BERNARD MALGRANGE

Chapitre I Forme infinitésimale des équations de Lie

Cours de l'institut Fourier, tome 8 (1971-1972), p. 3-21
<http://www.numdam.org/item?id=CIF_1971-1972__8__3_0>

CHAPITRE I

FORME INFINITESIMALE DES EQUATIONS DE LIE

1. RAPPELS SUR LA COHOMOLOGIE DE SPENCER.

Nous utiliserons la théorie formelle des équations différentielles linéaires de Spencer, Quillen, Goldschmidt etc... telle qu'elle est développée dans Goldschmidt [1]. Ce paragraphe est seulement destiné à fixer les notations et la terminologie que nous utiliserons par la suite.

Soit X une variété de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, dont la dimension sera notée n. Elle sera toujours supposée paracompacte et connexe (en fait, les résultats étant locaux, on pourrait se limiter aux ouverts de $\mathbb{R}^n$) ; si E est un fibré vectoriel sur X, on note $\mathcal{E}$ le faisceau de ses sections ; si E est le fibré trivial $X \times \mathbb{R}$, on écrit $E = \mathbb{1}$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X$.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module (i.e. un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules), nous identifions $\mathcal{F}$ à l'ensemble de ses sections ; la notation "$s \in \mathcal{F}$" signifie donc "$s \in \mathcal{F}_a$, a un point de X" ; nous désignons par "section de $\mathcal{F}$" une section sur un ouvert non nécessairement explicité ; bien entendu, lorsqu'intervient une loi de composition entre faisceaux, les germes (resp sections) considérés sont sous-entendus au même point (resp sur le même ouvert). Enfin, pour $a \in X$, la "fibre en a de $\mathcal{F}$" i.e. $\mathcal{F}_a \otimes_{\mathcal{O}_{X,a}} \mathbb{R}$ sera notée $\mathcal{F}(a)$.

Soit Δ la diagonale de X^2, pr_1 et pr_2 les deux projections $X^2 \rightrightarrows X$ et $pr_1|_\Delta$, $pr_2|_\Delta$ leurs restrictions à Δ. Un faisceau sur X (resp sur Δ) sera toujours identifié à son image réciproque par $pr_1|_\Delta$ (resp à son image directe par l'injection $\Delta \to X^2$; par exemple, sur Δ, on écrira $\mathcal{O}_X$ pour $pr_1^{-1}\mathcal{O}_X$; cette convention allège les notations et n'aura aucun inconvénient ici. Soit $\mathcal{J}^{k+1}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{X^2}$ formé des fonctions qui s'annulent à l'ordre k sur Δ ; d'après un lemme élémentaire, $\mathcal{J}^{k+1}$ est la puissance $(k+1)$-ième de $\mathcal{J}^1 = \mathcal{J}$, faisceau des fonctions nulles sur Δ.

En coordonnées locales, et avec les notations usuelles, $\mathcal{J}^{k+1}$ est engendré par les monômes $(x'-x)^\alpha$, $|\alpha| = k+1$; une section de $\mathcal{O}_{X^2}/\mathcal{J}^{k+1}$ peut alors s'écrire de manière unique, en développant suivant les $(x'-x)^\alpha$

$$a(x,x') = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x) \frac{(x'-x)^\alpha}{\alpha!} \pmod{\mathcal{J}^{k+1}}$$

avec $a_\alpha(x) = (D^\alpha_{x'}\ a)(x,x)$. Sous cette forme, on voit immédiatement que $\mathcal{O}_{X^2}/\mathcal{J}^{k+1}$ n'est autre que le faisceau $J^k(\mathcal{O}_X)$ des sections de $J^k(\mathbb{1})$, le fibré des jets d'ordre k de sections du fibré trivial $\mathbb{1}$; cela se généralise immédiatement : si E (resp $\mathcal{F}$) est un fibré vectoriel sur X (resp un $\mathcal{O}_X$-module), nous noterons $J^k(E)$ le fibré des jets d'ordre k de sections de E (resp nous poserons $J^k(\mathcal{F}) = \mathcal{O}_{X^2}/\mathcal{J}^{k+1} \otimes_{pr_2^{-1}\mathcal{O}_X} pr_2^{-1}\mathcal{F})$; on voit alors que $J^k(\mathcal{E})$ est le faisceau des sections de $J^k(E)$; l'application usuelle $j^k : \mathcal{E} \to J^k(\mathcal{E})$ est alors définie par $j^k(s) = 1 \otimes pr_2^{-1}s$. Par exemple, pour $a \in \mathcal{O}_X$, on aura $(j^k a)(x,x') = a(x') \pmod{\mathcal{J}^{k+1}}$.

