé à la forme quadratique de domaine $x_0 = 0$ et qui vaut q .

De plus si $Z_0 = j(O_{\Gamma'})$, il existe $Z_\epsilon \subset O_\Gamma$ convergent au sens C^∞ sur tout compact vers Z_0 .

Dans le cas où $n > 3$, l'adhérence de O_Γ contient une strate qui s'identifie à un sous-ensemble de $j(O_{\Gamma'})$.

Pour ce qui est de M_Γ la situation est plus compliquée, et il le faut car si Γ est un arbre et Γ' un transformé étoile-triangle, on n'a pas l'inégalité $\nu(\Gamma') \leq \nu(\Gamma)!!$

Le problème est qu'alors la somme $S = \sum c_i$ peut s'annuler.

6.3. Transformation triangle-étoile. —

On a en fait le résultat suivant [B-CV]:

DÉFINITION. — *Une transformation triangle-étoile est régulière si le graphe obtenu en ôtant les arêtes et sommets participant à la transformation est connexe.*

THÉORÈME. — *Si la transformation triangle-étoile est régulière, $\mu(\Gamma) = \mu(\Gamma')$.*

7. PROBLEMES . —

Nous présentons maintenant une liste de problèmes ouverts.

7.1. Questions de calculabilité. —

La question est de trouver des algorithmes pour calculer $\mu(\Gamma)$ et $\nu(\Gamma)$ à partir Γ .

Théoriquement, il y a des algorithmes puisqu'il s'agit de problèmes d'intersection de variétés algébriques.

Bien sûr, ce qui serait intéressant serait d'avoir des algorithmes explicites...

7.2. Maximiser le trou spectral. —

Pour différentes raisons, il est souhaitable d'avoir des matrices $A \in O_\Gamma$ (ou R_Γ) ayant un grand trou spectral $\lambda_2 - \lambda_1$.

Le problème est de trouver des conditions de normalisation sous lesquelles le problème soit raisonnablement posé.

De plus, il semble raisonnable que, si A maximise le trou spectral, alors la multiplicité de $\lambda_2(A)$ est la plus grande possible.

Comparer avec [NA] pour le cas continu.

7.3. $\nu(\Gamma)$ et $TW(\Gamma)$. —

Des résultats généraux de Robertson-Seymour impliquent l'existence d'une borne

$$TW(\Gamma) \leq F(\nu(\Gamma))$$

pour tous les graphes planaires. En un sens, la largeur d'arbre est la seule mesure de la complexité d'un graphe planaire. La question est de trouver une fonction $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ explicite.

7.4. Nombres chromatiques. —

Le problème le plus excitant est sûrement celui de décider la conjecture

$$C(\Gamma) \leq \mu(\Gamma) + 1 ,$$

où $C(\Gamma)$ est le nombre chromatique de Γ . La preuve de cette conjecture donnerait une preuve du théorème des 4 couleurs. La conjecture d'Hadwiger implique la nôtre.

7.5. Prescrire les spectres. —

Le problème est de trouver les signatures spectrales de certains graphes simples comme les arbres.

C'est aussi de trouver des résultats généraux sur la forme de la signature spectrale: se traduit-elle toujours uniquement par des restrictions sur les suites de multiplicités?

7.6. Une question de Lex Schriver. —

Est-il toujours vrai que

$$\mu(\Gamma) = \inf_{\Gamma' < \Gamma} m(\Gamma') ,$$

où $m(\Gamma')$ est la multiplicité maximale de λ_2 pour $A \in O_{\Gamma}$?

C'est vrai pour les graphes planaires, car $m(\Gamma) = 3$ pour toute triangulation de S^2 ([HT]).