

COURS DE L'INSTITUT FOURIER

MONIQUE LEJEUNE-JALABERT

Chapitre 3 Questions d'effectivité

Cours de l'institut Fourier, tome 19 (1984-1985), p. 91-117

http://www.numdam.org/item?id=CIF_1984-1985__19__91_0

© Institut Fourier – Université de Grenoble, 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Cours de l'institut Fourier » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Chapitre 3

QUESTIONS D'EFFECTIVITE

1. Décomposition primaire

1.1. DÉFINITION. — Soit A un anneau, I un idéal de A . On dit que I est primaire s'il possède la propriété suivante :

$$f \in A, g \in A, fg \in I, f \notin I \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad g^k \in I.$$

Nous conviendrons cependant de ne pas considérer (1) comme un idéal primaire.

1.2. REMARQUE. — Si I est un idéal primaire, $\sqrt{I}$ est un idéal premier.

1.3. DÉFINITION. — Soit A un anneau, I un idéal de $A \neq (1)$. On dit que I est irréductible si $\forall I_1, I_2$ des idéaux de A contenant I , $I_2 \neq I$ et $I = I_1 \cap I_2 \Rightarrow I = I_1$.

1.4. LEMME. — Si A est un anneau noethérien et si I est un idéal de A irréductible, I est primaire.

Démonstration. — Supposons que I ne soit pas primaire. Alors, il existe $f \in A, g \in A, f \notin I$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^k \notin I$ et $fg \in I$. Soit $J_s = \{h \in A, hg^s \in I\}$. $(J_s)_{s \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'idéaux de A , donc stationnaire puisque A est noethérien (cf. II.2.11). Il existe donc $r \in \mathbb{N}$, tel que $J_r = \dots = J_l = \dots$ $l \geq r$.

On a $I = (I + (g^r)) \cap (I + (f))$. En effet, soit $h \in (I + (g^r)) \cap (I + (f))$, $h = h_1 + h_2 g^r = h'_1 + h'_2 f$ où $h_1, h'_1 \in I, h_2, h'_2 \in A$. Puisque $fg \in I, hg \in I$ et $h_2 g^{r+1} \in I, h_2 \in J_{r+1} = J_r$. Donc $h_2 g^r \in I$ et $h \in I$. Or $I + (g^r) \neq I$ puisque $g^r \notin I$. De même $I + (f) \neq I$ puisque $f \notin I$. C'est impossible, puisque I est irréductible.

1.5. REMARQUE. — Un idéal primaire n'est pas nécessairement irréductible, mais un idéal premier l'est.

1.6. LEMME. — Soit A un anneau, $I_j, j = 1 \dots n$, des idéaux primaires de A tels que $\sqrt{I_j} = \mathcal{P}, j = 1 \dots n$. Alors $I = \cap_{j=1 \dots n} I_j$ est primaire et $\sqrt{I} = \mathcal{P}$.

Démonstration. — Soit $f, g \in A, fg \in I, f \notin I$. Alors $fg \in I_j, j = 1 \dots n$, et il existe $j_0 \in 1 \dots n$ tel $f \notin I_{j_0}$. Puisque I_{j_0} est primaire $g \in \sqrt{I_{j_0}} = \mathcal{P}$. Donc $g \in \sqrt{I_j}, j = 1 \dots n$. Il existe $k_j \in \mathbb{N}, g^{k_j} \in I_j$ et si $k = \sup k_j, g^k \in \cap I_j = I$. Ceci montre également que $\mathcal{P} \subset \sqrt{I}$. L'inclusion opposée est claire puisque $I \subset I_j, j = 1 \dots n$.

1.7. LEMME. — Soit A un anneau noethérien et I un idéal de $A \neq (1)$. Il existe $I_1, \dots, I_s$ des idéaux irréductibles tels que $I = I_1 \cap \dots \cap I_s$.

Démonstration. — Supposons qu'il existe un idéal I de A qui ne possède pas une telle décomposition. I est nécessairement réductible. On peut donc écrire $I = I_1 \cap I_2$ où I_j , $j = 1, 2$, sont des idéaux de A distincts de I . I_1 et I_2 ne peuvent tous les deux s'exprimer comme intersection finie d'idéaux irréductibles.

Si l'assertion d'existence était fausse pour I , nous pourrions donc construire $I' \supset I$, $I' \neq I$ un idéal pour lequel l'assertion d'existence serait également fausse. On obtiendrait une suite strictement croissante d'idéaux de A . C'est impossible. (cf. II.2.12).

1.8. COROLLAIRE. — Soit A un anneau noethérien et I un idéal de $A \neq (1)$. Il existe $Q_1, \dots, Q_s$ des idéaux primaires tels que $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$. Une telle représentation de I est appelée une *décomposition primaire* de I .

1.9. DÉFINITION. — $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ est appelée *décomposition primaire irrédondante* de I si

- 1) $Q_1, \dots, Q_s$ sont des idéaux primaires.
- 2) $\forall i = 1 \dots s$, Q_i ne contient pas $\cap_{j \neq i} Q_j$.
- 3) $\sqrt{Q_i} \neq \sqrt{Q_j}$, $i \neq j$, $i = 1 \dots s$, $j = 1 \dots s$.

1.10. THÉORÈME. — Soit A un anneau noethérien; tout idéal $I \neq (1)$ de A possède une *décomposition primaire irrédondante*.

Démonstration. — Soit $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ une décomposition primaire de I . Soit $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{s'}$, les différents idéaux premiers apparaissant comme racine d'un des Q_i , $i = 1 \dots s$. Soit $Q'_j = \cap_{i, \sqrt{Q_i} = \mathcal{P}_j} Q_i$. Q'_j est primaire (1.6) et $I = \cap_{j=1 \dots s'} Q'_j$. Pour obtenir, une décomposition primaire irrédondante, nous supprimons Q'_j si $Q'_j \supset \cap_{h \neq j} Q'_h$ de la décomposition précédente et ainsi de suite, jusqu'à ce que 2) soit satisfaite.

1.11. REMARQUE. — Deux décompositions primaires irrédondantes de I ne sont pas nécessairement identiques à permutation près des Q_i . Néanmoins :

1.12. PROPOSITION. — Soit A un anneau noethérien et $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_s = Q'_1 \cap \dots \cap Q'_{s'}$, 2 décompositions primaires irrédondantes de $I \neq (1)$. Alors $s = s'$ et il existe τ une permutation de $(1 \dots s)$ telle que $\sqrt{Q_i} = \sqrt{Q'_{\tau(i)}}$.

Pour montrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant :

1.12.1. LEMME. — Soit $I = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ une décomposition primaire irrédondante de $I \neq (1)$ et $\mathcal{P}$ un idéal premier de A . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $\exists i \in 1 \dots s$, $\mathcal{P} = \sqrt{Q_i}$.
- ii) $\exists c \in A$, $(I : c) = \{f, fc \in I\} = \mathcal{P}$.

Démonstration. —

$i) \rightarrow ii)$ Soit $\mathcal{P} = \sqrt{Q_i}$; la décomposition étant irrédondante, il existe $c_1 \in \cap_{j \neq i} Q_j$, $c_1 \notin Q_i$. Si $fc_1 \in I$, $fc_1 \in Q_i$ et Q_i étant primaire, $f \in \sqrt{Q_i} = \mathcal{P}$. Donc $(I : c_1) \subset \mathcal{P}$. Si l'inclusion est stricte, il existe $c_2 \in \mathcal{P}$, $c_2 \notin (I : c_1)$. Puisque $c_1 \in \cap_{j \neq i} Q_j$ et $c_1 c_2 \notin I$, $c_1 c_2 \notin Q_i$. Donc $(I : c_1) \subset (I : c_1 c_2) \subset \mathcal{P}$. Soit $E = \{k \in \mathbb{N}, c_1 c_2^k \in I\}$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $E = \{k \in \mathbb{N}, k \geq n\}$; en effet $E \neq \emptyset$, car $c_2 \in \sqrt{Q_i}$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $c_2^{k_0} \in Q_i$, $c_1 c_2^{k_0} \in \cap_i Q_i = I$. $n \geq 2$ car $c_1 c_2 \notin I$. Alors $c_2^{n-1} \in (I : c_1 c_2)$ et $\notin (I : c_1)$. Si $(I : c_1 c_2) \neq \mathcal{P}$, on construirait $c_3 \in \mathcal{P}$ tel que $(I : c_1) \subsetneq (I : c_1 c_2) \subsetneq (I : c_1 c_2 c_3)$. Dans un anneau noethérien, toute suite croissante d'idéaux étant stationnaire, il existe donc $c \in A$, $(I : c) = \mathcal{P}$.

$ii) \rightarrow i)$ On a $(I : c) = \cap_i (Q_i : c)$ et $\sqrt{(I : c)} = \cap_i \sqrt{(Q_i : c)}$. Or $(I : c) = \mathcal{P}$, $\sqrt{(I : c)} = \mathcal{P}$, $\sqrt{(Q_i : c)} = \sqrt{Q_i}$ si $c \notin Q_i$, $= A$ si $c \in Q_i$. (En effet $Q_i \subset (Q_i : c)$ et $\sqrt{Q_i} \subset \sqrt{(Q_i : c)}$, d'autre part si $f^k \in (Q_i : c)$, $cf^k \in Q_i$. Si $c \notin Q_i$, $f \in \sqrt{Q_i}$ et $\sqrt{(Q_i : c)} = \sqrt{Q_i}$. Si $c \in Q_i$, $(Q_i : c) = A$ et $\sqrt{(Q_i : c)} = A$). Finalement, si $J = \{i, c \notin Q_i\}$, $\mathcal{P} = \cap_{i \in J} \sqrt{Q_i}$. Or $\mathcal{P}$ premier est irréductible, donc $\exists i \in J$ tel que $\mathcal{P} = \sqrt{Q_i}$.

Démonstration de 1.12. — Considérons $\mathcal{P}_i = \sqrt{Q_i}$, il existe $c_i \in A$ tel que $(I : c_i) = \mathcal{P}_i$ ($i) \rightarrow ii)$ appliqué à $I = \cap Q_i$). D'autre part, $\exists j \in (1 \dots s')$ tel que $\mathcal{P}_i = \sqrt{Q'_j} = \mathcal{P}'_j$ ($ii) \rightarrow i)$ appliqué à $I = \cap Q'_i$). De même pour tout $h \in (1 \dots s')$, il existe $l \in (1 \dots s)$ tel que $\mathcal{P}'_h = \mathcal{P}_l$. Les $\mathcal{P}_i$ et $\mathcal{P}'_j$ étant 2 à 2 distincts, la proposition en résulte.

1.12.2. DÉFINITION. — Soit A un anneau noethérien, I un idéal de $A \neq (1)$ et $I = \cap_{i=1 \dots s} Q_i$ une décomposition primaire irrédondante de I . $\{\sqrt{Q_i}\}_{i=1 \dots s}$ est l'ensemble des idéaux premiers associés à I . On le note $\text{Ass} I$. Si $\mathcal{P} \in \text{Ass} I$ et si il existe $\mathcal{P}' \in \text{Ass} I$ tel que $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}'$, $\mathcal{P}$ est dit un idéal premier associé immergé. Dans le cas contraire, il est dit isolé.

1.12.3. DÉFINITION. — Si k est un corps et si I est un idéal de $k[X_1, \dots, X_n] \neq (1)$, on dit que I est équidimensionnel si il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $\dim V(\mathcal{P}) = d$, pour tout $\mathcal{P} \in \text{Ass} I$.

! Cette notion ne dépend pas que de $V(I)$.