Il sera commode d'employer le langage suivant : on note $\Delta^{(k)}$ l'espace annelé $(\Delta, J^k(\mathcal{O}_X))$ ($J^k(\mathcal{O}_X)$ est visiblement un faisceau d'anneaux locaux), et on l'appelle un "espace différentiable", par analogie avec les espaces analytiques au sens de Grothendieck [1] ; il sera commode dans la suite de parler des "champs de vecteurs sur $\Delta^{(k)}$ ", des "automorphismes pr_1-projetables de $\Delta^{(k)}$ ", et autres notions que nous définirons chaque fois par passage au quotient à partir de X^2 (d'ailleurs, on définirait facilement une catégorie avec les espaces de ce type en prenant pour morphismes ceux des espaces annelés sous-jacents ; en fait, ici, seuls interviennent les morphismes étales, i.e. les isomorphismes locaux).

Soit T^* le fibré cotangent de X . En relevant les formes différentielles de X à X^2 par pr_1^* , on voit qu'on peut considérer les éléments de $\Lambda^p\mathcal{T}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} J^k(\mathcal{O}_X)$ comme des germes de formes différentielles sur X^2 , mod $\mathcal{J}^{k+1}$ (ou si l'on préfère sur $\Delta^{(k)}$) . Désignant alors par D la différentielle extérieure <u>par rapport à la première variable seule</u>, on trouve le complexe de Spencer

$$(1.1)_k \qquad 0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{j^k} J^k(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{D} \mathcal{T}^*\otimes J^{k-1}(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{D} \dots \xrightarrow{D} \Lambda^n\mathcal{T}^*\otimes J^k(\mathcal{O}_X) \to 0$$

[A partir de maintenant, on convient que $J^{\ell} = 0$ si $\ell < 0$ et l'on omet d'écrire $\mathcal{O}_X$ sous le symbole $\otimes$] . En coordonnées locales, si $a = (a_\alpha)_{|\alpha|\leq k}$, i.e. si $a(x,x') = \sum a_\alpha(x) \frac{(x'-x)^\alpha}{\alpha!} \pmod{\mathcal{J}^{k+1}}$, on aura

$$Da = \sum dx_i \otimes \frac{\partial a}{\partial x_i} \pmod{\mathcal{J}^k} = (\sum dx_i \otimes \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} - a_{\alpha+\varepsilon_i})_{|\alpha|\leq k-1}$$

ε_i désignant le multientier $(0,a,1,\dots,0)$, le 1 à la i-ème place. De même pour les formes de degré supérieur. On démontre aisément (voir p.ex. Goldschmidt [1]) que ce complexe est acyclique pour tout $k \geq 0$.

Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module ; en remarquant que D est $pr_2^{-1}\mathcal{O}_X$-linéaire (mais non $\mathcal{O}_X$-linéaire !) , et en appliquant à $(1.1)_k$ le foncteur $\underset{pr_2^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} pr_2^{-1}\mathcal{F}$, on trouve encore un complexe, acyclique pour $k \geq 0$:

$(1.2)_k$ $$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{j^k} J^k(\mathcal{F}) \xrightarrow{D} \mathcal{J}^* \otimes J^{k-1}(\mathcal{F}) \xrightarrow{D} \dots$$

Soit enfin π_k la projection naturelle $J^{k+1}(\mathbb{1}) \to J^k(\mathbb{1})$; le noyau de cette application s'identifie à $S^{k+1}(T^*)$ (S^k = puissance k-ième symétrique), sur $S^k(\mathcal{J}^*)$, les deux structures de $\mathcal{O}_X$-module définies par pr_1^{-1} et pr_2^{-1} coïncident, et la restriction $-\delta$ de D est donc $\mathcal{O}_X$-linéaire (= $pr_1^{-1}\mathcal{O}_X$-linéaire, suivant nos conventions). En coordonnées locales, on a, pour $a = (a_\alpha)_{|\alpha|=k+1}$

$$\delta a = (\sum_i dx_i \otimes a_{\alpha+\varepsilon_i})_{|\alpha|=k} = \sum_i dx_i \otimes \frac{\partial a}{\partial x'_i} \pmod{\mathcal{J}^{k+1}}$$

δ est donc défini "fibre par fibre". Si E est un fibré vectoriel sur X , on en déduit un complexe

$(1.3)_k$ $$0 \to S^k(T^*)\otimes E \xrightarrow{\delta} T^*\otimes S^{k-1}(T^*)\otimes E \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \Lambda^n T^*\otimes S^{n-k}(T)^*\otimes E \to 0$$

dont le complexe des sections, est simplement le noyau de la projection $\pi_{k-1} : (1-2)_k \to (1-2)_{k-1}$, avec $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

Il est immédiat de vérifier que, pour $k \geq 1$, le complexe précédent est acyclique.

