COURS DE L'INSTITUT FOURIER

ARMAND BRUMER

III- Réduction des courbes elliptiques. Applications

Cours de l'institut Fourier, tome 10 (1975), p. 114-138

<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1975__10__A4_0>

III - réduction des courbes elliptiques. applications

1. *MAUVAISE REDUCTION D'UNE COURBE ELLIPTIQUE.*

1.1. REDUCTION ADDITIVE OU MULTIPLICATIVE.

1.1.1. Soient K un corps quelconque, E une cubique plane définie sur K, d'équation affine $F(x,y) = 0$ où

$$F(x,y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6 \quad (a_i \in K).$$

Le discriminant Δ de la cubique E a été défini en (I.1.1.2) ; il appartient à $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots, a_6]$.

Si Δ est non nul, la cubique est non singulière, autrement dit c'est une courbe elliptique. Dans le cas contraire, la cubique est dite singulière ou dégénérée.

PROPOSITION. Une cubique singulière a un seul point singulier. De plus, si K est parfait, ou de caractéristique différente de 2 et 3 , ce point singulier est rationnel sur K .

■ S'il y avait 2 points singuliers, l'intersection de la droite les joignant et de la cubique serait d'ordre au moins égal à 4 : c'est impossible, donc il y a un seul point singulier ; à cause de son unicité, il est invariant par tout K-automorphisme, donc purement inséparable sur K . Si K est parfait, cela prouve la proposition. Si la caractéristique de K est différente de 2 ou 3 , on peut prendre l'équation de E sous la forme de Weierstrass $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ (g_2 et $g_3 \in K$) ; le point singulier

vérifie de plus : $y = 0$, $12x^2 - g_2 = 0$, ce qui donne : $x = -3g_3/2g_2$, $y = 0$; ce point est bien rationnel sur K . ■

1.1.2. Supposons, pour simplifier les démonstrations, que la caractéristique de K est impaire. Soit E une cubique dégénérée dont le point singulier est rationnel sur K . Prenons ce point pour origine (dans le plan !) ; alors $F(0,0) = F'_x(0,0) = F'_y(0,0) = 0$, c'est-à-dire $a_6 = a_4 = a_3 = 0$, et l'équation de E devient : $y^2 + a_1xy = x^3 + a_2x^2$.

Les tangentes à l'origine ont pour équation $y = \lambda x$, où λ est racine du trinôme $X^2 + a_1X - a_2$, dont le discriminant est $b_2 = a_1^2 + 4a_2$.

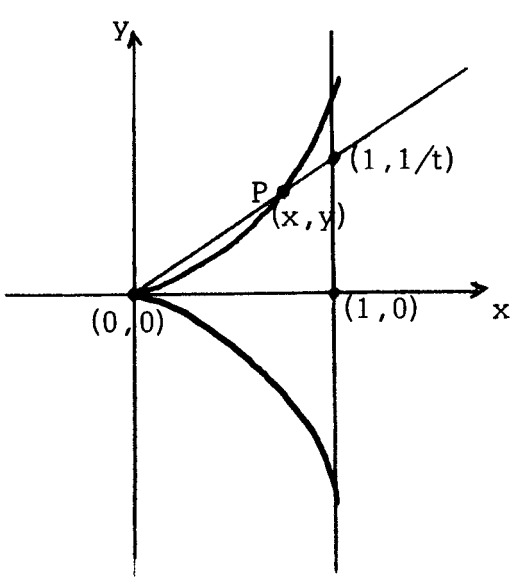
On sait que l'ensemble $E_{(0)}(K)$ des points non singuliers de $E(K)$ forme un groupe abélien dont la loi peut être définie géométriquement par : $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ si et seulement si P_1, P_2, P_3 sont alignés sur $E_{(0)}(K)$. (cf.[11] ,5.6).

Nous allons voir que $E_{(0)}(K)$ est isomorphe au groupe additif K^+ , ou au groupe multiplicatif K^* , ou encore au groupe multiplicatif des éléments de norme 1 dans une extension quadratique de K .

1.1.3. Réduction additive.

PROPOSITION. Si $b_2 = 0$, alors $E_{(0)}(K) \simeq K^+$.

■ Lorsque $b_2 = 0$, la cubique a une tangente double à l'origine ; on peut supposer que cette tangente est la droite $y = 0$, et que la courbe a pour équation : $y^2 = x^3$.



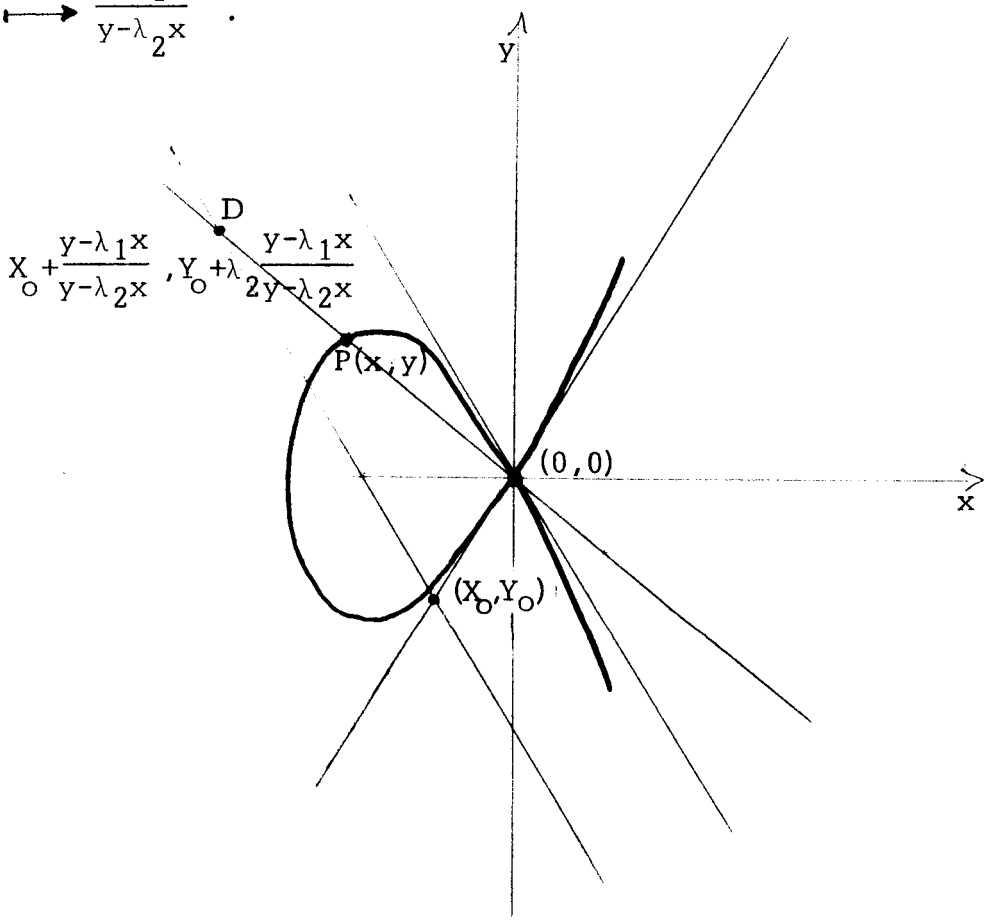
La projection centrale de centre $(0,0)$ sur la droite $x = 1$ permet de définir une bijection entre $E_{(0)}(K)$ et K , par : $(x,y) \longmapsto t = x/y$ (cela revient à paramétrer la cubique par t : $x = t^{-2}$, $y = t^{-3}$). Un calcul facile montre qu'alors, si 3 points P_i $(i = 1,2,3)$ non singuliers sont

alignés sur la courbe, leurs paramètres t_i vérifient : $t_1+t_2+t_3 = 0$.
La bijection définie ci-dessus est donc un isomorphisme de groupes. ■

1.1.4. Réduction multiplicative.

PROPOSITION . Si $b_2 \neq 0$, et si $b_2 \in (K^*)^2$, alors $E_{(0)}(K) \simeq K^*$;
Si $b_2 \neq 0$, et si $b_2 \notin (K^*)^2$, alors $E_{(0)}(K) \simeq \{t \in K(\sqrt{b_2})/N_{K(\sqrt{b_2})/K}(t) = 1\}$

■ Lorsque $b_2 \neq 0$, la cubique a 2 tangentes distinctes à l'origine, de pente λ_1 et λ_2 . Si $b_2 \in (K^*)^2$, elles sont rationnelles sur K , et la projection de centre $(0,0)$ sur la droite $y = \lambda_2 x - \lambda_1 + \lambda_2$ permet de définir une bijection entre $E_{(0)}(K)$ et l'ensemble $K^* = K - \{0\}$, par :
$(x,y) \longmapsto \dfrac{y-\lambda_1 x}{y-\lambda_2 x}$.