1.13. DÉFINITION. — Soit A un anneau, I, I' des idéaux de A . $(I : I') = \{f \in A, fI' \subset I\}$.

1.14. PROPOSITION. — Si A est noethérien et si I est un idéal de $A \neq (1)$, $(I : I') = I$ si et seulement si I' n'est contenu dans aucun des $\mathcal{P} \in \text{Ass} I$.

Démonstration. — Soit $I = \cap_{i=1 \dots s} Q_i$ une décomposition primaire irrédondante et soit $\mathcal{P}_i = \sqrt{Q_i}$, $i = 1 \dots s$. Supposons que $\forall i = 1 \dots s$, $I' \not\subset \mathcal{P}_i$. Soit $f \in (I : I')$, $fI' \subset Q_i$, $i = 1 \dots s$; Q_i étant primaire, si $f \notin Q_i$, $I' \subset \mathcal{P}_i$. C'est

impossible. Donc $f \in \cap_i Q_i = I$.

Si maintenant, il existe $i \in 1 \dots s$, $I' \subset P_i$, I possédant un nombre fini de générateurs, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $I'^k \subset Q_i$. Or, il existe $f \in \cap_{j \neq i} Q_j$, $f \notin Q_i$. Soit $E = \{s \in \mathbb{N}, fI'^s \subset I\}$. $E \neq \emptyset$ puisque $fI'^k \subset \cap Q_i = I$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $E = \{m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$. D'autre part $n \neq 0$, car $f \notin I$. Soit $g \in fI'^{n-1}$, $g \notin I$, $gI' \subset fI'^n \subset I$ et $g \in (I : I')$. Donc $(I : I') \neq I$.

1.14.1. COROLLAIRE. — Dans un anneau noethérien A , $\cup_{P \in \text{Ass}(0)} P$ est l'ensemble des diviseurs de zéro de A .

1.15. PROPOSITION. — Soit k un corps, I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$, k' une extension de k et I' l'idéal de $k'[X_1, \dots, X_n]$ engendré par I . $\text{Ass} I' \supset \cup_{P \in \text{Ass} I} \text{Ass} P k'[X_1, \dots, X_n]$.

Démonstration. — Soit $P \in \text{Ass} I$. D'après 1.12.1, il existe $c \in k[X_1, \dots, X_n]$ tel que la multiplication par c soit une injection de $k[X_1, \dots, X_n]/P \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I$. Soit $P' = P k'[X_1, \dots, X_n]$. La multiplication par c est encore une injection de $k'[X_1, \dots, X_n]/P' \rightarrow k'[X_1, \dots, X_n]/I'$. D'autre part, si $P'' \in \text{Ass} P'$, il existe $d \in k'[X_1, \dots, X_n]$ tel que la multiplication par d soit une injection de $k'[X_1, \dots, X_n]/P'' \rightarrow k'[X_1, \dots, X_n]/P'$. La multiplication par cd est donc une injection de $k'[X_1, \dots, X_n]/P''$ dans $k'[X_1, \dots, X_n]/I'$ et d'après 1.12.1, $P'' \in \text{Ass} I'$.

1.15.1. REMARQUE. — Dans l'énoncé 1.15, on a en fait égalité. Nous l'admettrons et ne l'utiliserons d'ailleurs pas.

2. Equidimensionalité et suites régulières

2.1. THÉOREME. — Soit k un corps infini; soit $f_1, \dots, f_r \in k[X_1, \dots, X_n]$, $1 \leq r \leq n$. Soit $I_j = (f_1, \dots, f_j)$, $1 \leq j \leq r$. Si $\dim V(I_j) = n - j$, $1 \leq j \leq r$, I_r est équidimensionnel. (1.12.3)

Démonstration. — Soit $I_r = Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ une décomposition primaire irrédondante de I_r . Il s'agit de montrer que $\dim V(Q_i) = n - r$, $i = 1 \dots s$. Considérons par exemple Q_1 . On a $I_1 \subset \dots \subset I_j \subset \dots \subset I_r \subset Q_1$. En effectuant au besoin un changement de variables linéaire, on peut supposer que les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodés pour $I_1, \dots, I_r$ et Q_1 (cf. 1er exercice, Chap. II). Il résulte alors de II.5.3, II.3.2.1 et II.6.5 que :

- 1) $d = \dim V(Q_1) \leq n - r = \dim V(I_r)$.
- 2) $k[X_1, \dots, X_n]/I_j$ est un $k[X_{j+1}, \dots, X_n]$ -module fini et $k[X_{j+1}, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I_j$ est injective, $j = 1 \dots r$.
- 3) $k[X_1, \dots, X_n]/Q_1$ est un $k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$ -module fini et $k[X_{n-d+1}, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/Q_1$ est injective.

Soit maintenant $R = k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_1, \dots, X_{n-d}]$ et soit $\tilde{Q}_i$, $i = 1 \dots s$, (resp $\tilde{I}_j$, $j = 1 \dots r$) l'idéal engendré par Q_i (resp I_j) dans R . Nous allons montrer que :

- 1) $R/\tilde{I}_j$ est un $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_{j+1}, \dots, X_{n-d}]$ -module fini et $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_{j+1}, \dots, X_{n-d}] \rightarrow R/\tilde{I}_j$ est injective, $j = 1 \dots r$.
- 2) $R/\tilde{Q}_1$ est un $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)$ -espace vectoriel de rang fini et $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n) \rightarrow R/\tilde{Q}_1$ est injectif.
- 3) Soit $J = \{i, 1 \leq i \leq s, Q_i \cap k[X_{n-d+1}, \dots, X_n] = 0\}$; $1 \in J$, $\tilde{Q}_i$ est primaire si $i \in J$ et $\tilde{I}_r = \bigcap_{i \in J} \tilde{Q}_i$ est une décomposition primaire irrédondante de $\tilde{I}_r$.

Preuve de 1). — De 2), il résulte qu'il existe $g_1, \dots, g_u$ dans $k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $\forall f \in k[X_1, \dots, X_n]$, il existe $h_1, \dots, h_u$ dans $k[X_{j+1}, \dots, X_n]$, $r \in I_j$ tels que

$$f = \sum h_i g_i + r.$$

Soit $\tilde{f} \in \tilde{R}$. Il existe $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ et $q \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n] \neq 0$ tels que $\tilde{f} = \frac{f}{q}$. Alors $\tilde{f} = \sum \frac{h_i}{q} g_i + \frac{r}{q}$. Or $\frac{h_i}{q} \in k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_{j+1}, \dots, X_{n-d}]$ et $\frac{r}{q} \in \tilde{I}_j$; $g_1, \dots, g_u$ engendrent $R/\tilde{I}_j$ comme $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_{j+1}, \dots, X_{n-d}]$ -module.

Supposons maintenant que $\tilde{f} \in \tilde{I}_j \cap k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)[X_{j+1}, \dots, X_{n-d}]$. Alors il existe $f \in I_j$ et $q \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$, $q \neq 0$, tels que $\tilde{f} = \frac{f}{q}$. D'autre

part, il existe $f' \in k[X_{j+1}, \dots, X_n]$ et $q' \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$, $q' \neq 0$ tels que $\tilde{f} = \frac{f'}{q'}$. Alors $f q' = f' q$. Or $f' q \in k[X_{j+1}, \dots, X_n]$, $f q' \in I_j$. Donc $f q' = f' q = 0$ et $f = \tilde{f} = 0$.

Preuve de 2). — Elle est analogue à celle de 1).

Preuve de 3). — $1 \in J$ par définition. Montrons que $\tilde{Q}_i$ est primaire si $i \in J$. Soit $\tilde{f} \in \tilde{R}$, $\tilde{g} \in \tilde{R}$ tels que $\tilde{f} \tilde{g} \in \tilde{Q}_i$. Alors $\tilde{f} = \frac{f}{q_1}$, $\tilde{g} = \frac{g}{q_2}$ où $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$, $q_1, q_2 \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$, $q_1 \neq 0$, $q_2 \neq 0$. Comme ci-dessus, il existe $q \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$, $q \neq 0$ tel que $q f g \in Q_i$. Or Q_i est primaire. Si $\tilde{g} \notin \tilde{Q}_i$, $g \notin Q_i$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $q^k f^k \in Q_i$. Or $q^k \notin Q_i$, sinon $Q_i \cap k[X_{n-d+1}, \dots, X_n] \neq 0$. Il existe donc $k' \in \mathbb{N}$ tel que $f^{k'} \in Q_i$ et $\tilde{f}^{k'} \in \tilde{Q}_i$.

L'inclusion $\tilde{I}_r \subset \bigcap_{i \in J} \tilde{Q}_i$ est évidente. Réciproquement, soit $\tilde{f} \in \tilde{Q}_i$, $\forall i \in J$. $\tilde{f} = \frac{f}{q}$ où $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, $q \neq 0$, $q \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$. $\forall i \in J$, il existe $q_i \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$, $q_i \neq 0$ tel que $q_i f \in Q_i$. Alors $f \prod_{i \in J} q_i \in \bigcap_{i \in J} Q_i$. Mais si $i \notin J$, $Q_i \cap k[X_{n-d+1}, \dots, X_n] \neq 0$. Il existe donc $q_i \neq 0$, $q_i \in Q_i \cap k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$, $f \prod_{i \in I} q_i \in \bigcap_{i \in I} Q_i = I_r$ et $\tilde{f} \in \tilde{I}_r$.

Montrons enfin que cette décomposition primaire est irrédondante. Supposons qu'il existe $j_0 \in J$, $\tilde{Q}_{j_0} \supset \bigcap_{j \in J-j_0} \tilde{Q}_j$. Soit $f \in \bigcap_{j \in J-j_0} \tilde{Q}_j$. Alors $f \in \tilde{Q}_{j_0}$ et il existe $q \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$, $q \neq 0$ tel que $q f \in Q_{j_0}$. Or Q_{j_0} est primaire. Si $f \notin Q_{j_0}$, il existerait $k \in \mathbb{N}$ tel que $q^k \in Q_{j_0} \cap k[X_{n-d+1}, \dots, X_n] = 0$ ($j_0 \in J$). C'est impossible. Donc $f \in Q_{j_0}$ et $Q_{j_0} \supset \bigcap_{j \in J-j_0} Q_j$. A fortiori $Q_{j_0} \supset \bigcap_{j \in I-j_0} Q_j$. C'est encore impossible.

Finalement, montrons que $\sqrt{\tilde{Q}_i} \neq \sqrt{\tilde{Q}_j}$, $i \neq j$, $i, j \in J$. Si $\sqrt{\tilde{Q}_i} \subset \sqrt{\tilde{Q}_j}$, $i \neq j$, $i, j \in J$, montrons que $\sqrt{Q_i} \subset \sqrt{Q_j}$. En effet, soit $f \in \sqrt{Q_i}$; soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k \in Q_i$, $f^k \in \tilde{Q}_i$ et $f \in \sqrt{\tilde{Q}_j}$. Soit $k' \in \mathbb{N}$ et $q \in k[X_{n-d+1}, \dots, X_n]$, $q \neq 0$ tel que $q f^{k'} \in Q_j$. Si $f^{k'} \notin Q_j$, il existe $k'' \in \mathbb{N}$ tel que $q^{k''} \in Q_j \cap k[X_{n-d+1}, \dots, X_n] = 0$. C'est impossible. Donc $f \in \sqrt{Q_j}$ et $\sqrt{Q_i} \subset \sqrt{Q_j}$.