2. VECTEURS VERTICAUX ET DIAGONAUX.

Nous allons appliquer les considérations précédentes à $E = T$, le fibré tangent de X ; on prendra garde qu'ici, l'identification usuelle $E \simeq J^o(E)$ n'est pas permise, du fait que nous aurons dans la suite à travailler avec des automorphismes (et des automorphismes infinitésimaux) de X^2 qui seront pr_1-projetables, mais non pr_2-projetables ; il est clair qu'un tel automorphisme opère différemment, en général, sur $pr_1^{-1}(\mathcal{T})|_\Delta$ et $pr_2^{-1}(\mathcal{T})|_\Delta$.

Le faisceau $J^k(\mathcal{T})$ sera identifié au faisceau des champs pr_1-verticaux sur X^2, modulo ceux qui s'annulent à l'ordre k sur Δ ; nous appellerons ses sections des "champs verticaux sur X^2 le long de $\Delta^{(k)}$ " (lorsqu'un tel champ n'est pas tangent à Δ, il ne définit pas de germe de groupe à un paramètre sur $\Delta(k)$ et ne peut donc pas être appelé un "champ de vecteurs sur $\Delta^{(k)}$ "). Le crochet des champs de vecteurs sur X^2 donne par restriction un crochet

$$[\ ,\ ]\quad J^k(\mathcal{T}) \underset{\Delta}{\times} J^k(\mathcal{T}) \to J^{k-1}(\mathcal{T})$$

qui est d'ailleurs défini fibre par fibre, de la manière suivante : soient ξ et η deux jets d'ordre k de sections de T en x_o, $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ des sections de T relevant ξ et η ; alors, on a $[\xi,\eta](x_o) = j^{k-1}[\bar{\xi},\bar{\eta}](x_o)$, (le second membre ne dépendant évidemment que de ξ et η). En coordonnées locales, une section de $J^k(T)$ s'écrira donc

$$\sum_1^n a_i(x,x') \frac{\partial}{\partial x'_i} \quad \mathrm{mod}\ (\mathcal{I}^{k+1}) \quad ,$$

ce que nous écrivons encore $a(x,x') \frac{\partial}{\partial x'}$, avec $a = (a_1,\dots,a_n)$, $\frac{\partial}{\partial x'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x'_n} \end{pmatrix}$

Définissons maintenant les champs de vecteurs diagonaux sur X^2 comme étant les champs pr_1-projetables et préservant Δ (i.e. tangents à Δ) et soit ν l'application qui à un tel champ fait correspondre sa partie verticale ; il est immédiat que ν est une bijection ; en coordonnées locales, si $\xi = a(x,x') \frac{\partial}{\partial x'}$, on a $\nu^{-1}\xi = a(x,x')\frac{\partial}{\partial x'} + a(x,x)\frac{\partial}{\partial x}$.

Par passage au quotient, ν^{-1} donne un isomorphisme de $J^k(\mathcal{T})$ sur le faisceau, quotient des champs diagonaux par ceux qui s'annulent à l'ordre k sur Δ ; nous appellerons ce quotient "faisceau des champs projetables sur $\Delta^{(k)}$ ", et nous le noterons $\tilde{J}^k(\mathcal{T})$; le fibré correspondant sera naturellement noté $\tilde{J}^k(T)$.

Par passage au quotient à partir des opérations usuelles sur X^2 , on trouve les résultats suivants :

(2.1) $\tilde{J}^k(\mathcal{T})$ opère comme un faisceau de dérivations sur $J^k(\mathcal{O}_X)$,

(2.2) $\tilde{J}^k(\mathcal{T})$ est un faisceau d'algèbres de Lie sur Δ , contrairement à $J^k(\mathcal{T})$; mais ici, le crochet n'est plus $\mathcal{O}_X$-bilinéaire.

(2.3) Le crochet de $\tilde{J}^{k+1}(\mathcal{T}) \underset{\Delta}{\times} J^k(\mathcal{T})$ est bien défini, à valeurs dans $J^k(\mathcal{T})$ (et il n'est $\mathcal{O}_X$-linéaire que sur le premier facteur).