Le calcul montre que cette bijection est un isomorphisme de groupes.
Enfin, si $b_2 \notin (K^*)^2$, les deux tangentes à l'origine sont irrationnelles sur K ; elles sont conjuguées sur K , et l'application $(x,y) \longmapsto \dfrac{y-\lambda_1 x}{y-\lambda_2 x}$

définit un isomorphisme entre $E_{(0)}(K)$ et le groupe multiplicatif des éléments de norme 1 dans $K(\sqrt{b_2})/K$: montrons la surjectivité de cette application : soient θ un élément de $K(\sqrt{b_2})$ de norme 1 , et σ le générateur de $Gal(K(\sqrt{b_2})/K)$; d'après le "théorème 90" de Hilbert, il existe un élément α dans $K(\sqrt{b_2})$ tel que $\theta = \alpha^{\sigma}/\alpha$; comme $K(\sqrt{b_2}) = K(\lambda_2)$, et $\lambda_2^{\sigma} = \lambda_1$, on peut écrire $\alpha = y - \lambda_2 x$ et $\theta = \frac{y-\lambda_1 x}{y-\lambda_2 x}$ avec x,y dans K . ∎

1.1.5. Application : Soit K un corps local de caractéristique résiduelle non nulle (éventuellement égale à 2), et d'idéal maximal $\mathfrak{P}$. Soit E une courbe elliptique sur K , définie par une équation minimale, et ayant mauvaise réduction modulo $\mathfrak{P}$ (i.e. $\Delta \equiv 0 \bmod.\mathfrak{P}$). Notons par un tilde la réduction modulo $\mathfrak{P}$.

Rappelons que le symbole quadratique $(\frac{d}{\mathfrak{P}})$, défini pour tout élément entier d d'un corps local K de caractéristique résiduelle non nulle et d'idéal maximal $\mathfrak{P}$, vaut 0 (resp. +1,-1) si l'extension $K(\sqrt{d})/K$ est totalement ramifiée (resp. est triviale, est non ramifiée). De plus, si la caractéristique résiduelle de K est impaire, on montre que $(\frac{d}{\mathfrak{P}})$ vaut 0 (resp. +1,-1) si la réduction $\tilde{d}$ de d est nulle (resp. est un carré, n'est pas un carré) dans $\tilde{K}$.

Remarquons que, si l'on change l'équation de E , alors c_6 est remplacé par $c'_6 = u^6 c_6$, où u est un élément algébrique sur K . Si ces deux équations sont minimales, alors u est une unité et $(\frac{-c_6}{\mathfrak{P}}) = (\frac{-c'_6}{\mathfrak{P}})$. Nous pouvons maintenant énoncer :

PROPOSITION . Soit K un corps local de caractéristique résiduelle non nulle et d'idéal maximal $\mathfrak{P}$. Soit E une courbe elliptique sur K , et soit c_6 l'"invariant" de E défini ci-dessus. Supposons que la réduction de E modulo $\mathfrak{P}$ est mauvaise. Elle est alors de type :

(i) additif si $(\frac{-c_6}{\mathfrak{P}}) = 0$;

(ii) multiplicatif à tangentes rationnelles si $(\frac{-c_6}{\mathfrak{P}}) = +1$;

(iii) multiplicatif à tangentes irrationnelles si $(\frac{-c_6}{\mathfrak{P}}) = -1$.

■ Lorsque la caractéristique résiduelle de K est impaire, on utilise ce qui précède : le changement de variable effectué en (1.1.2) donne : $\tilde{a}_6 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_4 = 0$, et $\tilde{c}_6 = -\tilde{b}_2^3$; ensuite, les propositions (1.1.3) et (1.1.4) donnent le type de la réduction de E en fonction de $-\tilde{c}_6$, et en fait en fonction de $(\frac{-c_6}{\wp})$.

Lorsque la caractéristique résiduelle de K est égale à 2 , une étude analogue démontre la proposition. ■

1.1.6. Définitions. Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$. Son <u>conducteur</u> (<u>algébrique</u>) est défini par : $N = \prod_{p|\Delta} p^{f_p}$, où Δ est le discriminant d'une équation minimale pour E , où $f_p = 1$ si la réduction en p est multiplicative, $f_p = 2$ (resp. $f_p \geq 2$) si la réduction en p est additive et $p \geq 5$ (resp. $p = 2$ ou 3) ; lorsque $p = 2$ ou 3 , $f_p - 2$ mesure la "ramification sauvage" (cf.[25]). On dit que E est <u>semi-stable</u> si N n'a pas de facteur carré, c'est-à-dire si les mauvaises réductions de E sont toutes de type multiplicatif.

1.2. <u>COURBES DE TATE ET REDUCTION MULTIPLICATIVE</u>.

Soient K un corps local, $\mathcal{O}$, $\wp$ comme précédemment ; soient U le groupe des unités de $\mathcal{O}$, et v la valuation de K normalisée par $v(K^*) = \mathbb{Z}$.

1.2.1. *PROPOSITION* . <u>Toute courbe de Tate sur</u> K <u>est à réduction multiplicative à tangentes rationnelles</u>.

■ Nous avons vu (I.3.3) que, pour tout $q \in \wp$, la courbe $E(q)$ d'équation $Y^2 - XY = X^3 - h_2X - h_3$, où h_2 et h_3 sont définis par des séries entières en q à coefficients entiers rationnels sans termes constants, est une courbe elliptique sur K . Sa réduction modulo $\wp$ est la courbe $\tilde{E}(q)$ d'équation $Y^2 - XY = X^3$: c'est une cubique dégénérée, dont les tangentes au point double sont distinctes et rationnelles sur K (I.3.3.3). ■

1.2.2. *PROPOSITION* . Si E est une courbe elliptique sur K à réduction multiplicative à tangentes irrationnelles, l'extension quadratique $K(\sqrt{b_2})/K$ est non ramifiée.

■ Puisque $\tilde{b}_2$ est le discriminant du trinôme dont les racines sont les pentes des tangentes au point double de $\tilde{E}$ (cf. 1.1.2), les tangentes sont rationnelles sur $\widetilde{K(\sqrt{b_2})}$. Cela prouve, d'après la proposition (1.1.5), que $-\tilde{c}_6$ n'est pas un carré dans $\tilde{K}$ mais en est un dans $\widetilde{K(\sqrt{b_2})}$, autrement dit que $[\widetilde{K(\sqrt{b_2})} : \tilde{K}] = 2$. D'autre part, $K(\sqrt{b_2})$ est le corps de décomposition (sur K) du trinôme $X^2 + a_1X - a_2$, dont les racines sont distinctes. Ainsi, $K(\sqrt{b_2})/K$ est séparable, et l'extension est non ramifiée. ■

1.2.3. *THEOREME*. Soit E une courbe elliptique sur K à réduction multiplicative. Si la réduction de E est à tangentes rationnelles (sur K) , alors E est une courbe de Tate sur K ; sinon, E est une courbe de Tate sur une extension quadratique non ramifiée de K .

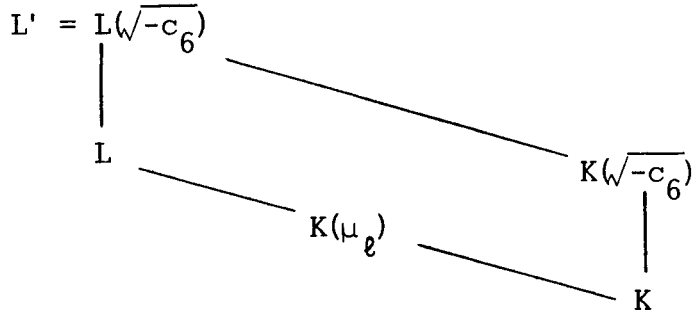
■ L'invariant j de E est tel que $v(j) < 0$: en effet, $v(\Delta) > 0$ car la réduction est mauvaise, $v(c_6) = 0$ car elle est multiplicative (proposition 1.1.5), et $j = \frac{\Delta + c_6^2}{\Delta}$. Donc il existe un unique $q \in \wp$ tel que $j = j(q) = \frac{1}{q} + \sum_{n \geq 0} c(n)q^n$ (cf. I.3.3.1) ; mais alors E et E(q) sont $\overline{K}$-isomorphes.