Soit maintenant L une clôture algébrique de $k(X_{n-d+1}, \dots, X_n)$ et soit $R^* = L[X_1, \dots, X_{n-d}]$, Q_i^* , $i \in J$, (resp I_j^* , $j = 1 \dots r$) l'idéal engendré par $\tilde{Q}_i$ (resp $\tilde{I}_j$). $I_j^* = (f_1, \dots, f_j)$ où f_i , $i = 1 \dots r$, est l'image de f_i par l'inclusion $k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow L[X_1, \dots, X_{n-d}]$. De II.6.5 et II.6.5.2, 1), 2), il résulte que (dans $\mathbf{A}_L^{n-d}$)

$$\dim V(I_j^*) = \dim V(\tilde{I}_j) = k(X_{n-d+1}, \dots, X_n) - \dim V(\tilde{I}_j) = n - d - j$$

$$\dim V(Q_1^*) = \dim V(\tilde{Q}_1) = k(X_{n-d+1}, \dots, X_n) - \dim V(\tilde{Q}_1) = 0$$

et si $\tilde{P}_1 = \sqrt{\tilde{Q}_1}$ et $P_1^* \in \text{Ass} \tilde{P}_1 L[X_1, \dots, X_{n-d}]$, $P_1^* \in \text{Ass} I_r^*$ (1.15). Enfin, puisque $\tilde{P}_1 L[X_1, \dots, X_{n-d}] \subset P_1^*$,

$$0 \leq \dim V(P_1^*) \leq \dim V(\tilde{P}_1 L[X_1, \dots, X_{n-d}]) = \dim V(\tilde{P}_1) = \dim V(\tilde{Q}_1) = 0.$$

Nous avons donc construit un corps algébriquement clos L , un anneau de polynômes $L[X_1, \dots, X_{n-d}]$, des éléments $f_1, \dots, f_r$ de $L[X_1, \dots, X_{n-d}]$ ($r \leq n-d$) tels que si $I_j^* = (f_1, \dots, f_j)$, $\dim V(I_j^*) = n-d-j$ et nous avons montré qu'un idéal premier $\mathcal{P}_1^*$ tel que $\dim V(\mathcal{P}_1^*) = 0$ était associé à I_r^* .

La démonstration va se faire par récurrence sur n .

Si $n = 1$, $r = 1$, $\dim V(I_1) = 0$ et I_1 est équidimensionnel. Nous pouvons donc supposer l'énoncé du théorème vrai pour tout $n' < n$.

Si donc $d > 0$, $n-d < n$. L'hypothèse de récurrence appliquée à $f_1, \dots, f_r$ dans $L[X_1, \dots, X_{n-d}]$ entraîne donc que I_r^* est équidimensionnel. Donc $n-d-r = 0$ et $d = n-r$. Il nous reste à écarter le cas $d = 0$. Supposons qu'il en soit autrement.

Puisque $\dim V(\mathcal{P}_1^*) = 0$, $V(\mathcal{P}_1^*)$ est un ensemble fini non vide de $\mathbf{A}_L^n$ (II.6.5.7). Mais c'est aussi un L -sous-ensemble algébrique irréductible puisque $I_L(V(\mathcal{P}_1^*)) = \sqrt{\mathcal{P}_1^*} = \mathcal{P}_1^*$ est un idéal premier de $L[X_1, \dots, X_n]$. (II.4.5 et II.2.9). Il existe donc $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{A}_L^n$ tel que $V(\mathcal{P}_1^*) = x$ et $\mathcal{P}_1^* = I_L(x) = (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n)$. Puisque $\mathcal{P}_1^* \in \text{Ass } I_r^*$, $(I_r^* : X_n - x_n) \neq I_r^*$ (1.14).

Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que

$$(I_r^* : X_n - x_n) = I_r^*.$$

Soit donc $f \in L[X_1, \dots, X_n]$ tel que $(X_n - x_n)f \in I_r^*$. Il existe donc $g_1, \dots, g_r \in L[X_1, \dots, X_n]$ tels que $(X_n - x_n)f = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r$. Soit $\theta : L[X_1, \dots, X_n] \rightarrow L[X_1, \dots, X_{n-1}]$ tel que $\theta(X_i) = X_i, i=1 \dots n-1, \theta(X_n) = x_n$. On a :

$$(*) \quad \theta(g_r)\theta(f_r) = -\theta(g_1)\theta(f_1) - \dots - \theta(g_{r-1})\theta(f_{r-1}).$$

D'après 1.14, pour voir que $\theta(g_r) \in (\theta(f_1), \dots, \theta(f_{r-1}))$, il suffit de voir que $\theta(f_r)$ n'appartient à aucun des idéaux premiers associés à $\theta(I_{r-1}^*)$. Or l'hypothèse de récurrence s'applique dans $L[X_1, \dots, X_{n-1}]$ à $\theta(f_1), \dots, \theta(f_{r-1})$. En effet, si $1 \leq j \leq r-1$, $\dim V(\theta(I_j^*)) = n-1-j$. Ceci résulte de 1, de II.3.2.1, II.5.7 et II.6.5. Par suite, si $\mathcal{P} \in \text{Ass } \theta(I_{r-1}^*)$, $\dim V(\mathcal{P}) = n-1-(r-1) = n-r$. Soit $\mathcal{P}^*$ l'idéal premier de $L[X_1, \dots, X_n]$ engendré par $\mathcal{P}$ et $X_n - x_n$. On a $L[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{P}^* \simeq L[X_1, \dots, X_{n-1}]/\mathcal{P}$ de sorte que $\dim V(\mathcal{P}^*) = \dim V(\mathcal{P}) = n-r$ et si $\theta(f_r) \in \mathcal{P}$, $I_r^* \subset \mathcal{P}^*$. Or $\dim V(I_r^*) = n-r$. Par ailleurs de 1 il résulte que R^*/I_r^* est une $L[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -algèbre entière (II.3.2.1). Par suite $R^*/\mathcal{P}^*$ quotient de R^*/I_r^* est également une $L[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -algèbre entière et II.6.5.0 entraîne que $L[X_{r+1}, \dots, X_n] \rightarrow R^*/\mathcal{P}^*$ est injectif. On peut donc appliquer II.5.7 à $L[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathcal{P}^*$; il en résulte que $\dim V(\theta(\mathcal{P}^*)) = n-r-1$. Mais $\theta(\mathcal{P}^*) = \mathcal{P}$ et $\dim V(\mathcal{P}) = n-r$. C'est que $\theta(f_r)$ ne peut appartenir à $\mathcal{P}$ et $\theta(g_r) \in (\theta(f_1), \dots, \theta(f_{r-1}))$.

Ecrivons que $g_r = g_{1r}f_1 + \dots + g_{r-1r}f_{r-1} + (X_n - x_n)g'_r$ où g_{jr} , $j = 1 \dots r-1$, $g'_r \in L[X_1, \dots, X_n]$ et reportons dans (*). Il vient :

$$\sum_{i=1 \dots r-1} \{\theta(g_i) + \theta(g_{ir})\theta(f_r)\}\theta(f_i) = 0$$

et

$$\{\theta(g_{r-1}) + \theta(g_{r-1r})\theta(f_r)\}\theta(f_{r-1}) = - \sum_{i=1 \dots r-2} \{\theta(g_i) + \theta(g_{ir})\theta(f_r)\}\theta(f_i).$$

On montre que $\theta(g_{r-1}) + \theta(g_{r-1r})\theta(f_r) \in (\theta(f_1), \dots, \theta(f_{r-2}))$ comme ci-dessus en montrant que $\theta(f_{r-1})$ n'appartient à aucun des idéaux premiers associés à $\theta(I_{r-2}^*)$. L'hypothèse de récurrence s'applique dans $L[X_1, \dots, X_{n-1}]$ à $\theta(f_1), \dots, \theta(f_{r-2})$. Si $\theta(f_{r-1}) \in \mathcal{P} \in \text{Ass}(\theta(I_{r-2}^*))$, $I_{r-1}^* \subset \mathcal{P}^*$ l'idéal de $L[X_1, \dots, X_n]$ engendré par $\mathcal{P}$ et $X_n - x_n$.

$$\dim V(\mathcal{P}^*) = \dim V(\mathcal{P}) = n - 1 - (r - 2) = n - r + 1;$$

$$\dim V(I_{r-1}^*) = n - r + 1.$$

De $\tilde{1}$), II.3.2.1, II.6.5.0, II.5.7, II.6.5, on déduit que $\dim V(\theta(\mathcal{P}^*)) = n - r$ ce qui fournit la contradiction, puisque $\theta(\mathcal{P}^*) = \mathcal{P}$ et $\dim V(\mathcal{P}) = n - r + 1$. On détermine ainsi $g_{1r-1}, \dots, g_{r-2r-1}, g'_{r-1} \in L[X_1, \dots, X_n]$ tels que $g_{r-1} = g_{1r-1}f_1 + \dots + g_{r-2r-1}f_{r-2} - g_{r-1r}f_r + (X_n - x_n)g'_{r-1}$ d'où il résulte :

$$\sum_{i=1 \dots r-2} \{\theta(g_i) + \theta(g_{ir-1})\theta(f_{r-1}) + \theta(g_{ir})\theta(f_r)\}\theta(f_i) = 0.$$

Par récurrence, on détermine donc g_{ji} , $1 \leq j < i$, g'_i , $i = 1 \dots r \in L[X_1, \dots, X_n]$ tels que

$$g_i = g_{1i}f_1 + \dots + g_{i-1i}f_{i-1} - g_{ii+1}f_{i+1} - \dots - g_{ir}f_r + (X_n - x_n)g'_i.$$

Posant $g_{ji} = -g_{ij}$ si $j > i$, $g_{ii} = 0$, il vient

$$g_i = \sum_j g_{ji}f_j + (X_n - x_n)g'_i$$

et

$$\begin{aligned} \sum_i g_i f_i &= \sum_{i,j} g_{ji} f_j f_i + (X_n - x_n) \sum g'_i f_i \\ &= \sum_{i < j} (g_{ji} + g_{ij}) f_j f_i + (X_n - x_n) \sum g'_i f_i \\ &= (X_n - x_n) \sum g'_i f_i. \end{aligned}$$

Finalement $(X_n - x_n)[f - \sum_i g'_i f_i] = 0$ et $f \in I_r^*$.

2.2. REMARQUES. — Si $f_1, \dots, f_r$ sont homogènes et si $\dim V(I_r) = n - r$, $\dim V(I_j) = n - j$, $1 \leq j \leq r$. (C'est une conséquence de II.7.8) de sorte que I_r est équidimensionnel.

Si $f_1, \dots, f_r$ sont quelconques et si $\dim V(I_r) = n - r$, il se peut que $\dim V(I_{r-1}) \neq n - r + 1$. On a remarqué (cf. 7.8.3) que $V(I_{r-1}) \supset V(I_r)$ étant $\neq \emptyset$, $\dim V(I_{r-1}) \geq n - r + 1$.

Par exemple dans $k[X, Y, Z]$, $f_1 = Z(1 + X)$, $f_2 = Y(1 + X)$, $f_3 = X$. $V(I_3) = 0$, $V(I_2) = V(1 + X) \cup V(X, Y)$.

Néanmoins, on peut montrer qu'il existe $g_1, \dots, g_r$ un système de générateurs de I_r tel que $g_i = \sum \lambda_{ij} f_j$, $\lambda_{ij} \in k$ et tel que si $J_j = (g_1, \dots, g_j)$, $\dim V(J_j) = n - j$, $j = 1 \dots r$. La conclusion du théorème 1.2 reste vraie. Nous n'aurons pas besoin d'utiliser ce résultat.

2.3. DÉFINITION. — Soit $f_1, \dots, f_r \in A$ un anneau. On dit que $f_1, \dots, f_r$ est une suite régulière si f_j est non diviseur de zéro dans $A/f_1, \dots, f_{j-1}$, $j = 1 \dots r$.

2.4. PROPOSITION. — Sous les hypothèses de 2.1, $f_1, \dots, f_r$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]$.

Démonstration. — Puisque $\dim V(I_1) = n - 1$, $f_1 \neq 0$.