Plus généralement, considérons $\Lambda^p\mathcal{T}^* \otimes J^k(\mathcal{T})$ et $\Lambda^p\mathcal{T}^* \otimes \tilde{J}^{k+1}(\mathcal{T})$ comme des faisceaux de formes vectorielles sur X^2 , modulo $\mathcal{J}^{k+1}$; alors, pour $\xi \in \tilde{J}^{k+1}(\mathcal{T})$, la dérivée de Lie $\theta(\xi)$ opère dans les espaces précédents.

Il est facile de vérifier que le crochet (2.2) coïncide avec celui qui est défini d'habitude sur $J^k(\mathcal{T})$ à partir de la correspondance entre les sections de ce faisceau et les champs de vecteurs invariants sur l'espace des repères d'ordre k ; donnons néanmoins quelques indications sur ce point. Soit Y une variété différentiable et $\pi : Y \to X$ une submersion ; soit W_Y le faisceau sur X qui à U , ouvert de X , associe l'ensemble des champs projetables sur $\pi^{-1}(U)$; W_Y est un faisceau d'algèbres de Lie et la projection π induit un homomorphisme d'algèbres de Lie $W_Y \to \mathcal{T}_X$. Nous dirons avec Ehresmann que (Y,π) est muni d'une structure de "<u>prolongement d'ordre</u> k " de X si l'on s'est donné un relèvement $p : \mathcal{T}_X \to W_Y$ commutant aux crochets, et qui soit un <u>opérateur différentiel d'ordre</u> k , ce qui veut dire ceci : en coordonnées locales, si $Y = X \times Z$, $\xi = a(x)\frac{\partial}{\partial x}$, on a

$$p(\xi) = \Big(\sum_{|\alpha| \le k} p_\alpha(x,z) D_x^\alpha a\Big) \frac{\partial}{\partial z} + a(x)\frac{\partial}{\partial x} .$$

Par exemple, si $Y = T_X$, ou $Y = T_X^*$ la considération du germe de groupe à un paramètre associé à un champ de vecteurs permet immédiatement de munir Y d'une structure de prolongement d'ordre 1 de X (celle structure est d'ailleurs en général sous-entendue quand on parle du "fibré tangent" ou "cotangent"). De même, soit Y le fibré des opérateurs différentiels linéaires d'ordre k sur X, par exemple de $\mathbb{1}$ dans $\mathbb{1}$; par le même procédé, Y est muni d'une structure de prolongement d'ordre k de X. En fait, dans ces exemples, on a même une notion de prolongement plus précise, i.e. un relèvement des automorphismes locaux de X dans ceux de Y, sur lequel nous n'insisterons pas.

Cela étant, p définit une application $\mathcal{O}_X$-linéaire $\bar{p} : J^k(\mathcal{T}) \to W_Y$, avec $p = \bar{p}j^k$, d'où une application $\tilde{p} = \bar{p}\nu : \tilde{J}^k(\mathcal{T}) \to W_Y$; $\tilde{p}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie ; en effet, toute section de $\tilde{J}^k(\mathcal{T})$ s'écrit localement $\sum f_i \tilde{j}^k(\xi_i)$, $f_i \in \mathcal{O}_X$, $\xi_i \in \mathcal{T}$, $\tilde{j}^k = \nu^{-1} j^k$, et il suffit donc de vérifier que l'on a

$$\tilde{p}[f\tilde{j}^k(\xi), g\tilde{j}^k(\eta)] = [fp(\xi), gp(\eta)] ,$$

en identifiant f et g à $\pi^{-1}(f)$ et $\pi^{-1}(g)$; or cela résulte immédiatement des formules

$$\tilde{j}^k[\xi, \eta] = [\tilde{j}^k(\xi), \tilde{j}^k(\eta)] \quad ; \quad \tilde{j}^k(\xi)g = \xi g \;,\; p(\xi)g = \xi g$$

et de l'hypothèse $p[\xi, \eta] = [p(\xi), p(\eta)]$. L'espace (Δ^k, pr_1), muni de $\tilde{j}^k$, apparaît donc comme un "prolongement d'ordre k" particulièrement simple, et même universel en un sens que le lecteur pourra préciser.