Supposons d'abord que $\tilde{E}$ est à tangentes rationnelles (sur $\tilde{K}$) . Notons c_4 et c_6 (resp. c'_4 et c'_6) les invariants de E (resp. de E(q)) définis en (I.1.1.2). Montrons que E et E(q) sont, en fait, isomorphes sur $K(\sqrt{-c_6})$: il existe un élément u de $\overline{K}^*$ tel que $c'_4 = u^4 c_4$ et $c'_6 = u^6 c_6$; or $\tilde{c}_6$ et $\tilde{c}'_6$ sont non nuls puisque la réduction est multiplicative ; donc u est une unité de $\overline{K}^*$, et $u^2 = \frac{c_6}{c'_6} \times \frac{c'_4}{c_4}$ est dans K : ainsi, $K(u) = K(u^3) = K(\sqrt{\frac{c_6}{c'_6}})$. Or $-c'_6 = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} n^5 \frac{q^n}{1-q^n}$ est un carré : c'est clair si la caractéristique résiduelle est impaire ; si elle

est égale à 2 , on utilise la formule : $(U^{(2e)})^2 = U^{(3e)}$ (où e désigne l'indice de ramification de K sur $\mathbb{Q}_2$, et où $U^{(n)} = 1+\mathfrak{p}^n$ (cf.[17] .2.3)), et le fait que 8 divise 504. Donc $K(u) = K(\sqrt{-c_6})$, et il existe un isomorphisme θ de E sur E(q) défini sur $K(\sqrt{-c_6})$.

D'autre part, d'après (1.1.5), $-\tilde{c}_6$ est un carré dans $\tilde{K}$, donc $\widetilde{K(\sqrt{-c_6})} = \tilde{K}$. Nous allons montrer , en suivant Ogg ([25] ,II), que l'extension $K(\sqrt{-c_6})/K$ est non ramifiée ; cela prouvera que $K(\sqrt{-c_6}) = K$, et que E et E(q) sont K-isomorphes.

Soit ℓ un nombre premier impair différent de p ; notons L l'extension $K(E(q)_\ell)$, et $L' = L(\sqrt{-c_6})$. Nous savons que $L = K(\mu_\ell, q^{1/\ell})$; l'extension $K(\mu_\ell)/K$ est non ramifiée, donc l'indice de ramification de L/K est celui de $K(\mu_\ell, q^{1/\ell})/K(\mu_\ell)$: il est impair (il vaut 1 ou ℓ)



Supposons L' différent de L , et notons σ l'automorphisme non trivial de L' sur L ; le composé $\theta^{-1} \circ \theta^{\sigma}$ est un automorphisme non trivial de E ; nous avons remarqué que j est non entier, en particulier $j \neq 0$, 1728, donc $\mathrm{Aut}(E) = \pm 1$ et $\theta^{-1} \circ \theta^{\sigma} = -1$. Soit P un point de E(q)(L') , et $\theta(P)$ son image dans E(L') ; alors $\theta(P) \in E(L)$ si et seulement si $\theta(P)^{\sigma} = \theta(P)$, c'est-à-dire $\theta^{\sigma}(P^{\sigma}) = \theta(P)$, ou encore : $P^{\sigma} = -P$. Appliquons ceci à un point P d'ordre ℓ de E(q) : alors $P \in E(q)(L)$, donc $P^{\sigma} = +P \neq -P$, et $\theta(P) \notin E(L)$. Ainsi, le groupe $E(L)_\ell = \theta(E(q)(L)_\ell)$ est réduit à 0 . Or, $\widetilde{E(L)}$ est isomorphe à $\tilde{L}^*$, qui contient μ_ℓ . Ainsi, L' est égal à L , donc $K(\sqrt{-c_6})$ est contenu dans L et l'extension $K(\sqrt{-c_6})/K$ est non ramifiée. Ceci termine la démonstration de la première assertion.

Pour la seconde assertion, lorsque $\tilde{E}$ est à tangentes irrationnelles

sur $\tilde{K}$, remplaçons K par $K(\sqrt{b_2})$ dans ce qui précède : cela prouve que E et E(q) sont $K(\sqrt{b_2})$-isomorphes ; et la proposition (1.2.3) prouve que $K(\sqrt{b_2})/K$ est non ramifiée. ∎

1.3. GROUPE FORMEL ASSOCIE A UNE CUBIQUE PLANE.

On trouvera dans [10] tous les résultats utilisés ici sur les groupes formels.

1.3.1. Soit E une cubique plane définie sur un corps quelconque K et d'équation (1) : $y^2+a_1xy+a_3y = x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$; et posons $z = -\frac{x}{y}$, $w = -\frac{1}{y}$, c'est-à-dire $x = \frac{z}{w}$, $y = -\frac{1}{w}$. Par ce changement de variables, le point à l'infini est amené en (0,0) , et comme l'ordre de $\frac{x}{y}$ à l'infini est égal à $(-2)-(-3) = 1$, la variable z est une uniformisante locale pour la cubique au voisinage de l'origine $(z,w) = (0,0)$.

L'équation devient (2) : $w = z^3+a_1zw+a_2z^2w + a_3w^2 + a_4zw^2 + a_6w^3$ et permet de calculer le développement de w en série entière de z au voisinage de l'origine : $w = z^3 + a_1z^4 + (a_1^2 + a_2)z^5 + \ldots = \sum_{n\geq 3} A_n z^n$ où $A_n \in \mathbb{Z}[a_i]$, A_n étant de "poids" n-3 (comme a_i était de "poids" i). Donc $w \in \mathbb{Z}[a_i][[z]]$, $x \in z^{-2}(\mathbb{Z}[a_i][[z]])$, $y \in z^{-3}(\mathbb{Z}[a_i][[z]])$.

Nous venons ainsi de définir, pour toute extension L de K , une application : $P \longmapsto z(P) = \frac{-x(P)}{y(P)}$ de E(L) dans L . Cette application admet une application réciproque définie sur l'ensemble des éléments z de L tels que la série $w(z) = \sum_{n\geq 3} A_n z^n$ converge, à savoir : $z \longmapsto P(z) = (x(z),y(z))$ où $x(z) = z/w(z)$, $y(z) = -1/w(z)$.

1.3.2. Addition sur E :

PROPOSITION . Il existe une série formelle $F \in \mathbb{Z}[a_i][[Z_1,Z_2]]$ telle que $z(P_1+P_2) = F(z(P_1)+z(P_2))$ pour tous points P_1 et P_2 de E .

■ Soient 3 points P_1, P_2, P_3 non singuliers alignés sur E , c'est-à-dire tels que $P_1+P_2+P_3 = 0$. Notons (z_i, w_i) les coordonnées de P_i $(i = 1,2,3)$, et calculons formellement z_3 en fonction de z_1 et z_2 .

Le point P_3 est le 3e point d'intersection de la droite P_1P_2 et de la cubique ; l'équation de la cubique est donnée par (2) , celle de P_1P_2 est de la forme : $w = \lambda z + \nu$, où $\lambda = \dfrac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} = \sum_{n\geq 3} A_n \dfrac{z_2^n - z_1^n}{z_2 - z_1}$

et $\nu = w_1 - \lambda z_1 = \sum_{n\geq 3} A_n (z_1^n - z_1 \dfrac{z_2^n - z_1^n}{z_2 - z_1}) = \sum_{n\geq 3} A_n z_1 z_2 \dfrac{z_2^{n-1} - z_1^{n-1}}{z_2 - z_1}$. En remplaçant w par $\lambda z + \nu$ dans (2) , on obtient une équation du 3e degré en z , dont les racines sont les z_i $(i = 1,2,3)$, et la "trace" donne :

$$z_1 + z_2 + z_3 = - \frac{a_1\lambda + a_2\nu + a_3\lambda^2 + 2a_4\lambda\nu + 3a_6\lambda^2\nu}{1 + a_2\lambda + a_4\lambda^2 + a_6\lambda^3}$$

où λ et ν sont dans $\mathbb{Z}[a_i][[z_1, z_2]]$, de degré total en z_1 et z_2 : deg $\lambda \geq 2$, deg $\nu \geq 3$. Le dénominateur de cette fraction est congru à 1 modulo (z_1, z_2) , donc il est inversible dans $\mathbb{Z}[a_i][[z_1, z_2]]$, d'où la proposition. ■

Remarque : Les propriétés de l'addition sur E font de F une loi de groupe formel à un paramètre.