Soit $g \in k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $gf_{j+1} \in I_j$. Alors $g \in (I_j : (f_{j+1}))$. Il s'agit donc de montrer que $(I_j : (f_{j+1})) = I_j$. Pour cela, il suffit que f_{j+1} n'appartienne à aucun $\mathcal{P} \in \text{Ass} I_j$. Or d'après 2.1, $\dim V(\mathcal{P}) = n - j$. Si $f_{j+1} \in \mathcal{P}$, $I_{j+1} \subset \mathcal{P}$ et $\dim V(I_{j+1}) = n - j - 1 \geq \dim V(\mathcal{P}) = n - j$. C'est impossible.

2.5. TERMINOLOGIE. — Sous les hypothèses de 2.1, on dit que I_r est une intersection complète.

3. Résultats d'effectivité pour les intersections complètes

3.1. THÉORÈME. — Soit k un corps, $f_1, \dots, f_r$ des polynômes homogènes non nuls de $k[X_1, \dots, X_n]$, $1 \leq r \leq n$. Soit $I = (f_1, \dots, f_r)$, $d_i = \deg f_i$, $i = 1 \dots r$. Si $\dim V(I) = n - r$, on a dans $\mathbb{Q}[[t]]$

$$\sum_{s \in \mathbb{N}} \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s \, t^s = \frac{(1 - t^{d_1}) \dots (1 - t^{d_r})}{(1 - t)^n}.$$

Démonstration. — Nous montrons d'abord :

3.1.1. LEMME. —

$$\frac{1}{(1 - t)^n} = \sum_{s \geq 0} \binom{n + s - 1}{n - 1} t^s.$$

Par récurrence sur n . Si $n = 1$, $\frac{1}{1-t} = 1 + \dots + t^s + \dots$; c'est vrai. Si cette identité est vraie pour n dans $\mathbb{Q}[[t]]$, il vient en la dérivant par rapport à t :

$$\frac{n}{(1 - t)^{n+1}} = \sum_{s \geq 1} s \binom{n + s - 1}{n - 1} t^{s-1} = \sum_{s \geq 0} (s + 1) \binom{n + s}{n - 1} t^s.$$

Or,

$$\frac{s + 1}{n} \binom{n + s}{n - 1} = \frac{(n + s)!}{n! s!} = \binom{n + s}{n}.$$

La démonstration du théorème va se faire par récurrence sur r . On peut supposer k infini (et même algébriquement clos). (II.6.5.3). 2.2 et 2.4 entraînent que $f_1, \dots, f_r$ est une suite régulière. Nous avons donc les suites exactes :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{s-d_r} / I_{r-1 \, s-d_r} \xrightarrow{f_r} \dots \\ \dots &\longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r-1 \, s} \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r \, s} \longrightarrow 0, \quad s \geq d_r \\ 0 &\longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r-1 \, s} \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r \, s} \longrightarrow 0, \quad s < d_r. \end{aligned}$$

Il en résulte alors que :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r \, s} &= \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r-1 \, s}, & s < d_r, \\ &= \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r-1 \, s} \\ &\quad - \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_{s-d_r} / I_{r-1 \, s-d_r}, & s \geq d_r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{s \geq 0} \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_r t^s &= \sum_{s \geq 0} \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r-1} t^s \\
&\quad - \sum_{s \geq d_r} \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_{s-d_r} / I_{r-1} t^{s-d_r} \\
&= \sum_{s \geq 0} \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_{r-1} t^s (1 - t^{d_r}) \\
&= \frac{(1 - t^{d_1}) \dots (1 - t^{d_r})}{(1 - t)^n}
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence.

3.2. COROLLAIRE. — Sous les hypothèses de 3.1, si $P(T) \in \mathbb{Q}[T]$ désigne le polynôme de Hilbert de $k[X_1, \dots, X_n]/I$,

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s = P(s) \text{ si } s \geq d_1 + \dots + d_r - n + 1.$$

Si $r < n$, le terme dominant de $P(T)$ est $\frac{d_1 \dots d_r}{(n - r - 1)!} T^{n-r-1}$. Si $r = n$, $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n] / I = d_1 \dots d_n$.

Démonstration. — Le théorème précédent nous permet de calculer $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s$ pour tout $s \geq 0$. C'est le coefficient de t^s dans le développement en série en t de la fraction rationnelle $\prod (1 - t^{d_i}) / (1 - t)^n$. Or $(1 - t^d) = (1 + t + \dots + t^{d-1})(1 - t)$.

Supposons d'abord $r = n$. On a alors :

$$\prod_{i=1 \dots n} (1 - t^{d_i}) / (1 - t)^n = \prod_{i=1 \dots n} (1 + t + \dots + t^{d_i-1}).$$

Il en résulte que $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s = 0$, si $s > \sum_{i=1}^n (d_i - 1) = d_1 + \dots + d_n - n$. (On savait déjà que $P \equiv 0$).

On remarque également que

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n] / I = \sum_s \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s = d_1 \dots d_n.$$

Si maintenant $r < n$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{i=1 \dots r} (1 - t^{d_i})}{(1 - t)^n} &= \frac{\prod_{i=1 \dots r} (1 + t + \dots + t^{d_i-1})}{(1 - t)^{n-r}} \\
&= \prod_{i=1 \dots r} (1 + \dots + t^{d_i-1}) \left(\sum_{s \geq 0} \binom{n-r+s-1}{n-r-1} t^s \right).
\end{aligned}$$

Posons

$$\prod_{i=1 \dots r} (1 + t + \dots + t^{d_i-1}) = \sum_{j=0, \dots, \sum d_i-r} \lambda_j t^j.$$

On a

$$\lambda_0 = \lambda_{\sum d_i - r} = 1 .$$

Posons

$$R(T) = \frac{(n - r - 1 + T) \dots (1 + T)}{(n - r - 1)!} ;$$

$R(T)$ est un polynôme à coefficients rationnels de degré $n - r - 1$ (pour $n = r + 1$, $R(T) \equiv 1$) et on a $R(s) = \binom{n-r+s-1}{n-r-1}$ si $s \in \mathbb{N}$, de sorte que $\frac{1}{(1-t)^{n-r}} = \sum_{s \geq 0} R(s)t^s$. On constate alors que :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s &= \lambda_0 R(s) + \lambda_1 R(s-1) + \dots \\ &+ \lambda_{\sum d_i - r} R(s - \sum d_i + r) \text{ si } s \geq \sum d_i - r. \end{aligned}$$

Soit $\pi(T) = \lambda_0 R(T) + \dots + \lambda_{\sum d_i - r} R(T - \sum d_i + r)$. C'est un polynôme de degré $n - r - 1$ à coefficients rationnels et $\pi(s) = \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s$ si $s \geq \sum d_i - r$. Donc $\pi = P$. Si maintenant $0 \leq s < \sum d_i - r$,

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s = \lambda_0 R(s) + \lambda_1 R(s-1) + \dots + \lambda_s R(0).$$

Or

$$\begin{aligned} \pi(s) &= \lambda_0 R(s) + \lambda_1 R(s-1) + \dots + \lambda_s R(0) + \lambda_{s+1} R(-1) + \dots \\ &+ \lambda_{\sum d_i - r} R(s - \sum d_i + r). \end{aligned}$$

Mais $R(-1) = R(-2) = \dots = R(-(n - r - 1)) = 0$.

Si donc $s - \sum d_i + r \geq -(n - r - 1)$, i.e. $s \geq \sum d_i - n + 1$,

$$\pi(s) = \lambda_0 R(s) + \lambda_1 R(s-1) + \dots + \lambda_s R(0) = \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s = P(s).$$

Enfin, puisque le terme dominant de $R(T)$ est $\frac{T^{n-r-1}}{(n-r-1)!}$, le terme dominant de

$$P \text{ est } (\lambda_0 + \dots + \lambda_{\sum d_i - r}) \frac{T^{n-r-1}}{(n-r-1)!} = \frac{d_1 \dots d_r}{(n-r-1)!} T^{n-r-1}.$$

3.2.1. REMARQUE. — Sous les hypothèses de 3.2, le polynôme de Hilbert de $k[X_1, \dots, X_n]/I$ ne dépend que de $d_1, \dots, d_r$ et n .

3.2.2. REMARQUE. — Sous les hypothèses de 3.2, l'indice de régularité de $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est $d_1 + \dots + d_r - n + 1$.

Démonstration. — En effet

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_{d_1 + \dots + d_r - n} / I_{d_1 + \dots + d_r - n} \neq P(d_1 + \dots + d_r - n)$$

$$P(\sum d_i - n) = \lambda_0 R(\sum d_i - n) + \dots + \lambda_{\sum d_i - r} R(-(n - r))$$

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_{\sum d_i - n} / I_{\sum d_i - n} = \lambda_0 R(\sum d_i - n) + \dots + \lambda_{\sum d_i - n} R(0)$$

Or, $R(-1) = \dots = R(-(n - r - 1)) = 0$ et $R(-(n - r)) \neq 0$.

3.3. PROPOSITION. — Sous les hypothèses de 3.1, si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodes pour I , pour toute permutation σ de $r+1, \dots, n$, $X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$.

Démonstration. — $f_1, \dots, f_r, X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}$ satisfait les hypothèses de 3.1, puisque d'après II.5.7 et II.6.5.7, $\dim V(f_1, \dots, f_r, X_{r+1}, \dots, X_n) = 0$. $f_1, \dots, f_r, X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}$ est donc une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/f_1, \dots, f_r, X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}$. Par définition, $X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}$ est donc une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$.

3.4. PROPOSITION. — Soit I un idéal homogène de $k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\dim V(I) = n - r$, $1 \leq r \leq n$. Soit $\theta : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\theta(X_i) = X_i$, $i = 1, \dots, r$, $\theta(X_i) = 0$, $i = r+1, \dots, n$.

N^n et N^r étant munis de l'ordre lexicographique inverse (I.1.1.2.2), si $X_n, \dots, X_{r+1}$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$, $\exp I = \exp \theta(I) \times N^{n-r}$.

Il en est en particulier ainsi si I vérifie les hypothèses de 3.1 et si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodes pour I et alors $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/\theta(I) = \#N^r - \exp \theta(I) = d_1 \dots d_r$.

Démonstration. — Soit $g \in I$. Puisque I est un idéal homogène, et par définition de l'ordre lexicographique inverse, $\operatorname{ing} = \operatorname{in} \operatorname{grg}$ et $\operatorname{grg} \in I$. On peut donc supposer g homogène. Soit $\operatorname{ing} = c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$, $c_\alpha \in k$, $c_\alpha \neq 0$. Nous allons montrer qu'il existe $g' \in I$ homogène tel que $\operatorname{ing}' = c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r}$.

Soit $g = \sum_\gamma c_\gamma X_1^{\gamma_1} \dots X_n^{\gamma_n}$. Puisque $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \exp g$, si γ est tel que $c_\gamma \neq 0$, $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \leq (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On a donc $\gamma_n \geq \alpha_n$. Il existe donc $g_1 \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogène tel que $g = X_n^{\alpha_n} g_1$. Or X_n étant non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I$, $g_1 \in I$ et on a $\operatorname{ing}_1 = c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$.

Supposons qu'on ait déterminé g_i homogène dans I tel que $\operatorname{ing}_i = c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_{n-i}^{\alpha_{n-i}}$, $i < n - r$.