Supposons que Y soit un fibré vectoriel sur X ; Y est alors dit "prolongement vectoriel d'ordre k de X" si, pour tout $\xi \in \mathcal{T}_X$, $\theta(p(\xi))$ préserve la structure vectorielle de Y (i.e. le germe de groupe à un paramètre de $p(\xi)$ le préserve) ; si s est un germe de section de Y, on peut alors poser $\theta(\xi)s = \theta(p(\xi))s$, pour $\xi \in \mathcal{T}$, et, plus généralement, $\theta(\xi)s = \theta(\tilde{p}(\xi))s$, pour $\xi \in \tilde{J}^k(\mathcal{T})$. Par exemple, $J^k(T)$ est un espace de prolongement d'ordre $k+1$ de X, et l'on vérifie qu'on a, pour $\xi \in \tilde{J}^{k+1}(\mathcal{T})$, $\eta \in J^k(\mathcal{T})$: $\theta(\xi)\eta = [\xi, \eta]$, le crochet défini en (2.3).

Introduisons enfin le faisceau $\check{J}^k(\mathcal{T})$ des parties principales d'ordre

k sur Δ de champs de vecteurs pr_1-projetables sur X^2 (ou "champs de vecteurs projetables sur X^2 le long de $\Delta^{(k)}$ "). $\check{J}^k(T)$ est la somme de ses deux sous-espaces $J^k(T)$ et $\hat{J}^k(T)$; par ailleurs, on a

$$J^k(T) \cap \hat{J}^k(T) = \{\xi \in J^k(T) \mid \pi_o \xi = 0\} \underset{\text{déf}}{=} J_o^k(T)$$

on a une suite exacte

$$0 \to J^k(T) \to \check{J}^k(T) \to T \to 0 \tag{2.4}$$

la 2e flèche étant la projection pr_1 (et la première l'injection évidente) ; d'autre part l'injection $J^k(T) \to \check{J}^k(T)$ donne en passant au quotient un isomorphisme

$$\check{J}^k(T)/\hat{J}^k(T) \simeq J^k(T)/J_o^k(T)$$

en composant avec la projection π_o , on obtient donc une suite exacte

$$0 \to \hat{J}^k(T) \to \check{J}^k(T) \to J^o(T) \to 0 \ . \tag{2.5}$$

A noter que (2.4) et (2.5) commutent évidemment aux automorphismes π_1-projetables de X^2 qui laissent stable Δ .

3. LA CONNEXION CANONIQUE.

Rappelons d'abord la notion de crochet de formes vectorielles, due à Nijenhuis (voir) Frölicher-Nijenhuis [1]). Soit u une section sur X de $\Lambda^p\mathcal{T}^* \otimes \mathcal{T}$. Alors, on définit $i(u) : \Lambda^q\mathcal{T}^* \to \Lambda^{q+p-1}\mathcal{T}^*$ par la formule suivante : si $u = \alpha \otimes \xi$, α section de $\Lambda^p\mathcal{T}^*$ et ξ section de $\mathcal{T}$, on pose $i(\alpha\otimes\xi)\beta = \alpha\wedge i(\xi)\beta$, i désignant le produit intérieur, on étend ensuite à u quelconque, par linéarité et localisation ; on a

$$i(u)(\beta\wedge\gamma) = i(u)\beta\wedge\gamma + (-1)^{(p-1)\deg\beta}\,\beta\wedge i(u)\gamma \ ,$$

i.e. $i(u)$ est une dérivation de degré $(p-1)$.

Nous écrivons aussi $i(u)\beta = u\,\bar{\wedge}\,\beta$, et nous définirons d'autre part $\beta\wedge u$ par $\beta\wedge(\alpha\otimes\beta) = (\beta\wedge\alpha)\otimes\xi$. Enfin, pour v section de $\Lambda^q\mathcal{T}^*\otimes\mathcal{T}$, nous définirons $u\,\bar{\wedge}\,v$ par

$$(\alpha\otimes\xi)\,\bar{\wedge}\,(\beta\otimes\eta) = (\alpha\wedge i(\xi)\beta)\otimes\eta \quad [= i(\alpha\otimes\xi)\beta\otimes\eta] \ .$$

La dérivation extérieure d est une dérivation de degré +1 sur $\Lambda\,\mathcal{T}^* = \oplus\Lambda^p\mathcal{T}^*$; on pose alors $\theta(u) = [i(u), d]$ (rappelons que le crochet de deux dérivations D et D' de degrés respectifs q et r est par définition la dérivation de degré $q+r$: $DD' - (-1)^{qr}D'D$). Lorsque u est de degré 0 , i.e. est un champ de vecteurs, $\theta(u)$ coïncide avec la dérivée de Lie, d'après la formule de H. Cartan. Dans le cas général, on a

$$\theta(\alpha\otimes\xi)\beta = \alpha\wedge i(\xi)d\beta + (-1)^p d(\alpha\wedge i(\xi)\beta) ,$$

d'où

$$\theta(\alpha\otimes\xi)\beta = \alpha\wedge\theta(\xi)\beta + (-1)^p d\alpha\wedge i(\xi)\beta \quad . \tag{3.1}$$