1.3.3. A la multiplication par n dans E (n entier ≥ 1) correspond la série formelle $\psi_n(Z) \in \mathbb{Z}[a_i][[Z]]$, définie par récurrence : $\psi_1(Z) = Z$, $\psi_{n+1}(Z) = F(Z, \psi_n(Z))$. On a : $\psi_n(z(P)) = z(nP)$.

Rappelons (cf.[10] ,I.3) que, si K est de caractéristique $p > 0$, il existe un entier $h \geq 1$ tel que $\psi_p(Z) \in \mathbb{F}_p[a_i][[Z^{p^h}]]$. Le plus grand entier h , s'il existe, pour lequel ceci est vérifié est appelé la hauteur du groupe formel F . Si $\psi_p(Z) = 0$, on dit que la hauteur de F est infinie. La valeur de h dépend du type de la courbe E .

PROPOSITION . Si E est une cubique plane définie sur un corps K de caractéristique $p > 0$, et si h désigne la hauteur du groupe formel F , on a le résultat suivant :

si E est une courbe elliptique non supersingulière, $h = 1$;
si E est une courbe elliptique supersingulière, $h = 2$;
si E est une cubique dégénérée de type multiplicatif, $h = 1$;
si E est une cubique dégénérée de type additif, $h = \infty$.

■ Lorsque E est à mauvaise réduction de type additif, $\tilde{E}_o(\tilde{K}) \simeq \tilde{K}^+$ et la multiplication par p dans $\tilde{E}_o(\tilde{K})$ correspond à la multiplication par p dans $\tilde{K}$, c'est-à-dire à l'application nulle : $h = \infty$. Lorsque E est à mauvaise réduction de type multiplicatif, la multiplication par p dans $\tilde{E}_o(\tilde{K})$ correspond à $x \longmapsto x^p$ dans le groupe multiplicatif correspondant ($\tilde{K}^*$ ou un groupe de normes), et $\psi_p(Z) = Z^p$ est de hauteur 1 . Lorsque E est à bonne réduction, p^h est l'ordre du noyau de la multiplication par p , considérée comme isogénie de E , c'est-à-dire le degré d'inséparabilité de la multiplication par p (cf. II,5 .5). ■

Exemple : On calcule facilement $\psi_2(z) = 2z - a_1 z^2 - 2a_2 z^3 + \ldots$. Ainsi, si $p = 2$ et si E n'est pas dégénérée, on voit que E est supersingulière si et seulement si a_1 est nul.

2. *STRUCTURE DU GROUPE E(K)* .

2.1. CAS COMPLEXE ET CAS REEL.

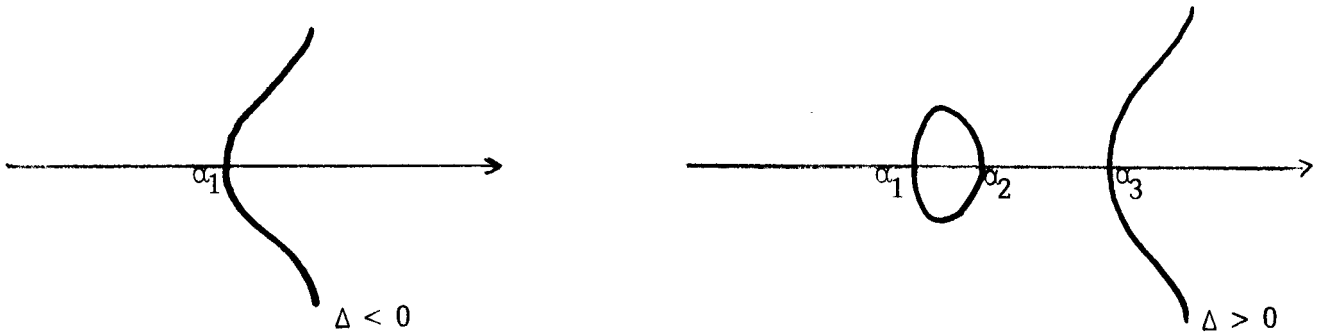
2.1.1. Nous avons vu (I.2.2.5) que $E(\mathbb{C})$ est un tore complexe $\mathbb{C}/L$, donc le groupe $E(\mathbb{C})$ est isomorphe à $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$.

2.1.2. Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{R}$ par une équation

de Weierstrass : $y^2 = f(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$. Soit Δ le discriminant de E , c'est-à-dire, à un coefficient près, le discriminant du polynôme cubique f (cf. I.1.1.3).

Si $\Delta < 0$, f a une racine réelle ; dans ce cas, $E(\mathbf{R})$ est connexe et isomorphe à $\mathbf{R}/\mathbb{Z}$.

Si $\Delta > 0$, f a trois racines réelles, $E(\mathbf{R})$ a deux composantes connexes et est isomorphe à $\mathbf{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.



2.2. <u>CAS LOCAL</u> ([47] ,6) .

Soient K un corps local de caractéristique résiduelle p ; v , $\mathcal{O}$, $\mathcal{P}$, U , comme ci-dessus ; E une courbe elliptique sur K , définie par une équation minimale de la forme $F(x,y) = 0$, où $F(x,y) = y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6$.

2.2.1. La réduction $E(K) \longrightarrow \tilde{E}(\tilde{K})$ n'est pas surjective en général, mais si on note $\tilde{E}_{ns}(\tilde{K})$ le groupe des points non singuliers de $\tilde{E}(\tilde{K})$, et $E_{(0)}(K)$ son image réciproque par la réduction, on a le résultat suivant :

PROPOSITION . <u>La réduction</u> $E_{(0)}(K) \longrightarrow \tilde{E}_{ns}(\tilde{K})$ <u>est surjective</u>.

■ Soit $(\tilde{r},\tilde{t}) \in \tilde{E}_{ns}(\tilde{K})$, c'est-à-dire : soient r,t des éléments de $\overline{K}$ entiers sur $\mathcal{O}$ tels que $F(r,t) \in \mathcal{P}$, $F'_x(r,t)$ ou $F'_y(r,t) \in U$ (par exemple $F'_y(r,t) \in U$) . Il suffit de montrer qu'il existe $t' \in \overline{K}$ tel que $\tilde{t} = \tilde{t}'$ et $F(r,t') = 0$: c'est le lemme de Hensel (cf.[17] ,II.2). ■

2.2.2. Notons $E_{(1)}(K)$ le noyau de cette réduction, c'est-à-dire $E_{(1)}(K) = \{(x,y) \in E(K)/v(x) \leq -1 \text{ et } v(y) \leq -1\}$.

Remarquons que x et y sont liés par l'équation de E : $y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$, où les $a_i \in \mathcal{O}$; donc $v(x) < 0$ équivaut à $v(y) < 0$, et alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que $v(x) = -2n$, $v(y) = -3n$. Notons, pour tout entier $n \geq 1$, $E_{(n)}(K) = \{(x,y) \in E(K)/v(x) \leq -2n\} = \{(x,y) \in E(K)/v(y) \leq -3n\}$.

Remarque : Pour tout $n \geq 0$, on a $E_{(n)}(K) \supset E_{(n+1)}(K)$. Notons $z = -x/y$ et rappelons x et y sont définis par des séries entières en z , qui convergent si $v(z) > 0$ (cf. 1.3.1) ; alors

$$E_{(n)}(K) = \{(x,y) \in E(K)/v(z) \geq n\} \text{ , pour tout entier } n \geq 1 .$$

2.2.3. La courbe elliptique E(K) est munie d'une structure de groupe. D'autre part, le groupe formel F associé à E permet de définir une structure de groupe sur $\mathfrak{P}$: si z_1 , $z_2 \in \mathfrak{P}$, alors $F(z_1,z_2)$ est une série convergente dans $\mathfrak{P}$, et si l'on note $z_1 \oplus_F z_2$ sa somme, la loi $\oplus_F$ est une loi de groupe sur $\mathfrak{P}$.