Si $g_i = \sum c_{i\gamma} X_1^{\gamma_1} \dots X_n^{\gamma_n}$ et si $c_{i\gamma} \neq 0$, $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \leq (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-i}, 0, \dots, 0)$. Ou bien, il existe j , $n - i + 1 \leq j \leq n$ tel que $\gamma_j > 0$, ou bien $\gamma_{n-i+1} = \dots = \gamma_n = 0$ et $\gamma_{n-i} \geq \alpha_{n-i}$. Il existe donc $g'_1, \dots, g'_{i+1} \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogènes tels que $g_i = X_n g'_1 + \dots + X_{n-i+1} g'_i + X_{n-i}^{\alpha_{n-i}} g'_{i+1}$. Or X_{n-i} étant non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I + (X_n) + \dots + (X_{n-i+1})$, $g'_{i+1} \in I + (X_n) + \dots + (X_{n-i+1})$. Il existe donc $g_{i+1} \in I$ et $h'_1, \dots, h'_i$ dans $k[X_1, \dots, X_n]$ homogènes tels que

$$g'_{i+1} = X_n h'_1 + \dots + X_{n-i+1} h'_i + g_{i+1}$$

et

$$g_i = X_n (g'_1 + X_{n-i}^{\alpha_{n-i}} h'_1) + \dots + X_{n-i+1} (g'_i + X_{n-i}^{\alpha_{n-i}} h'_i) + X_{n-i}^{\alpha_{n-i}} g_{i+1}.$$

Or $\exp g_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-i}, 0, \dots, 0)$. Tout monôme de même degré contenant effectivement $X_n, X_{n-1}, \dots$ ou X_{n-i+1} est donc strictement plus petit que $\exp g_i$ et $\operatorname{ing}_i = \operatorname{in} X_{n-i}^{\alpha_{n-i}} g_{i+1}$. Donc

$$\operatorname{ing}_{i+1} = c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_{n-i-1}^{\alpha_{n-i-1}}.$$

Itérant ce procédé, on détermine donc $g_{n-r} \in I$ homogène tel que $\text{ing}_{n-r} = c_\alpha X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r}$ comme annoncé. Mais $\theta(g_{n-r}) \neq 0$ et tout monôme contenant effectivement X_n, X_{n-1} ou $\dots X_{r+1}$ étant strictement plus petit qu'un monôme en $X_1, \dots, X_r$ c'est que $\text{ing}_{n-r} = \text{in}\theta(g_{n-r})$. On a donc

$$\text{ing} = \text{in}\theta(g_{n-r}) \times X_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \dots X_n^{\alpha_n} \quad \text{et} \quad \exp I \subset \exp \theta(I) \times \mathbb{N}^{n-r}.$$

L'inclusion opposée résulte en fait de la remarque précédente car $\exp I$ étant un E -ensemble, il suffit de montrer que $\exp \theta(I) \times 0, \dots, 0 \subset \exp I$. Or si $\theta(f) \neq 0$, $\exp \theta(f) = \exp f$.

Enfin $X_n, \dots, X_{r+1}$ étant une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$, d'après II.7.8.1, $\dim V(\theta(I)) = 0$ et $\text{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/\theta(I) < \infty$. Si I vérifie les hypothèses de 3.1, $\theta(I)$ aussi dans $k[X_1, \dots, X_r]$ et d'après 3.2 $\text{rg}_k k[X_1, \dots, X_r]/\theta(I) = d_1 \dots d_r$. Enfin, d'après I.2.9 c'est aussi $\sharp \mathbb{N}^r - \exp \theta(I)$.

3.4.1. COROLLAIRE. — Sous les hypothèses de 3.4, $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est un $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -module libre de type fini.

Démonstration. — Montrons que

$$(\text{cl} X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \text{ mod } I)_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^r - \exp \theta(I)}$$

forment une base du $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -module $k[X_1, \dots, X_n]/I$. D'après I.2.7, pour tout $f \in k[X_1, \dots, X_n]$, $fRI \equiv f \text{ mod } I$ et $fRI = \sum c_\alpha X^\alpha$, $\alpha \notin \exp I$. Or $\exp I = \exp \theta(I) \times \mathbb{N}^{n-r}$, $\mathbb{N}^n - \exp I = \mathbb{N}^r - \exp \theta(I) \times \mathbb{N}^{n-r}$. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \notin \exp I$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \notin \exp \theta(I)$ et les $(\text{cl} X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \text{ mod } I)_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^r - \exp \theta(I)}$ engendrent le $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -module $k[X_1, \dots, X_n]/I$. Si maintenant

$$f = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^r - \exp \theta(I)} P_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(X_{r+1}, \dots, X_n) X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \in I,$$

$$P_{\alpha_1 \dots \alpha_r} \in k[X_{r+1}, \dots, X_n]$$

et si $f \neq 0$, $\exp f \in \exp I$.

Or $\exp I = \exp \theta(I) \times \mathbb{N}^{n-r}$, si $\exp f = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$, d'une part $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \exp \theta(I)$, d'autre part $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \notin \exp \theta(I)$. C'est que $f = 0$ et que $P_\alpha = 0$ pour tout α .

3.4.2. REMARQUE. — Sous les hypothèses de 3.4, les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodées pour I et pour toute permutation σ de $r+1 \dots n$, $X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(r+1)}$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$.

Démonstration. — $I = \text{gr} I$ puisque I est homogène; II.3.2.1 et 3.4.1 entraînent que ii) de II.5.2 est satisfait avec $d = n - r$. II.6.5.0 entraîne que i) de II.5.2 est aussi satisfait.

Montrons maintenant que $X_{\sigma(i)}$ est non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I + (X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(i+1)})$, $r+1 \leq i \leq n$. Soit $f_j \in k[X_1, \dots, X_n]$, $i \leq j \leq n$ tels que : $X_{\sigma(i)} f_i + \dots + X_{\sigma(n)} f_n \in I$. D'après 3.4.1, $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est un $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -module libre de type fini. Soit (e_h) , $h = 1 \dots t$, une base de

ce module. Ecrivons que $\text{cl}f_j \bmod I = \sum_h \lambda_{jh} e_h$, $\lambda_{jh} \in k[X_{r+1}, \dots, X_n]$. On en déduit que $\forall h = 1 \dots t$,

$$X_{\sigma(i)} \lambda_{ih} + \dots + X_{\sigma(n)} \lambda_{nh} = 0.$$

Alors $\lambda_{ih} \in (X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ et $f_i \in I + (X_{\sigma(n)}, \dots, X_{\sigma(i+1)})$.

3.5. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de 3.1, si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodés pour I et si $g_1, \dots, g_t$ est une base standard de cardinal minimal de I pour l'ordre lexicographique inverse,*

$$\deg g_i \leq d_1 + \dots + d_r - r + 1, \quad i = 1 \dots t.$$

Démonstration. — D'après 3.3 et 3.4, $\exp I = \exp \theta(I) \times \mathbb{N}^{n-r}$. Soit $A_i = \exp g_i$. Puisque $A_1, \dots, A_t$ est l'escalier de I , $A_i \in \mathbb{N}^r \times 0$, $i = 1 \dots t$. De 3.2, on déduit que si $\alpha_1 + \dots + \alpha_r \geq d_1 + \dots + d_r - r + 1$, $X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \in \theta(I)$. Pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ tel que $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = d_1 + \dots + d_r - r + 1$, il existe donc j (dépendant de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$) tel que $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) - A_j \in \mathbb{N}^r$ (en effet $A_1, \dots, A_t$ est également l'escalier de $\theta(I)$) et $|A_j| \leq |\alpha| = d_1 + \dots + d_r - r + 1$. Soit Λ l'ensemble des $j \in 1 \dots t$ obtenu par ce procédé. Si, il existe $j' \in 1 \dots t$, $j' \notin \Lambda$ et si $|A_{j'}| > d_1 + \dots + d_r - r + 1$, $A_{j'} \in \exp \theta(I)$ et il existe $j'' \in 1 \dots t$ tel que $A_{j'} \in A_{j''} + \mathbb{N}^r$. Un tel j' ne peut exister, puisque $A_1, \dots, A_t$ est l'escalier d'un E -ensemble. Donc $|A_j| = \deg g_j \leq d_1 + \dots + d_r - r + 1$, $j = 1 \dots t$.

3.5.1. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de 3.1 et si $r = n$, si $g_1, \dots, g_t$ est une base standard de cardinal minimal pour un ordre total sur $\mathbb{N}^n$ vérifiant I.1.1, $\deg g_i \leq d_1 + \dots + d_n - n + 1$, $i = 1 \dots t$.*

Démonstration. — Si $|\alpha| \geq d_1 + \dots + d_n - n + 1$, $X^\alpha \in I$. Pour tout ordre $\exp X^\alpha = \alpha \in \exp I = \cup_i (\exp g_i + \mathbb{N}^n)$. L'argument est comme ci-dessus.

4. Résultats d'effectivité pour les Cohen-Macaulay

Nous allons introduire dans ce paragraphe une classe d'idéaux contenant les intersections complètes à laquelle les résultats d'effectivité du 3 vont s'étendre.

4.1. PROPOSITION. — Soit k un corps infini. Soit $f_1, \dots, f_s$, $s \geq 1$, des polynômes homogènes de $k[X_1, \dots, X_n]$ tous $\neq 0$. Soit $d_i = \deg f_i$, $i = 1 \dots s$. On suppose que $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_s > 0$. Enfin si $I = (f_1, \dots, f_s)$, on pose $\dim V(I) = n - r$. ($1 \leq r \leq n$). Alors, il existe $g_1, \dots, g_r \in k[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes homogènes tels que :

- 1) $\deg g_i = d_i$, $i = 1 \dots r$,
- 2) $g_i \equiv \lambda_i f_i \pmod{(f_{i+1}, \dots, f_s)}$ avec $\lambda_i \in k$, $\lambda_i \neq 0$, $i = 1 \dots r$,
- 3) $g_1, \dots, g_r$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]$.

Démonstration. — Puisque $\dim V(I) \geq n - s$ (II.7.8.2), $r \leq s$. Si $r = s$, $f_1, \dots, f_r$ est une suite régulière (2.2, 2.4). Supposons donc $r < s$. Soit $g_1 = f_1$. On a $\deg g_1 = d_1$ et $g_1 \neq 0$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]$. Supposons qu'on ait déterminé $g_1, \dots, g_{t-1}$, $t \leq r$, tels que :

- 1) $\deg g_i = d_i$, $i = 1 \dots t - 1$,
- 2) $g_i \equiv \lambda_i f_i \pmod{(f_{i+1}, \dots, f_s)}$ avec $\lambda_i \in k$, $\lambda_i \neq 0$, $i = 1 \dots t - 1$, $(*)_{t-1}$.
- 3) $g_1, \dots, g_{t-1}$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]$

et déterminons g_t . Soit

$$\phi : k \times k^{\binom{n+d_t-d_{t+1}-1}{n-1}} \times \dots \times k^{\binom{n+d_t-d_s-1}{n-1}} = k^r \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{d_t}$$

qui à

$$(\lambda_t, \dots, \lambda_{t+1, \alpha^{t+1}}, \dots, \dots, \lambda_s, \alpha^s, \dots) \mapsto \lambda_t f_t + \sum \lambda_{t+1, \alpha^{t+1}} X^{\alpha^{t+1}} f_{t+1} \\ + \dots + \sum \lambda_{s, \alpha^s} X^{\alpha^s} f_s$$

où $\alpha^i = (\alpha_n^i, \dots, \alpha_1^i)$ est tel que $|\alpha^i| = d_t - d_i$.

ϕ est une application linéaire.

D'autre part, $g_1, \dots, g_{t-1}$ étant une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]$ formée d'éléments homogènes, si $J_i = (g_1, \dots, g_i)$, $i = 1 \dots t - 1$, $\dim V(J_i) = n - i$ (II.7.8.1) et d'après 2.1, J_{t-1} est équidimensionnel; soit $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_u$ les idéaux premiers associés à J_{t-1} , on a donc $\dim V(\mathcal{P}_i) = n - t + 1 > n - r$, $i = 1 \dots u$.