Soit maintenant $v \in \Lambda^q\mathcal{T}^*\otimes\mathcal{T}$; on montre qu'il existe un unique $w \in \Lambda^{p+q}\mathcal{T}^*\otimes\mathcal{T}$ vérifiant $\theta(w) = [\theta(u), \theta(v)]$; posant $w = [u, v]$, on a

$$[\alpha\otimes\xi, \beta\otimes\eta] = (\alpha\wedge\beta)\otimes[\xi, \eta] + \theta(\alpha\otimes\xi)\beta\otimes\eta - (-1)^{pq}\theta(\beta\otimes\eta)\alpha\otimes\xi \quad . \tag{3.2}$$

On en tire la formule suivante :

$$[u, \beta\otimes\eta] = \theta(u)\beta\otimes\eta + (-1)^{pq}\beta\wedge[u, \eta] - (-1)^{pq+q}(d\beta\otimes\eta)\,\overline{\wedge}\,u \tag{3.3}$$

d'où $[\xi, v] = \theta(\xi)v$, θ désignant la dérivée de Lie, comme toujours.

Enfin, on a l'identité de Jacobi, qui résulte immédiatement de la formule analogue pour les dérivations :

$$[u, [v, w]] = [[u, v], w] + (-1)^{pq}[v, [u, w]] \quad . \tag{3.4}$$

Soit maintenant $\pi : Y \to X$ une submersion. En tout point $b \in Y$, on a une suite exacte

$$0 \to V_{Y,b} \to T_{Y,b} \xrightarrow{\pi'_b} T_{X,\pi(b)} \to 0$$

où $V_{Y,b}$ désigne les vecteurs verticaux de Y en b . Une <u>connexion</u> au sens d'Ehresmann dans Y (relativement à π) est par définition une scission de cette suite exacte , i.e. la donnée, pour tout $b \in Y$ d'un relèvement $\gamma_b : T_{X,\pi(b)} \to T_{Y,b}$ de π'_b ; on suppose que γ_b dépend différentiablement de b . Les éléments de $\mathrm{Im}(\gamma_b)$ s'appellent "vecteurs γ-horizontaux en b". Au lieu de se donner γ , il revient au même de se donner, en tout point b , le projecteur de $T_{Y,b}$ sur $V_{Y,b}$ parallèlement aux vecteurs horizontaux ; comme $V_{Y,b}$ est un sous-espace de $T_{Y,b}$, cela définit une section du fibré $\mathrm{Hom}_Y(T_Y, T_Y) \simeq T_Y^* \otimes T_Y$, i.e. une 1-forme vectorielle ω sur Y que nous appellerons "forme de la connexion".

On vérifie alors facilement le résultat suivant, qui n'est qu'une des nombreuses variantes du théorème de Frobénius : pour que γ soit intégrable, (i.e. pour que le champ $b \mapsto \mathrm{Im}(\gamma_b)$ soit intégrale) , il faut et il suffit qu'on ait $[\omega, \omega] = 0$. Dans le cas général, la forme $\frac{1}{2}[\omega, \omega]$ s'appelle la courbure de γ . A noter aussi qu'une connexion intégrable coïncide avec un "prolongement d'ordre 0" au sens du § 2 .

Prenons en particulier $Y = X^2$, avec $\pi = pr_1$; comme sur tout produit, on a une connexion canonique intégrable, celle dont les vecteurs horizontaux sont annulés par pr_2' . Dans la suite, nous noterons ω la forme de cette connexion ; en coordonnées locales, elle s'écrit
$\omega = \sum dx_i' \otimes \frac{\partial}{\partial x_i'}$, ou encore $\omega = dx' \otimes \frac{\partial}{\partial x'}$.

Soient $\tilde{u} \in \Lambda^p \mathcal{T}^* \otimes \tilde{J}^k(\mathcal{T})$, et $u = (id \otimes \nu)\tilde{u}$; en relevant les formes sur X à X^2 par pr_1^* , on peut considérer que u et $\tilde{u}$ proviennent par passage au quotient de formes vectorielles sur X^2 ; on voit alors tout de suite, par exemple en coordonnées locales, que $\tilde{u} \barwedge \omega$ est bien défini en tant qu'élément de $\Lambda^p \mathcal{T}^* \otimes J^k(\mathcal{T})$, i.e. ne dépend pas du relèvement choisi de $\tilde{u}$, et qu'on a

(3.5) $$u = \tilde{u} \barwedge \omega \quad .$$

La formule suivante est l'analogue dans notre point de vue d'une formule de Guillemin-Sternberg [1] .