PROPOSITION . Pour tout $n \geq 1$, $E_{(n)}(K)$ et $\mathfrak{P}^n$ sont des sous-groupes de E et $\mathfrak{P}$ pour les lois définies ci-dessus, et l'application : $(x,y) \longmapsto z = -x/y$ définit un isomorphisme de groupes de $E_{(n)}(K)$ sur $\mathfrak{P}^n$ pour ces lois.

■ Cette proposition est une conséquence du (i) du lemme (2.2.4) ci-dessous. ■

COROLLAIRE . Les groupes $E_{(n)}(K)$ définissent une filtration de E(K)

2.2.4. *LEMME* . Soient $z_1, z_2 \in \mathfrak{P}^n$ et $z_3 \in \mathfrak{P}$ tels que $z_1 \oplus_F z_2 \oplus_F z_3 = 0$. Alors :

(i) $z_1 + z_2 + z_3 \in \mathfrak{p}^{2n}$ (donc $z_3 \in \mathfrak{p}^n$) ;

(ii) Si $p \neq 2$, on peut se ramener à $a_1 = a_3 = 0$, et alors $z_1 + z_2 + z_3 \in \mathfrak{p}^3$;

(iii) Si $p \neq 2,3$, on peut se ramener à $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, et alors $z_1 + z_2 + z_3 \in \mathfrak{p}^{5n}$;

(iv) Si $p = 2$ et si E est supersingulière, alors $a_1 = 0$, on peut se ramener à $a_2 = 0$, et alors $z_1 + z_2 + z_3 \in \mathfrak{p}^{4n}$.

■ Il suffit de regarder l'expression de $F(z_1, z_2)$ donnée en (1.3.2) et, pour (iv) , de se souvenir que, en caractéristique 2, la courbe elliptique E est supersingulière si et seulement si $a_1 = 0$ (cf. 1.4.3). ■

2.2.5. Etude de la filtration. La structure du groupe $E(K)$ est donnée par le résultat suivant :

THEOREME.

(i) $E_{(1)}(K)$ est un pro-p-groupe ;

(ii) $E_{(0)}(K)/E_{(1)}(K)$ est isomorphe à $\tilde{E}_{ns}(\tilde{K})$;

(iii) Si E est à bonne réduction, $E(K) = E_{(0)}(K)$; si la réduction est de type multiplicatif à tangentes rationnelles, $E(K)/E_{(0)}(K)$ est cyclique d'ordre $v(\Delta)$; sinon, $E(K)/E_{(0)}(K)$ est d'ordre ≤ 4 .

■ (i). D'après le lemme (3.2.4), il existe un entier $a \geq 2$ tel que $E_{(n)}(K)/E_{(an)}(K) \simeq \mathfrak{p}^n/\mathfrak{p}^{an}$ pour tout $n \geq 1$, $\mathfrak{p}$ étant muni de l'addition ordinaire. Donc $E_{(1)}(K)$ est un pro-p-groupe.

(ii) provient des définitions.

(iii). La 1ère assertion est évidente. Démontrons la 2e : d'après (1.2.3), toute courbe elliptique sur K à réduction multiplicative à tangentes rationnelles est isomorphe à une courbe de Tate $E(q)$ $(q \in \mathfrak{P})$. Donc il suffit de montrer que $E(q)/E_{(0)}(q) \simeq \mathbb{Z}/v(\Delta(q))\mathbb{Z}$ pour tout $q \in \mathfrak{P}$.
Or $\tilde{E}(q)$ a pour point singulier $(0,0)$ (cf. I.3.3) ; $E(q)$ est paramétré

par $K^*/q^{\mathbb{Z}}$ grâce aux formules $X(u)$, $Y(u)$ données en (I.2.5.1) , qui convergent lorsque $|q| < |u| \leq 1$, $u \neq 1$; (cette "couronne" forme un système de représentants de $K^*/q^{\mathbb{Z}}$). Ces formules montrent que

$$X(u) \equiv \frac{u}{(1-u)^2} \quad \text{et} \quad Y(u) \equiv \frac{u}{(1-u)^3} \quad (\text{mod. } q^{\mathbb{Z}}) \ .$$

Ainsi, $(X,Y) \in E_{(0)}(q)$ si et seulement si $(\tilde{X},\tilde{Y}) \neq 0$, c'est-à-dire $|q| < |u| < 1$. D'où $E_{(0)}(q) \simeq Uq^{\mathbb{Z}}/q^{\mathbb{Z}} \simeq U$, et de même $E_{(n)}(q) \simeq U^{(n)} = 1 + \mathfrak{p}^n$. Enfin, $E(q)/E_{(0)}(q) \simeq K^*/q^{\mathbb{Z}}U \simeq \mathbb{Z}/v(q).\mathbb{Z}$ mais $\Delta(q) = q\prod_{n\geq 1}(1-q^n)^{24}$, donc $v(q) = v(\Delta(q))$.

La dernière assertion (cas de la réduction additive, ou multiplicative à tangentes irrationnelles) est démontrée dans ([47] ,6). ■

2.3. APPLICATIONS. (K désigne encore un corps local de caractéristique résiduelle $p > 0$).

2.3.1. *PROPOSITION* . Si m est premier à p , la réduction : $E_m(K) \longrightarrow \tilde{E}_m(\tilde{K})$ est injective.

■ Le groupe $E_m(K)$ est d'ordre divisant m^2 (cf. I.4.1.1) alors que $E_{(1)}(K)$ est un pro-p-groupe ; donc le noyau de la réduction : $E_m(K) \longrightarrow \tilde{E}_m(\tilde{K})$, qui est égal à $E_m(K) \cap E_{(1)}(K)$, est nul. ■

Remarque : ce résultat a été démontré, par une autre méthode, en (II.6.2.2).

2.3.2. Notons $e = v(p)$ l'indice de ramification absolu de K , et a le plus grand entier tel que $z_1 + z_2 + z_3 \in \mathfrak{p}^{an}$ dès que $z_1 \oplus_F z_2 \oplus_F z_3 = 0$, $z_i \in \mathfrak{p}^n$ (cf. 2.2.4, on sait que $a \geq 2$).

PROPOSITION . S'il existe un point d'ordre p dans $E_{(n)}(K)$ $(n\geq 1)$, alors : $e \geq (a-1)n$.

■ Soient : Q un point d'ordre p de $E_{(1)}(K)$, et $n = v(z(Q))$ (i.e. $Q \in E_{(n)}(K) \setminus E_{(n+1)}(K)$) . Comme $pQ = 0$, on a :

$$\underbrace{z(Q) \oplus_F z(Q) \oplus_F \ldots \oplus_F z(Q)}_{q \text{ fois}} = 0 \quad ;$$

or les groupes $(\wp^n/\wp^{an}, \oplus_F)$ et $(\wp^n/\wp^{an}, +)$ sont isomorphes (cf. 2.2.4), d'où : $p.z(Q) \in \wp^{an}$. Ainsi, $e+n = v(p.z(Q)) \geq an$. ■

2.3.3. *COROLLAIRE* 1. Supposons K absolument non ramifié. Si p est impair, il n'y a pas de torsion dans $E_{(1)}(K)$. Si $p = 2$, les points de torsion éventuels de $E_{(1)}(K)$ sont d'ordre 2 , et ne sont pas dans $E_{(2)}(K)$.

■ Puisque $E_{(1)}(K)$ est un pro-p-groupe, tous les points de torsion de $E_{(1)}(K)$ sont d'ordre une puissance de p . Soit Q un point de torsion de $E_{(1)}(K)$; comme $e = 1$, nous avons : $1 \leq v(z(Q)) \leq \frac{1}{a-1}$. Si p est impair, nous savons que $a \geq 3$ (2.2.4) , donc $\frac{1}{a-1} < 1$, et un tel point Q ne peut pas exister. Si $p = 2$, nous pouvons avoir $a = 2$, et $v(z(Q)) = 1$, et c'est la seule possibilité. ■

2.3.4. *COROLLAIRE* 2. Supposons que $p = 2$, $e = 1$, et que E est à bonne réduction supersingulière. Soit Q un point d'ordre 2 , de $E(\bar{K})$. Alors l'extension $K(Q)/K$ est totalement ramifiée de degré 3 .