Or pour que $g \in k[X_1, \dots, X_n]$ soit non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/J_{t-1}$, il faut et il suffit que $g \notin \cup_{i=1 \dots u} \mathcal{P}_i$ (1.14.1). J_{t-1} étant un idéal homogène, les idéaux premiers associés à J_{t-1} sont aussi des idéaux homogènes et pour que $g \in k[X_1, \dots, X_n]_{d_t}$ ne soit pas diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/J_{t-1}$

J_{t-1} , il faut et il suffit que $g \notin \cup_{i=1 \dots u} \mathcal{P}_{id_t}$. $\mathcal{P}_{id_t}$ est un sous-espace vectoriel de $k[X_1, \dots, X_n]_{d_t}$. g doit donc éviter une réunion de sous-espaces vectoriels.

Plus précisément, pour que $g_1, \dots, g_{t-1}, \phi(\Lambda)$ vérifie les conditions $(*)_t$, il suffit que $\Lambda \notin \cup_{i=1 \dots u} \phi^{-1}(\mathcal{P}_{id_t}) \cup \{\lambda_t = 0\}$. Λ doit donc éviter un nombre fini de sous-espaces vectoriels de k^τ . k étant infini, cela est possible à condition qu'aucun des sous-espaces en question ne soit k^τ tout entier. Pour $\{\lambda_t = 0\}$, c'est clair.

Montrons que pour tout $i = 1 \dots u$, $\phi^{-1}(\mathcal{P}_{id_t}) \neq k^\tau$. S'il en était autrement pour un indice i , $1 \leq i \leq u$, on en déduirait que $f_t, \dots, X^{\alpha^j} f_j, \dots$, appartiendrait à $\mathcal{P}_i$ pour tout α^j , $t+1 \leq j \leq s$, de longueur $d_t - d_j$. Si $d_j = d_t$, alors $f_j \in \mathcal{P}_i$. Si $d_j \neq d_t$, $X_1^{d_t-d_j} f_j, \dots, X_n^{d_t-d_j} f_j \in \mathcal{P}_i$. Si f_j n'appartenait pas à $\mathcal{P}_i$, il en résulterait que $(X_1, \dots, X_n) \subset \mathcal{P}_i$ et $\dim V(\mathcal{P}_i) = 0$. Or c'est impossible, puisque $\dim V(\mathcal{P}_i) = n - t + 1 > n - r \geq 0$. Donc $f_t, \dots, f_s \in \mathcal{P}_i$. Mais $g_1, \dots, g_{t-1}$ vérifie les conditions $(*)_{t-1}$. Il en résulte que si $1 \leq j \leq t-1$, $f_j \in (g_j, \dots, g_{t-1}, f_t, \dots, f_s)$. Comme $J_{t-1} \subset \mathcal{P}_i$, $f_j \in \mathcal{P}_i$, $1 \leq j \leq t-1$. Au total $I \subset \mathcal{P}_i$. Alors $\dim V(I) \geq \dim V(\mathcal{P}_i)$ i.e. $n - r \geq n - t + 1$ ce qui est contradictoire. Il existe donc $\Lambda \in k^\tau$ tel que $g_1, \dots, g_{t-1}, \phi(\Lambda)$ vérifie $(*)_t$ et finalement on obtient $g_1, \dots, g_r$ vérifiant $(*)_r$.

4.2. DÉFINITION. — Soit k un corps infini et I un idéal homogène de $k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\dim V(I) = n - r$. $0 \leq r \leq n$. On dit que $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay (gradué) s'il existe $\tau : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[Y_1, \dots, Y_n]$ un changement de variables linéaire tel que $Y_n, \dots, Y_{r+1}$ soit une suite régulière de $k[Y_1, \dots, Y_n]/\tau(I)$.

Au cours de la démonstration de la proposition suivante, nous utiliserons :

4.3. LEMME. — Soit $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_t$ des idéaux premiers de $k[X_1, \dots, X_n]$ et soit I un idéal de $k[X_1, \dots, X_n]$. Si $I \subset \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_t$, $\exists i$, $1 \leq i \leq t$, $I \subset \mathcal{P}_i$.

Démonstration. — Par récurrence sur t . Si $t = 1$, c'est clair. Supposons $t \geq 2$. Nous allons montrer qu'il existe j , $1 \leq j \leq t$ tel que $I \cap \mathcal{P}_j \subset \cup_{i \neq j} \mathcal{P}_i$. S'il en est ainsi $I = \cup_{i=1 \dots t} I \cap \mathcal{P}_i \subset \cup_{i \neq j} \mathcal{P}_i$ et on conclut en vertu de l'hypothèse de récurrence.

S'il en était autrement, pour tout j , $1 \leq j \leq t$, il existerait $f_j \in I \cap \mathcal{P}_j$, $f_j \notin \mathcal{P}_i$, $i \neq j$. Soit $z = f_1 + f_2 \cdots f_t$, $z \in I$. $f_2 \cdots f_t \notin \mathcal{P}_1$ car $\mathcal{P}_1$ est premier et f_i , $i = 2 \dots t$, n'appartient pas à $\mathcal{P}_1$. $f_1 \in \mathcal{P}_1$. Donc $z \notin \mathcal{P}_1$. Soit $i \geq 2$. $f_1 \notin \mathcal{P}_i$. $f_2 \cdots f_t \in \mathcal{P}_i$. Donc $z \notin \mathcal{P}_i$. Alors $z \notin \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_t$ contrairement à l'hypothèse.

4.3.1. PROPOSITION. — Soit I un idéal homogène de $k[X_1, \dots, X_n] \neq (1)$. Si $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay, I est équidimensionnel.

Démonstration. — Si τ est comme dans 4.2, il s'agit de démontrer que $\tau(I)$ est équidimensionnel. Effectuant au besoin un changement de notation, nous pouvons donc supposer que $X_n, \dots, X_{r+1}$ est une suite régulière pour $k[X_1, \dots, X_n]/I$. Soit $d = \dim V(I)$. Il faut montrer que si $\mathcal{P} \in \text{Ass } I$, $\dim V(\mathcal{P}) = d$.

Soit $\mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_t$ les idéaux premiers associés à $I + X_n$. Nous allons d'abord montrer qu'il existe i , $1 \leq i \leq t$, tel que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'_i$. S'il n'en était pas ainsi $\mathcal{P} \not\subset \cup_{i=1 \dots t} \mathcal{P}'_i$ (lemme 4.3). Il existerait donc $f \in \mathcal{P}$, $f \notin \mathcal{P}'_j$, $j = 1 \dots t$. De 1.14, il résulte que $(I + X_n : f) = I + X_n$. Soit maintenant $g \in (I : f)$. Alors $gf \in I \subset I + X_n$ et $g \in I + X_n$. Il existe donc $h' \in I$ et $g' \in k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $g = h' + X_n g'$. D'où $X_n g' f = gf - h' f \in I$ et puisque X_n est non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I$, $g' f \in I$ et $g' \in (I : f)$. I étant un idéal homogène, on peut supposer que $\deg h' \leq \deg g$, $\deg g' \leq \deg g - 1$. Par récurrence descendante sur le degré, on en déduit que $g \in I$ (on aboutit à $c \in k$, $c \in (I : f)$ donc $cf \in I \subset (I + X_n)$, $c \in (I + X_n : f) = I + X_n$, donc $c = 0$). Ainsi $(I : f) = I$. Mais c'est impossible, d'après 1.14, puisque $f \in \mathcal{P}$.

En raisonnant par récurrence sur le nombre des variables, puisque

$$k[X_1, \dots, X_n]/I + X_n \simeq k[X_1, \dots, X_{n-1}]/\theta(I)$$

où $\theta : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ est l'application telle que $\theta(X_i) = X_i$, $i = 1 \dots n-1$, $\theta(X_n) = 0$ et que, $X_n, \dots, X_{r+1}$ étant une suite régulière pour $k[X_1, \dots, X_n]/I$, par définition $X_{n-1}, \dots, X_{r+1}$ est une suite régulière pour $k[X_1, \dots, X_{n-1}]/\theta(I)$ enfin puisque $\dim V(\theta(I)) = \dim V(I) - 1$ (II.7.8.1), il vient que $\dim V(\mathcal{P}'_i) = d - 1$. Par suite, $\dim V(\mathcal{P}) \geq d - 1$. (1^{er} exercice, chap. II). Si l'inégalité est stricte, puisque $\dim V(\mathcal{P}) \leq d$, on a $\dim V(\mathcal{P}) = d$ et on a fini.

Sinon $\dim V(\mathcal{P}) = d - 1$. Alors $\mathcal{P} = \mathcal{P}'_i$ (II. 1^{er} exercice). Or $I + X_n \subset \mathcal{P}'_i = \mathcal{P}$. Donc $X_n \in \mathcal{P}$. Mais c'est impossible car X_n est non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I$ (1.14).

4.4. PROPOSITION. — Soit I un idéal homogène de $k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\dim V(I) = n - r$, $0 \leq r \leq n$. Si $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay et si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodés pour I , $X_n, \dots, X_{r+1}$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$. Il en est de même pour toute permutation de $X_n, \dots, X_{r+1}$.

Démonstration. — X_n est non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I$. En effet, il suffit de voir que si $\mathcal{P} \in \text{Ass} I$, $X_n \notin \mathcal{P}$ (1.14). Or $\dim V(\mathcal{P}) = n - r$ (4.3.1). Si $X_n \in \mathcal{P}$, $I + X_n \subset \mathcal{P}$; $\dim V(I + X_n) \geq \dim V(\mathcal{P}) = n - r$ (II.1^{er} exercice). Or $\dim V(I + X_n) = n - r - 1$ (II.7.9).

Il existe $X''_{r+1}, \dots, X''_{n-1} \in k[X_1, \dots, X_n]_1$ tels que $X_n, X''_{n-1}, \dots, X''_{r+1}$ soit une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$. En effet, supposons qu'on ait construit $X''_{n-1}, \dots, X''_{i+1} \in k[X_1, \dots, X_n]_1$, $i > r$, tels que $X_n, X''_{n-1}, \dots, X''_{i+1}$ soit une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$ et construisons X'_i . Par hypothèse, il existe $X'_n = \tau^{-1}(Y_n), \dots, X'_{r+1} = \tau^{-1}(Y_{r+1})$ tel que $X'_n, \dots, X'_{r+1}$ soit une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$. X'_i étant non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I + (X'_n, \dots, X'_{i+1})$ on a :

$$(I + (X'_n, \dots, X'_{i+1}) : X'_i) = I + (X'_n, \dots, X'_{i+1}).$$

Soit $M = (X_1, \dots, X_n) = (X'_1, \dots, X'_n)$ où $X'_i = \tau^{-1}(Y_i)$, $i = 1 \dots n$. A fortiori

$$(I + (X'_n, \dots, X'_{i+1}) : M) = I + (X'_n, \dots, X'_{i+1}).$$

Admettons pour l'instant que ceci entraîne que

$$(I + (X_n, \dots, X''_{i+1}) : M) = I + (X_n, \dots, X''_{i+1}).$$

Soit $\mathcal{P}'_1, \dots, \mathcal{P}'_t$ les idéaux premiers associés à $I + (X_n, \dots, X''_{i+1})$. D'après 1.14, M n'est contenu dans aucun des $\mathcal{P}'_i$, $i = 1 \dots t$ et $(\mathcal{P}'_i)_1 \neq k[X_1, \dots, X_n]_1$, $i = 1 \dots t$. k étant un corps infini, $\cup_{i=1 \dots t} (\mathcal{P}'_i)_1 \neq k[X_1, \dots, X_n]_1$. Il existe donc $X''_i \in k[X_1, \dots, X_n]_1$ tel que X''_i soit non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I + (X_n, \dots, X''_{i+1})$; $X_n, \dots, X''_{i+1}, X''_i$ est la suite régulière cherchée.