Théorème (3.6).

On a $Du = -[\omega, u] = -[\omega, \tilde{u}]$.

Démontrons d'abord cette formule pour $u = \xi \in J^k(\mathcal{T})$; le plus simple est d'opérer en coordonnées locales :

$$-[\omega, u] = \theta(\xi)\omega = \sum \theta(\xi)\ dx_i' \otimes \frac{\partial}{\partial x_i'} + \sum dx_i' \otimes \theta(\xi)\frac{\partial}{\partial x_i'} \quad .$$

Posant $\xi = \sum \xi_j(x, x')\frac{\partial}{\partial x_i'}$, il vient

$$-[\omega, \xi] = \sum_i d\xi_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i'} - \sum_{i,j} dx_i' \otimes \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i'}\frac{\partial}{\partial x_j'}$$

et finalement, en explicitant $d\xi_i$

$$- [\omega, \xi] = \sum_{i,j} dx_j \otimes \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x'_i} = D\xi \quad .$$

Un calcul analogue montre qu'on a $-[\omega, \tilde{\xi}] = D\xi$. Soit maintenant $\alpha \in \Lambda^p \mathcal{T}^*$; d'après (3.4) , on a

$$- [\omega, \alpha\otimes\xi] = - \theta(\omega)\alpha\otimes\xi - (-1)^p \alpha\wedge[\omega, \xi] + (d\alpha\otimes\xi) \overline{\wedge}\, \omega$$

comme $\xi \overline{\wedge}\, \omega = \xi$ et $\theta(\omega)\alpha = 0$ (immédiat par 3.1) , on en tire $-[\omega, \alpha\otimes\xi] = (-1)^p \alpha\wedge D\xi + d\alpha\otimes\xi = D(\alpha\otimes\xi)$, d'où la formule $-[\omega, u] = Du$; la formule $-[\omega, \tilde{u}] = Du$ se démontre de la même manière.

Les formules (3.5) et (3.6) peuvent s'exprimer ainsi : ν est le projecteur de la connexion canonique, restreint à $\tilde{J}^k(T)$, et D est la différentielle de cette connexion. La théorie des équations de Lie pourrait en principe se faire à partir de ces formules, à la manière de Guillemin-Sternberg [1] , voir §4 et 5 ; cependant elles ne semblent pas donner jusqu'à nouvel ordre une forme maniable de la cohomologie de Spencer "sophistiquée" (voir §7). Aussi allons -nous donner une autre version de ces formules, d'apparence un peut plus compliquée, mais qui se révèlera mieux adaptée à notre objet. L'idée consiste, d'une part à utiliser la dualité sur $\mathcal{O}_X$ et non sur $\mathcal{O}_{X^2}$, d'autre part à faire jouer le rôle essentiel à ν^{-1} au lieu de ν .

Nous emploierons les notations suivantes : $J^k(T)^*$ est le fibré dual de $J^k(T)$ sur X , et $J^k(\mathcal{T})^* \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(J^k(\mathcal{T}), \mathcal{O}_X)$ le faisceau de ses sections. Il sera commode ici de commencer les calculs en passant à la limite pour $k \to \infty$, et en redescendant seulement ensuite à k fini ; nous poserons donc $J(\mathcal{T}) = \varprojlim J^k(\mathcal{T})$, la limite étant prise suivant les projections $\pi_k : J^{k+1}(\mathcal{T}) \to J^k(\mathcal{T})$; de même $J(\mathcal{T})^* = \varinjlim J^k(\mathcal{T})^*$; définitions analogues, avec J remplacé par $\tilde{J}$ ou $\check{J}$.