■ Notons $K' = K(Q)$, et e' l'indice de ramification absolu de K' , c'est-à-dire l'indice de ramification de K'/K . Le point $\tilde{Q}$ est d'ordre 2 dans $\tilde{E}(\tilde{K})$, qui est supersingulière : donc $\tilde{Q} = 0$, et $Q \in E_{(1)}(K')$. Ainsi, $e' \geq a-1$ (cf.2.3.2) ; or nous savons qu'ici a est au moins égal à 4 (cf. 2.2.4), donc e' est au moins égal à 3 .

D'autre part, le degré de K'/K est au plus égal à 3 , car il y a 3 points d'ordre 2 sur $E(\bar{K})$ (d'après I.4.1.1). ■

2.3.5. En fait, le corollaire 2 n'est qu'un cas particulier du résultat suivant :

PROPOSITION . Soit K un corps local de caractéristique résiduelle $p > 0$, d'indice de ramification absolu égal à 1 ; soit E une courbe elliptique sur K , à bonne réduction supersingulière ; soit Q un point d'ordre p de $E(\overline{K})$. Alors l'extension $K(Q)/K$ est totalement ramifiée de degré p^2-1 .

■ Nous verrons en (3.1.5) que, sous ces hypothèses, l'indice de ramification de $K(Q)/K$ est égal à p^2-1 . D'autre part, il y a (p^2-1) points d'ordre p sur $E(\overline{K})$ (cf. I,4.1.1) , donc le degré de l'extension $K(Q)/K$ est au plus égal à p^2-1 . ■

2.4. CAS RATIONNEL.

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$, de discriminant Δ .

2.4.1. *THEOREME* (Mordell-Weil) : Le groupe $E(\mathbb{Q})$ est de type fini.

Ce théorème a été prouvé par Mordell en 1922, puis généralisé par Weil. On en trouve une démonstration dans [5] (théorème 20.1).

2.4.2. L'étude du cas local (cf. 2.2 et 2.3) donne le résultat suivant sur la torsion de $E(\mathbb{Q})$:

PROPOSITION . Si $p_1, p_2, \ldots, p_r$ désignent les facteurs premiers de Δ , tout point de torsion de $E(\mathbb{Q})$ est à coordonnées dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, \ldots, \frac{1}{p_r}]$.

■ Soit Q un point de torsion de $E(\mathbb{Q})$; supposons que figure, au dénominateur d'une des coordonnées de Q , un nombre premier p ne divisant pas Δ .

Alors le point Q , considéré comme point de $E(\mathbb{Q}_p) = E_{(0)}(\mathbb{Q}_p)$, est dans le noyau $E_{(1)}(\mathbb{Q}_p)$ de la réduction modulo p . D'après (2.3.3), ce n'est possible que si $p = 2$. ■

Rappelons un résultat démontré en (I.4.4.3) :

PROPOSITION 1. Le groupe de torsion de $E(\mathbb{Q})$ est cyclique, ou égal au produit de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par un groupe cyclique.

2.4.3. La série L d'une courbe elliptique.

Nous avons associé à toute courbe projective X non singulière sur $\mathbb{F}_p$ une série L (cf. II.7.3.2), définie par :

$$L_X(u) = \prod_{i=1}^{2g} (1-\alpha_i u)^{-1} ;$$

dans cette formule, u est une variable complexe, g le genre de X, et $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2g}$ les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius π_p sur le module de Tate $T_\ell(J(X))$ (ℓ premier différent de p), numérotées de façon que $\alpha_i \cdot \alpha_{i+g} = p$.

En particulier, si $X = \tilde{E}^{(p)}$ est la réduction modulo p de E (où p ne divise pas Δ),

$$L_{\tilde{E}^{(p)}}(p^{-s}) = \frac{1}{1-a_p p^{-s}+p^{1-2s}}$$

où $a_p = \alpha_1+\alpha_2$ est la trace de π_p ; comme $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \sqrt{p}$, on a $|a_p| \leq 2\sqrt{p}$.

Lorsque p divise Δ, posons $a_p = \left(\frac{-c_6}{p}\right)$; autrement dit, $a_p = +1$, -1 ou 0, selon que la cubique dégénérée $\tilde{E}^{(p)}$ est de type multiplicatif à tangentes rationnelles, multiplicatif à tangentes irrationnelles, ou additif (cf. 1.1.5).

Définissons maintenant la série L de E par le produit eulérien suivant (qui converge pour Res > 3/2) :

$$L_E(p^{-s}) = \prod_{p|\Delta} \frac{1}{(1-a_p p^{-s})} \quad \prod_{p\nmid\Delta} \frac{1}{1-a_p p^{-s}+p^{1-2s}} .$$

Définissons aussi la fonction Λ_E par :

$$\Lambda_E(s) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,L_E(p^{-s})$$

où N désigne le conducteur (algébrique) de E, défini en (1.1.6).

2.4.4. Conjectures. Nous énonçons ici quelques conjectures "classiques" sur les courbes elliptiques semi-stables définies sur $\mathbb{Q}$ (cf.[47]). Nous supposons donc N sans facteur carré, et utilisons les notations de (2.4.3) . Définissons a_n pour tout entier $n \geq 1$, à partir des a_p , par : $a_1 = 1$, $a_{nm} = a_n a_m$ si $(n,m) = 1$, et $a_p a_{p^r} = a_{p^{r+1}} + p a_{p^{r-1}}$ si $r \geq 1$. Rappelons que $\mathrm{Dif}_o(E)$ est de dimension 1 , et notons ω une forme différentielle holomorphe non nulle sur E .

Conjecture 1 : La série L de E admet un prolongement analytique holomorphe dans $\mathbb{C}$, et vérifie une équation fonctionnelle du type : $\Lambda_E(2-s) = w\Lambda_E(s)$, où $w = \pm 1$.

Soit ρ l'ordre du zéro de L en $s = 1$; cette conjecture a pour conséquence : $(-1)^\rho = w$.

Conjecture 2 (Weil) : La fonction f , définie sur $\mathfrak{H}$ par $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau}$, est une forme parabolique primitive de poids 2 pour $\Gamma_o(N)$; c'est une fonction propre pour tous les opérateurs de Hecke, donc pour l'opérateur d'Atkin Lehner $W_N = \prod_{p|N} W_p^N$, et la valeur propre de W_N associée à f est égale à $-w$. Enfin, il existe une application rationnelle $\varphi : X_o(N) \longrightarrow E$, définie sur $\mathbb{Q}$, telle que les formes différentielles $\omega \circ \varphi$ et $f(\tau)d\tau$ (sur $X_o(N)$) sont proportionnelles.

Rappelons que, d'après le théorème (II,2.3.1), a_n est la valeur propre de T_n associée à f . En particulier, lorsque p divise N , sur les formes nouvelles, $T_p = -W_p^N$ est une involution, ayant pour valeur propre $a_p = (\frac{-c_6}{p}) = \pm 1$. La conjecture de Weil affirme donc que

$$-w = \prod_{p|N} (-a_p) = \prod_{p|N} [-(\frac{-c_6}{p})] \quad .$$

Notons t le nombre de facteurs premiers de N , et $(\frac{-c_6}{N})$ le produit $\prod_{p|N} (\frac{-c_6}{p})$; alors

$$w = (-1)^{t+1} (\frac{-c_6}{N}) \quad .$$

Conjecture 3 (Birch et Swinnerton-Dyer) (en admettant le prolongement analytique de L) : L'ordre du zéro de $L(p^{-s})$ au point $s = 1$ est égal au rang r du groupe $E(\mathbb{Q})$.

Ainsi, l'ensemble de ces trois conjectures implique :

Conjecture 4 : Le rang r du groupe $E(\mathbb{Q})$ est lié au nombre t de facteurs premiers de N par $(-1)^r = (-1)^{t+1}(\frac{-c_6}{N})$.

2.4.5. Remarque : Lorsque E est une courbe elliptique à multiplication complexe, la série L de E se prolonge analytiquement à tout le plan complexe, comme l'a montré Deuring [7a] . Dans ce cas, Coates et Wiles [6c] viennent de démontrer une partie de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, à savoir :

THEOREME. Si E est une courbe elliptique à multiplication complexe définie sur $\mathbb{Q}$, et si le rang du groupe $E(\mathbb{Q})$ est au moins égal à 1 , alors $L(p^{-s})$ s'annule au point $s = 1$.