Par définition

$$k[X_1, \dots, X_n]/I + X_n \simeq k[X_1, \dots, X_{n-1}]/I(X_1, \dots, X_{n-1}, 0) = A$$

est Cohen-Macaulay puisque $X''_{n-1}, \dots, X''_{r+1}$ est une suite régulière de A qui est de dimension $n - r - 1$. Par récurrence sur n , on peut donc supposer que $X_{n-1}, \dots, X_{r+1}$ est une suite régulière de A . (Les variables $X_1, \dots, X_{n-1}$ sont commodées pour A-II.5.7). $X_n, \dots, X_{r+1}$ est donc une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$. La même démonstration s'applique à toute permutation de $X_n, \dots, X_{r+1}$.

4.4.1. LEMME. — Soit $X'_n, \dots, X'_j$; $X''_n, \dots, X''_j$ 2 suites régulières de $k[X_1, \dots, X_n]/I$ formées d'éléments de M_1 . Les 2 $k[X_1, \dots, X_n]/I$ -modules :

$$(I + (X'_n, \dots, X'_j) : M)/I + (X'_n, \dots, X'_j)$$

et

$$(I + (X''_n, \dots, X''_j) : M)/I + (X''_n, \dots, X''_j)$$

sont isomorphes.

Démonstration. — Puisque X'_j (resp. X''_j) est non diviseur de zéro dans

$$k[X_1, \dots, X_n]/I + (X'_n, \dots, X'_{j-1}) \text{ (resp. } k[X_1, \dots, X_n]/I + (X''_n, \dots, X''_{j-1})),$$

M n'est pas un idéal premier associé à $I + (X'_n, \dots, X'_{j-1})$, (resp. $I + (X''_n, \dots, X''_{j-1})$). Soit $Y \in M_1$, n'appartenant à aucun des idéaux premiers associés à $I + (X'_n, \dots, X'_{j-1})$ et à $I + (X''_n, \dots, X''_{j-1})$. Un tel Y existe à cause de 4.3. Alors $X'_n, \dots, X'_{j-1}, Y$; $X''_n, \dots, X''_{j-1}, Y$ sont 2 nouvelles suites régulières pour $k[X_1, \dots, X_n]/I$.

Nous allons voir que :

$$(I + (X'_n, \dots, X'_{j-1}, X'_j) : M)/I + (X'_n, \dots, X'_j)$$

$$\simeq (I + (X'_n, \dots, X'_{j-1}, Y) : M)/I + (X'_n, \dots, Y)$$

$$(I + (X''_n, \dots, X''_{j-1}, X''_j) : M)/I + (X''_n, \dots, X''_j)$$

$$\simeq (I + (X''_n, \dots, X''_{j-1}, Y) : M)/I + (X''_n, \dots, Y).$$

Il suffit de montrer la première assertion.

Soit $A' = k[X_1, \dots, X_n]/I + (X'_n, \dots, X'_{j-1})$, $M' = (X_1, \dots, X_n)A'$. Il s'agit de voir que $(X'_j : M')/X'_j \simeq (Y : M')/Y$ comme A' -module.

Soit T le localisé de A' en la partie multiplicative S des non diviseurs de zéro de A' ($T = \{\frac{a'}{b'} , a' \in A' , b' \in S \text{ modulo la relation d'équivalence } \frac{a'}{b'} \sim \frac{a''}{b''} \text{ } a'b'' - a''b' = 0 \}$). X'_j et Y appartiennent à S . Soit $\phi : T \rightarrow T$ l'application A' linéaire définie par $\phi(f) = \frac{X'_j}{Y} f$. A' est un sous-anneau de T et $\phi(Y : M') \subset (X'_j : M')$. D'autre part $\phi((Y)A') \subset (X'_j)A'$. ϕ induit donc une application A' -linéaire : $(Y : M')/Y \rightarrow (X'_j : M')/X'_j$. Mais $\psi : T \rightarrow T$ défini par $\psi(f) = \frac{Y}{X'_j} f$ induit une application A' -linéaire $(X'_j : M')/X'_j \rightarrow (Y : M')/Y$. Puisque $\psi \circ \phi = \text{Id} = \phi \circ \psi$, ces deux applications sont des isomorphismes.

Or d'après 3.4.2, $Y, X'_n, \dots, X'_{j-1}$ et $Y, X''_n, \dots, X''_{j-1}$ sont encore des suites régulières de $k[X_1, \dots, X_n]/I$. Raisonnant par récurrence sur la longueur des suites régulières données initialement, on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à $k[X_1, \dots, X_n]/I + (Y)$. On en déduit un isomorphisme de $k[X_1, \dots, X_n]/I + (Y)$ -modules entre

$$(I + (Y) + (X'_n, \dots, X'_{j-1}) : M)/I + (Y) + (X'_n, \dots, X'_{j-1})$$

et

$$(I + (Y) + (X''_n, \dots, X''_{j-1}) : M)/I + (Y) + (X''_n, \dots, X''_{j-1})$$

ce qui achève la démonstration.

4.5. PROPOSITION. — Soit k un corps infini et I un idéal homogène de $k[X_1, \dots, X_n]$ tel que $\dim V(I) = n - r$, $1 \leq r \leq n$. Soit $\theta : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_r]$ tel que $\theta(X_i) = X_i$, $1 \leq i \leq r$, $\theta(X_i) = 0$, $r + 1 \leq i \leq n$. Soit ${}^c I$ l'idéal engendré par $\theta(I)$ dans $k[X_1, \dots, X_n]$. Si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodés pour I , les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay.
- ii) $\forall s \in \mathbb{N}$, $\text{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/I_s = \text{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/{}^c I_s$.

Démonstration. — i) $\Rightarrow$ ii). D'après 4.4, $(X_n, \dots, X_{r+1})$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$ et d'après 3.4.1, $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est un $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -module libre. Plus précisément, nous avons montré que les

$$(cl X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \text{ mod } I)_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^{r-\exp \theta(I)}}$$

en formaient une base. (L'ordre sur $\mathbb{N}^n$ est l'ordre lexicographique inverse). On a donc :

$$k[X_1, \dots, X_n]_s/I_s = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{r-\exp \theta(I)} \\ |\alpha| \leq s}} k[X_{r+1}, \dots, X_n]_{s-|\alpha|} cl X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \text{ mod } I$$

de sorte que $\forall s \in \mathbb{N}$:

$$\text{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/I_s = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{r-\exp \theta(I)} \\ |\alpha| \leq s}} \binom{n-r+s-|\alpha|-1}{n-r-1}.$$

Mais $k[X_1, \dots, X_n]/^c I = k[X_1, \dots, X_r]/\theta(I)[X_{r+1}, \dots, X_n]$. $X_n, \dots, X_{r+1}$ est trivialement une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/^c I$. Comme $\theta(I) = \theta(^c I)$ les $(cl\ X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \bmod ^c I)_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^r - \exp \theta(I)}$ forment une base du $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -module $k[X_1, \dots, X_n]/^c I$. On a donc

$$k[X_1, \dots, X_n]_s/^c I_s = \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^r - \exp \theta(I) \\ |\alpha| \leq s}} k[X_{r+1}, \dots, X_n]_{s-|\alpha|} cl\ X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \bmod ^c I$$

et $\forall s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/^c I_s &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^r - \exp \theta(I) \\ |\alpha| \leq s}} \binom{n-r+s-|\alpha|-1}{n-r-1} \\ &= \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/I_s. \end{aligned}$$

ii) $\Rightarrow$ i) Nous aurons besoin de 2 lemmes préliminaires :

4.5.1. LEMME. — Sous les hypothèses de 4.5, si on munit $\mathbb{N}^n$ de l'ordre lexicographique inverse, $\exp \theta(I) = \exp I \cap (\mathbb{N}^r \times 0)$.

Démonstration. — Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \exp \theta(I)$. Il existe donc $f \in I$ homogène tel que $\theta(f) \neq 0$ et que $\theta(f) = cX_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} + \sum_{\beta < \alpha} c_\beta X_1^{\beta_1} \dots X_r^{\beta_r}$, $c, c_\beta \in k$, $c \neq 0$. Alors, il existe $\gamma \in \mathbb{N}^n$, tels que $(\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_n) \neq 0$ et $d_\gamma \in k$ tels que $f = \theta(f) + \sum_\gamma d_\gamma X_1^{\gamma_1} \dots X_n^{\gamma_n}$. Mais par définition de l'ordre lexicographique inverse pour un tel γ , $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) < (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$. Donc $\exp f = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ et $\exp \theta(I) \subset \exp I \cap (\mathbb{N}^r \times 0)$.

Si maintenant $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \exp I \cap \mathbb{N}^r \times 0$, il existe $f \in I$ homogène tel que

$$f = cX_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} + \sum_{\beta < (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)} c_\beta X_1^{\beta_1} \dots X_n^{\beta_n}, \quad c, c_\beta \in k, \quad c \neq 0.$$

Alors $\theta(f) \neq 0$ et si $(\beta_{r+1}, \dots, \beta_n) = 0$ et $c_\beta \neq 0$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) > (\beta_1, \dots, \beta_r)$ pour l'ordre lexicographique inverse sur $\mathbb{N}^r$. Donc $\exp \theta(f) = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

4.5.2. LEMME. — Sous les hypothèses de 4.5,

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/I_s \leq \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/^c I_s.$$

Démonstration. — Il résulte tout d'abord de 4.5.1 que :

$$\mathbb{N}^n - \exp I \subset \mathbb{N}^r - \exp \theta(I) \times \mathbb{N}^{n-r} = \mathbb{N}^n - \exp ^c I,$$

puisque $\exp I$ est un E -ensemble. L'inégalité est alors une conséquence immédiate du fait que (II.7.1)

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/I_s &= \#\{\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = s, \alpha \notin \exp I\} \\ \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/^c I_s &= \#\{\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = s, \alpha \notin \exp ^c I\}. \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que ii) $\Rightarrow$ i). Montrons d'abord que X_n est non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I$; $\forall s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, nous avons les suites exactes de $(k - ev)$:

$$k[X_1, \dots, X_n]_{s-1}/I_{s-1} \xrightarrow{X_n} k[X_1, \dots, X_n]_s/I_s \xrightarrow{\phi} k[X_1, \dots, X_n]_s/(I + X_n)_s \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]_{s-1}/{}^c I_{s-1} \xrightarrow{X_n} k[X_1, \dots, X_n]_s/{}^c I_s \longrightarrow \dots \\ \dots \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]_s/({}^c I + X_n)_s \rightarrow 0.$$

Soit $N_s = \ker \phi$. On a $\operatorname{rg}_k N_s \leq \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_{s-1}/I_{s-1} = H(s-1)$. D'autre part, soit $\theta' : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_{n-1}]$ tel que $\theta'(X_i) = X_i$, $i = 1 \dots n-1$, $\theta'(X_n) = 0$. $k[X_1, \dots, X_n]/I + X_n \simeq k[X_1, \dots, X_{n-1}]/\theta'(I)$; les variables $X_1, \dots, X_{n-1}$ sont commodes pour $\theta'(I)$ (II.5.7). Enfin $k[X_1, \dots, X_n]/{}^c I + X_n \simeq k[X_1, \dots, X_{n-1}]/{}^c \theta'(I)$. Le lemme 4.5.2 appliqué à $\theta'(I)$ nous dit que :

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/(I + X_n)_s \leq \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/({}^c I + X_n)_s.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}_k N_s &= \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/I_s - \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/(I + X_n)_s \geq \\ &\quad \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/{}^c I_s - \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/({}^c I + X_n)_s = \\ &\quad \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_{s-1}/{}^c I_{s-1} = \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_{s-1}/I_{s-1} = H(s-1) \\ &\geq \operatorname{rg}_k N_s. \end{aligned}$$

Les inégalités précédentes sont donc toutes des égalités. En particulier $\operatorname{rg}_k N_s = H(s-1)$ et la surjection canonique de $k[X_1, \dots, X_n]_{s-1}/I_{s-1}$ sur N_s est donc un isomorphisme, ce qui implique que X_n est non diviseur de zéro dans $k[X_1, \dots, X_n]/I$. Egalement $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/(I + X_n)_s = \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/({}^c I + X_n)_s$. $\theta'(I)$ satisfait donc la condition ii). Par hypothèse de récurrence sur le nombre des variables, on peut donc supposer que $k[X_1, \dots, X_{n-1}]/\theta'(I)$ est Cohen-Macaulay et (4.4) $X_{n-1}, \dots, X_{r+1}$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_{n-1}]/\theta'(I)$. $X_n, \dots, X_{r+1}$ est donc une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$.