3. *PROPRIETES GALOISIENNES DES POINTS D'ORDRE FINI SUR UNE COURBE ELLIPTIQUE* [39] .

3.1. ETUDE LOCALE.

3.1.1. Soient K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$; $v, \mathfrak{P}, \mathfrak{O}, U$ comme précédemment (1.1.5) ; E une courbe elliptique sur K ; ℓ un nombre premier ; notons $L = K(E_\ell)$, v_L , $\mathfrak{P}_L$, $\mathfrak{O}_L$; U_L . Le groupe E_ℓ des points d'ordre ℓ de E est isomorphe à $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^2$, puisque K est de caractéristique nulle (I.4.1.1) et la réduction modulo $\mathfrak{P}$ induit un homomorphisme surjectif de E_ℓ sur $\tilde{E}_\ell$ (II.6.2.1) . Notons η_ℓ le noyau. Il est contenu dans $E_{(1)}(L)$ (défini en 2.2.2) , dont la loi de groupe est définie par le groupe formel F associé à E (1.3.) ; on a même exactement :

$\eta_\ell \simeq \{z \in \wp_L / \psi_\ell(z) = 0\}$.

Lorsque la hauteur h de F est finie, l'ordre de $\tilde{E}_p$ est égal à p^{2-h} puisque c'est le degré de séparabilité de la multiplication par p dans $\tilde{E}$; donc l'ordre de η_p est p^h .

Soit G l'image de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ dans $\mathrm{Aut}(E_\ell)$, c'est-à-dire $G = \mathrm{Gal}(K(E_\ell)/K) = \mathrm{Gal}(L/K)$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow \eta_\ell \longrightarrow \tilde{E}_\ell \longrightarrow 0$$

est en fait une suite exacte de G-modules.

Suivant [39] , nous allons étudier l'image I du groupe d'inertie de $\overline{K}/K$, dans $\mathrm{Aut}(E_\ell)$, c'est-à-dire le groupe d'inertie de L/K . Son action sur $\tilde{E}_\ell$ est triviale, et il laisse η_ℓ stable.

Nous allons donc étudier la ramification de L/K selon le type de réduction de E , à l'exception de la réduction additive.

Soit $e = v(p)$ l'indice de ramification absolu de K . Nous supposerons que $e = 1$.

3.1.2. *PROPOSITION* . Si E a bonne réduction modulo $\wp$ et si $\ell \neq p$, alors $I = \{1\}$.

▪ D'après (II.6.2.2), la réduction modulo $\wp$ induit un isomorphisme de E_ℓ sur $\tilde{E}_\ell$. ▪

3.1.3. *PROPOSITION* . Si E a mauvaise réduction de type multiplicatif modulo $\wp$, alors 2 cas sont possibles :

(i) Si $\Delta \in K^{*\ell}$, I est trivial si $\ell \neq p$; d'ordre $(p-1)$ si $\ell = p$, représentable par $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Si $\Delta \notin K^{*\ell}$, I est d'ordre ℓ si $\ell \neq p$, représentable par $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d'ordre $p(p-1)$ si $\ell = p$, représentable par $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

▪ Dans ce cas, $\tilde{E}_\ell$ est isomorphe à un sous-groupe de L^* , il est donc cyclique d'ordre ℓ , donc η_ℓ aussi. Quitte à remplacer K

par une extension non ramifiée, on peut supposer que E est une courbe de Tate sur K (cf. 1.2.3) , c'est-à-dire $E(K) \simeq K^*/q^{\mathbb{Z}}$, $q \in \wp$. Alors $K(\eta_\ell) = K(\mu_\ell)$ est une extension de K non ramifiée si $\ell \neq p$, totalement ramifiée de degré $p-1$ si $\ell = p$. Donc $\{\zeta_\ell, q^{1/\ell}\}$ forme une base de E_ℓ sur $\mathbb{F}_\ell$ (si ζ_ℓ est une racine primitive $\ell^{\text{ème}}$ de l'unité, et $q^{1/\ell}$ une racine $\ell^{\text{ème}}$ quelconque de q). Ainsi $K(E_\ell) = K(\zeta_\ell, q^{1/\ell})$. Nous venons de rappeler la ramification de $K(\zeta_\ell)/K$; d'autre part, $K(\zeta_\ell, q^{1/\ell})/K(\zeta_\ell)$ est de degré 1 si $q \in K^{*\ell}$, de degré ℓ , totalement ramifiée, sinon. Et comme $\Delta = q \prod_{n\geq 1} (1-q^n)^{24}$, on a : $q \in K^{*\ell}$ si et seulement si $\Delta \in K^{*\ell}$. Enfin, les représentations matricielles sont données par rapport à la base $\{\zeta_\ell, q^{1/\ell}\}$ de E_ℓ . ■

3.1.4. *PROPOSITION*. Si E est à bonne réduction non supersingulière modulo $\wp$, et si $\ell = p$, alors I est représentable par un sous-groupe du groupe $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

■ Puisque $\dim_{\mathbb{F}_p}(\tilde{E}_p) = 2-h = 1$, dans une base de E_p associée à la suite exacte $0 \longrightarrow \eta_p \longrightarrow E_p \longrightarrow \tilde{E}_p \longrightarrow 0$, tout élément de I est représenté par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. ■

3.1.5. *PROPOSITION*. Si E a bonne réduction supersingulière modulo $\wp$, et si $\ell = p$, alors I est cyclique d'ordre p^2-1 .

■ Ici $h = 2$ donc $\tilde{E}_p = \{0\}$ et $E_p \simeq \eta_p \simeq \{z \in \wp_L / \psi_p(z) = 0\}$. Or $\psi_p(z) = p(z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_{p^2-1} z^{p^2-1}) + \alpha_{p^2} z^{p^2} + \ldots$ où $\alpha_i \in \mathcal{O}$, $\alpha_{p^2} \notin \wp$. D'après le théorème de préparation de Weierstrass (cf. [10] ,I.1) il existe une série formelle inversible $u(Z) \in \mathcal{O}[[Z]]$ et un polynôme $g(Z) = p(\beta_1 Z + \beta_2 Z^2 + \ldots + \beta_{p^2-1} Z^{p^2-1}) + \beta_{p^2} Z^{p^2} \in \mathcal{O}[Z]$ tels que $\beta_{p^2} \notin \wp$ et $\psi_p(Z) = u(Z).g(Z)$. Ainsi, $\psi_p(z) = 0$ si et seulement si $g(z) = 0$; or $g(z)$ est le produit de z par un polynôme d'Eisenstein de degré p^2-1 .

Ainsi, pour tout élément P non nul de E_p, l'extension $K(P)/K$ est totalement ramifiée de degré p^2-1. Cela prouve que l'ordre de I est multiple de p^2-1.

Mais d'autre part, I est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(E_p) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, et ce dernier groupe est d'ordre $p(p^2-1)(p-1)$. Soit I_1 le p-sous-groupe de I. On sait [36] que I_1 est un sous-groupe distingué de I, et que I/I_1 est cyclique d'ordre premier à p. Si I_1 était d'ordre p, c'est-à-dire représentable par $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$, I devrait être contenu dans le normalisateur $\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ 0 & *\end{smallmatrix}\right)$ de I_1 ; or, ce normalisateur est d'ordre $p(p-1)^2$. Comme p^2-1 ne divise pas $p(p-1)^2$, c'est impossible, et $I_1 = \{1\}$. Mais tout sous-groupe cyclique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ d'ordre premier à p est contenu dans un "sous-groupe de Cartan" de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ (cf. [39], 2.6) donc d'ordre $(p-1)^2$ ou (p^2-1) (cf. [39], 2.1). Ainsi I est cyclique d'ordre p^2-1. ∎

3.2. COURBE ELLIPTIQUE SEMI-STABLE SUR $\mathbb{Q}$.

Soit E une courbe définie sur $\mathbb{Q}$, semi-stable, définie par une équation minimale. Alors le conducteur N de E est égal à : $N = \prod_{p\mid\Delta} p$ (cf. 1.1.6).

Soient ℓ un nombre premier, et G l'image de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans $\mathrm{Aut}(E_\ell)$, c'est-à-dire $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E_\ell)/\mathbb{Q})$. Notons v_p la valuation normalisée de $\mathbb{Q}_p$.

3.2.1. *LEMME*. S'il existe p divisant Δ tel que ℓ ne divise pas $v_p(\Delta)$, alors : ou bien $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\ell)$, ou bien G est contenu dans l'ensemble des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ 0 & *\end{smallmatrix}\right)$ et E contient un sous-groupe cyclique d'ordre ℓ rationnel sur $\mathbb{Q}$.

∎ Puisque $p\mid\Delta$, E est à réduction multiplicative mod. p. L'hypothèse $\ell \nmid v_p(\Delta)$ équivaut à $\Delta \notin \mathbb{Q}_p^{*\ell}$. La proposition (2.1.3) prouve que le groupe d'inertie de $\mathbb{Q}_p(E_\ell)/\mathbb{Q}_p$ est d'ordre $\ell(\ell-1)$: il contient

donc un élément d'ordre ℓ , et G aussi contient un élément σ d'ordre ℓ . Dans une base $\{e_1,e_2\}$ convenable de E_ℓ sur $\mathbb{F}_\ell$, σ est représenté par $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Deux cas sont alors possibles (et incompatibles !) :

Ou bien G laisse fixe la droite $\mathbb{F}_\ell e_1$, et alors G est un sous-groupe du groupe d'ordre $\ell(\ell-1)^2$ représenté dans la base $\{e_1,e_2\}$ par $\begin{pmatrix}* & *\\ 0 & *\end{pmatrix}$.

Ou bien G contient un élément g tel que $ge_1 = e_2' \notin \mathbb{F}_\ell e_1$. Dans la base $\{e_1,e_2'\}$ de E_ℓ , la matrice de σ est $\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$, et celle de $\tau = g\sigma g^{-1}$ est $\begin{pmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$, puisque $\tau e_2' = e_2'$. Ainsi G contient toutes les matrices $\begin{pmatrix}1 & *\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0\\ * & 1\end{pmatrix}$; mais $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, donc G contient le sous-groupe de $GL_2(\mathbb{F}_\ell)$ engendré par $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Ce sous-groupe est $SL_2(\mathbb{F}_\ell)$: en effet, c'est l'image, par la projection canonique de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur $GL_2(\mathbb{F}_\ell)$, du sous-groupe de $GL_2(\mathbb{Z})$ engendré par $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, à savoir $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$. Or $SL_2(\mathbb{F}_\ell)$ est le noyau du déterminant, autrement dit on a la suite exacte :

$$1 \longrightarrow SL_2(\mathbb{F}_\ell) \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_\ell) \xrightarrow{\text{dét}} \mathbb{F}_\ell^* \longrightarrow 1 .$$

Comme l'accouplement de Weil (I.4.4) nous a montré que $\text{dét}(G) = \mathbb{F}_\ell^*$, on a alors $G = GL_2(\mathbb{F}_\ell)$. ∎

3.2.2. *THEOREME*. Si ℓ ne divise pas $v_p(\Delta)$, pour un p divisant Δ , alors :

(i) ou bien $G = GL_2(\mathbb{F}_\ell)$;

(ii) ou bien E a un point rationnel d'ordre ℓ ;

(iii) ou bien E est ℓ-isogène (sur $\mathbb{Q}$) à une courbe E' ayant un point rationnel d'ordre ℓ .

(ici, "point rationnel" signifie "point rationnel sur $\mathbb{Q}$").

∎ Vu le lemme (3.2.1), il suffit de montrer que, si $G \subset \{\begin{pmatrix}* & *\\ 0 & *\end{pmatrix}\}$, on est dans le cas (ii) ou (iii) . Notons χ_i (i = 1,2) les 2 homomorphis-

mes de G dans $\mathbb{F}_\ell^*$ définis par : $g = \begin{pmatrix} \chi_1(g) & * \\ 0 & \chi_2(g) \end{pmatrix}$. Nous allons montrer que l'un des χ_i est égal à 1, et alors le second sera égal au déterminant, donc à la restriction du caractère χ de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ défini par l'action sur μ_ℓ.

Appelons K_i le sous-corps de $\mathbb{Q}(E_\ell)$ fixe par le noyau de χ_i, et étudions la ramification de $K_i/\mathbb{Q}$ en chaque place p. Remarquons d'abord que le degré $[K_i:\mathbb{Q}]$ divise $\ell-1$.

Si $p \nmid \ell\Delta$, d'après (2.1.2) l'extension $\mathbb{Q}_p(E_\ell)/\mathbb{Q}_p$ est non ramifiée, donc a fortiori $K_i/\mathbb{Q}$ est non ramifiée en p.

Si $p \mid \Delta$ et $p \neq \ell$, comme $\Delta \notin \mathbb{Q}_p^{*\ell}$ par hypothèse, le groupe d'inertie de $\mathbb{Q}_p(E_\ell)/\mathbb{Q}_p$ est d'ordre ℓ d'après (3.1.3,(ii)). Ainsi l'indice de ramification de $K_i/\mathbb{Q}$ en p doit diviser ℓ et $\ell-1$ (car $[K_i:\mathbb{Q}]$ divise $\ell-1$) : l'extension $K_i/\mathbb{Q}$ est non ramifiée en p.

Si $p = \ell$, la réduction n'est pas supersingulière : en effet, d'après (3.1.5), si c'était le cas, le groupe d'inertie de $\mathbb{Q}(E_\ell)/\mathbb{Q}$ serait d'ordre ℓ^2-1. Mais cet ordre doit diviser l'ordre de G, qui lui-même divise $\ell(\ell-1)^2$: c'est impossible. Ainsi la réduction est non supersingulière, ou de type multiplicatif, et d'après (3.1.3) et (3.1.4), le groupe d'inertie de $\mathbb{Q}_p(E_\ell)/\mathbb{Q}_p$ est d'ordre divisant $\ell(\ell-1)$ (car représentable par un sous-groupe de $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) : donc l'un des caractères χ_i -correspondant à 1 - est non ramifié en ℓ.

En résumé, l'un des χ_i est non ramifié partout, l'autre est non ramifié en dehors de ℓ. Comme il n'existe pas d'extension non triviale de $\mathbb{Q}$ partout non ramifiée, l'un des χ_i est le caractère unité, et alors l'autre est le déterminant. Nous avons donc 2 cas à considérer :

Si $\chi_1 = 1$, alors $G \subset \{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\}$ et le 1er vecteur de la base correspond à un point d'ordre ℓ défini sur $\mathbb{Q}$.

Si $\chi_2 = 1$, alors $G \subset \{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ et on a une suite exacte de G-

modules : $1 \to u \to E \to \mathbb{Z}/\mathcal{E} \to 1$, où l'action de G sur est triviale. D'après (1.4.3.3), la courbe elliptique E/|i est E-isogène à E , définie sur Q , et le sous-groupe E Ai de E/|j est d'ordre Z et rationnel sur Q . *m*

3.2.3. *COROLLAIRE.* Si E est une courbe elliptique semi-stable sur Q avant bonne réduction en 2 , si $Z > 5$ et s'il existe un facteur premier p de A tel que Z ne divise pas $v_p(A)$, alors $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E_p)/\langle P\rangle) = \mathrm{Aut}(E)$.

m II suffit de vérifier que les cas (ii) et (iii) du théorème (3.2.2) ne peuvent pas se produire, donc que $G = GL_2(F_2)$. Or si E avait un point rationnel d'ordre Z , la courbe réduite modulo 2 aurait un sous-groupe de points rationnels sur d'ordre Z (cf. 3.3.1) (car $Z \neq 2$). Comme P (F) a 5 points, cela implique $Z \leq 5$. Ainsi, (ii) est impossible. Et le lemme ci-dessous (3.2.4) montre que toute courbe e-isogène à E a bonne réduction en 2 : ainsi (iii) est impossible comme (ii) . i

3.2.4. *LEMME.* Deux courbes elliptiques définies sur un même corps de nombres K , et isogènes sur K , ont exactement les mêmes places de mauvaise réduction.

Ce résultat est démontré dans [41] pour des variétés abéliennes.

3.2.5. Remarque : Dans [39 J , Serre obtient le résultat plus général suivant :

THEOREME. Soient K un corps de nombres, et E une courbe elliptique sur K n'ayant pas de multiplication complexe sur K . Alors, pour presque tout nombre premier Z (i.e. pour tout Z sauf un nombre fini), on a : $\mathrm{Gal}(K(E_\ell)/K) = \mathrm{Aut}(E_\ell)$.