4.6. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses de 4.1, si $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay et si $P(T) \in \mathbb{Q}[T]$ désigne le polynôme de Hilbert de $k[X_1, \dots, X_n]/I$,*

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/I_s = P(s) \quad \text{si} \quad s \geq d_1 + \dots + d_r - n + 1.$$

i.e. l'indice de régularité de $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est au plus $d_1 + \dots + d_r - n + 1$.

Si $r < n$ et si $\frac{d}{(n-r-1)!} T^{n-r-1}$ est le terme dominant de $P(T)$, $d \leq d_1 \dots d_r$.

Si $r = n$, $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/I \leq d_1 \dots d_n$.

Démonstration. — Quitte à effectuer un changement de variables linéaire, on peut supposer que les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodes pour I et d'après 4.5, $\forall s \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s/I_s = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^r - \exp \theta(I) \\ |\alpha| \leq s}} \binom{n-r+s-|\alpha|-1}{n-r-1}.$$

Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant commodes pour I , $\dim V(\theta(I)) = 0$ et $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_r]/\theta(I) = \sharp \mathbb{N}^r - \exp \theta(I) < +\infty$. On a $\theta(I) = (\theta(f_1), \dots, \theta(f_s))$.

Ou bien $\theta(f_i) = 0$, ou bien $\theta(f_i)$ est homogène de degré d_i . Appliquant 4.1 à $\theta(I)$, on détermine $g_1, \dots, g_r$ une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_r]$ formée de polynômes homogènes telle que $J = (g_1, \dots, g_r) \subset \theta(I)$ et si $\delta_i = \deg g_i$, $\delta_1, \dots, \delta_r$ est la suite des degrés des r premiers termes non nuls de la suite $\theta(f_1), \dots, \theta(f_s)$. En particulier $\delta_i \leq d_i$, $i = 1 \dots r$. Il résulte alors de 3.2 que si $|\alpha| \geq d_1 + \dots + d_r - r + 1 \geq \delta_1 + \dots + \delta_r - r + 1$, $X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \in J \subset \theta(I)$ et que

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_r]/\theta(I) \leq \operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_r]/J = \delta_1 \dots \delta_r \leq d_1 \dots d_r.$$

En particulier, $\sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \leq d_1 \dots d_r$ et si $\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$, $|\alpha| \leq d_1 + \dots + d_r - r$.

Si donc $s \geq d_1 + \dots + d_r - r$, $\forall \alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$, $s \geq |\alpha|$ et

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)} \binom{n - r + |s| - \alpha - 1}{n - r - 1}.$$

Comme en 3.2, soit $R(T) = \frac{(n - r - 1 + T) \dots (1 + T)}{(n - r - 1)!}$; alors

$$P(T) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)} R(T - |\alpha|).$$

Le terme dominant de $P(T)$ est alors $\sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \frac{T^{n-r-1}}{(n-r-1)!}$ si $r < n$.

Considérons maintenant s , $d_1 + \dots + d_r - n + 1 \leq s < d_1 + \dots + d_r - r$ (un tel s n'existe que si $n > r + 1$).

On a d'une part $P(s) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)} R(s - |\alpha|)$ et d'autre part :

$$\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I) \\ |\alpha| \leq s}} R(s - |\alpha|).$$

Il suffit donc de constater que si $\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$, $s < |\alpha|$ et $d_1 + \dots + d_r - n + 1 \leq s < d_1 + \dots + d_r - r$, $R(s - |\alpha|) = 0$. Or R de degré $n - r - 1$ admet comme racines $-1, -2, \dots, -(n - r - 1)$, et si $\alpha \in \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$, nous avons vu que $|\alpha| \leq d_1 + \dots + d_r - r$. Au total nous avons donc :

$$d_1 + \dots + d_r - n + 1 \leq s < |\alpha| \leq d_1 + \dots + d_r - r.$$

Ainsi $s - |\alpha|$ ne peut varier que de -1 à $d_1 + \dots + d_r - n + 1 - (d_1 + \dots + d_r - r) = -(n - r - 1)$.

Dans le cas $n = r + 1$, $P(T) = \sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$. On a bien $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]_s / I_s = \sharp \mathbf{N}^r - \exp \theta(I)$ si $s \geq d_1 + \dots + d_r - r = d_1 + \dots + d_r - n + 1$.

Dans le cas $r = n$, $\theta(I) = I$, $P(T) = 0$; on a vu que si $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| \geq d_1 + \dots + d_n - n + 1$, $X^\alpha \in I$ et que $\operatorname{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/I \leq d_1 \dots d_n$.

4.6.1. REMARQUE. — Les hypothèses et notations étant celles de 4.6, si $f_1, \dots, f_s$ est un système de générateurs minimal de I , $\theta(f_i) \neq 0$, $i = 1 \dots s$.

Démonstration. — Supposons qu'il existe i , $1 \leq i \leq s$ tel que $\theta(f_i) = 0$. Alors il existe $f'_{r+1}, \dots, f'_n \in k[X_1, \dots, X_n]$ homogènes de degré $d_i - 1$ tels que $f_i = X_{r+1}f'_{r+1} + \dots + X_nf'_n$. Mais $k[X_1, \dots, X_n]/I$ étant un $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -module libre, $f'_{r+1}, \dots, f'_n \in I$. Puisque $d_1 \geq \dots \geq d_s$ on a donc $f'_j \in (f_{i+1}, \dots, f_s)$, $j = r+1, \dots, n$ et $f_i \in (f_{i+1}, \dots, f_s)$ contrairement à l'hypothèse.

4.7. REMARQUE. — Sous les hypothèses de 4.1, si $r = n$ et si $\text{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/I = d_1 \dots d_n$ ou si $r < n$ et si $\frac{d_1 \dots d_r}{(n-r-1)!} T^{n-r-1}$ est le terme dominant du polynôme de Hilbert de $k[X_1, \dots, X_n]/I$, alors il existe $g_1, \dots, g_r$ des polynômes homogènes de $k[X_1, \dots, X_n]$ tels que $\deg g_i = d_i$, $i = 1, \dots, r$, et $I = (g_1, \dots, g_r)$.

Démonstration. — Supposons d'abord $r = n$. Soit $g_1, \dots, g_n$ des polynômes vérifiant les conditions 1), 2), 3) de 4.1. Puisque $J = (g_1, \dots, g_n) \subset I$,

$$k[X_1, \dots, X_n]/J \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I$$

est surjectif. Or d'après 3.2, $\text{rg}_k k[X_1, \dots, X_n]/J = d_1 \dots d_n$. Donc $J = I$. Si maintenant $r < n$, considérons encore $g_1, \dots, g_r$ des polynômes vérifiant 1), 2), 3) de 4.1 et soit $J = (g_1, \dots, g_r)$. En effectuant au besoin un changement de variables linéaire, on peut supposer que les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodés pour J . D'après II.6.5.0, elles seront également commodés pour I .

Montrons d'abord que $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay. Munissons $\mathbb{N}^n$ de l'ordre lexicographique inverse. D'après II.7.1, nous pouvons calculer le polynôme de Hilbert $P(T)$ de $k[X_1, \dots, X_n]/I$ à partir de $\exp I$ et d'après II.5.5 et un calcul fait dans la démonstration de II.7.4, si $p : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^r$ désigne la projection de $\mathbb{N}^n$ sur les r premiers facteurs $\frac{\#\mathbb{N}^r - p(\exp I)}{(n-r-1)!} T^{n-r-1}$ est le terme dominant de $P(T)$. Soit θ comme en 4.5. De 4.5.1, il résulte que $\mathbb{N}^r - p(\exp I) \subset \mathbb{N}^r - \exp \theta(I)$. Par ailleurs $\theta(J) \subset \theta(I)$ et $\mathbb{N}^r - \exp \theta(I) \subset \mathbb{N}^r - \exp \theta(J)$. Mais $g_1, \dots, g_r$ étant une suite régulière vérifie les hypothèses de 3.1. De plus, les variables $X_1, \dots, X_n$ étant commodés pour J , $\#\mathbb{N}^r - \exp \theta(J) = d_1 \dots d_r$. (3.4). D'où

$$d_1 \dots d_r = \#\mathbb{N}^r - p(\exp I) \leq \#\mathbb{N}^r - \exp \theta(I) \leq \#\mathbb{N}^r - \exp \theta(J) = d_1 \dots d_r.$$

On en déduit : $\mathbb{N}^r - p(\exp I) = \mathbb{N}^r - \exp \theta(I) = \mathbb{N}^r - \exp \theta(J)$. La première égalité entraîne que $\exp I = \exp \theta(I) \times \mathbb{N}^{n-r} = \exp^c I$ où $^c I$ est l'idéal engendré par $\theta(I)$ dans $k[X_1, \dots, X_n]$. D'après II.7.1, la condition ii) de 4.5 est donc satisfaite et $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay (4.5). Les variables $X_1, \dots, X_n$ étant commodés pour I , $X_n, \dots, X_{r+1}$ est une suite régulière de $k[X_1, \dots, X_n]/I$ (4.4) et $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est un $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -module libre de type fini (3.4.1). Plus précisément, $(cl X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \text{ mod } I)_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^r - \exp \theta(I)}$ est une base de ce module.

Mais $k[X_1, \dots, X_n]/J$ est également un $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -module libre de type fini dont les $(cl X_1^{\alpha_1} \dots X_r^{\alpha_r} \text{ mod } J)_{\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}^r - \exp \theta(J)}$ forment une base (3.4, 3.4.1). La surjection canonique $k[X_1, \dots, X_n]/J \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]/I$ envoyant une base du 1^{er} $k[X_{r+1}, \dots, X_n]$ -module sur le 2^e est donc aussi injective et $J = I$.

4.8. PROPOSITION. — *Les hypothèses et notations étant celles de 4.1, si $k[X_1, \dots, X_n]/I$ est Cohen-Macaulay, si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont commodes pour I et si $f'_1, \dots, f'_t$ est une base standard de cardinal minimal I pour l'ordre lexicographique inverse $\deg f'_i \leq d_1 + \dots + d_r - r + 1$, $i = 1 \dots t$.*

Démonstration. — Elle est identique à celle de 3.5.

4.8.1. PROPOSITION. — *Les hypothèses et notations étant celles de 4.1 et si $r = n$, si $f'_1, \dots, f'_t$ est une base standard de cardinal minimal pour un ordre total sur $\mathbf{N}^n$ vérifiant I.1.1, $\deg f'_i \leq d_1 + \dots + d_n - n + 1$, $i = 1 \dots t$.*

Démonstration. — Soit J comme dans 4.1; si $|\alpha| \geq d_1 + \dots + d_n - n + 1$, $X^\alpha \in J \subset I$. La démonstration est ensuite identique à celle de 3.5.1.