On peut, par exemple, interpréter les sections de $\check{J}(\mathcal{T})$ sur X comme des parties principales d'ordre infini sur Δ des champs de vecteurs pr_1-projetables de X^2 . D'où une structure naturelle de faisceau d'algèbres de Lie sur $\check{J}(\mathcal{T})$, dont $J(\mathcal{T})$ et $\tilde{J}(\mathcal{T})$ sont deux sous-faisceaux d'algèbres de Lie. Par dualité, on munit $\Lambda^* \check{J}(\mathcal{T})^*$ d'une différentielle extérieure, notée d , le procédé suivant :

i) Pour $f \in \mathcal{O}_X = \Lambda^0 \check{J}(\mathcal{T})^*$, df est la différentielle usuelle de f qu'on identifie à son image dans $\check{J}(\mathcal{T})^*$ par l'application pr_1^* transposée de la projection $pr_1 : \check{J}^k(\mathcal{T}) \to \mathcal{T}$.

ii) Pour $\alpha \in \check{J}(\mathcal{T})^*$, on pose

$$\langle d\alpha, \xi\wedge\eta\rangle = \theta(\xi)\langle\alpha,\eta\rangle - \theta(\eta)\langle\alpha,\xi\rangle - \langle\alpha,[\xi,\eta]\rangle$$

$(\xi,\eta \in \check{J}(\mathcal{T}))$, et l'on étend cette opération en une dérivation de degré 1 de $\Lambda\check{J}(\mathcal{T})^*$.

Un calcul classique montre qu'on a $d^2 = 0$. A noter que, localement sur X , la cohomologie du complexe $\Lambda\check{J}(\mathcal{T})^*$ s'obtient facilement par application des résultats de Gelfand-Fuks [1] ; nous n'utiliserons pas ce fait dans cet article.

L'injection naturelle considérée en i), $pr_1^* : \Lambda\mathcal{T}^* \to \Lambda\check{J}(\mathcal{T})^*$ commute à la différentielle extérieure ; dans la suite, nous identifierons $\Lambda\mathcal{T}^*$ à son image par pr_1^* .

Pour $u \in \Lambda\check{J}(\mathcal{T})^*\otimes\check{J}(\mathcal{T})$, on définit alors i(u) et $\theta(u)$ de la même manière que dans le cas usuel, rappelé au début de ce paragraphe. Pour $v \in \Lambda\check{J}(\mathcal{T})^*\otimes\check{J}(\mathcal{T})$, on définit alors $[u,v]$ à partir de (3.2) et (3.3), et l'on a encore $\theta[u,v] = [\theta(u),\theta(v)]$ (mais j'ignore si $\theta(u)$ détermine u , i.e. si $\theta(u) = 0$ entraîne $u = 0$) ; on a encore l'identité de Jacobi (3.4) ; la formule $[\xi,u] = \theta(\xi)u$ sera prise comme définition de $\theta(\xi)$, la "dérivée de Lie " ne pouvant être définie à partir d'un groupe à un paramètre que pour $\xi \in \tilde{J}(\mathcal{T})$, comme on l'a déjà remarqué au § 2.

La connexion canonique $\gamma : \mathcal{T}\to\check{J}(\mathcal{T})$ définit une section χ de $\mathcal{T}^*\otimes\check{J}(\mathcal{T})$, i.e. une forme vectorielle sur $\check{J}(\mathcal{T})$, qui est l'analogue de la forme usuelle $(id-\omega)$ sur X^2 .

<u>Proposition (3.7)</u>.

<u>Soient</u> $\tilde{u} \in \Lambda^p\mathcal{T}^*\otimes\tilde{J}(\mathcal{T})$ <u>et</u> $u = (id\otimes v)\tilde{u}$; <u>on a</u> $Du = [\chi,u] = [\chi,\tilde{u}]$.

Cette formule est l'analogue de (3.6), compte tenu de la formule (facile à établir) : $[id,u] = [id,\tilde{u}] = 0$; sa démonstration est une variante de celle de (3.6).

L'isomorphisme $\nu : \tilde{J}(\mathcal{T}) \to J(\mathcal{T})$ donne, par dualité, un isomorphisme $\nu^* : J(\mathcal{T})^* \to \tilde{J}(\mathcal{T})^*$; en particulier, ν^* est un isomorphisme $J^o(\mathcal{T})^* \to \tilde{J}^o(\mathcal{T})^* \simeq \mathcal{T}^*$. D'autre part, l'isomorphisme (2.4) : $\check{J}(\mathcal{T})/\tilde{J}(\mathcal{T}) \simeq J^o(\mathcal{T})$ donne, par dualité, une injection $J^o(\mathcal{T})^* \to \check{J}(\mathcal{T})^*$; cette injection (contrairement à ν) commute aux automorphismes de X^2 pr_1-projetables en préservant Δ ; aussi pouvons nous, sans inconvénient, identifier $J^o(\mathcal{T})^*$ à son image par cette injection.

Proposition (3.8).

$\Lambda J^o(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}(\mathcal{T})$ <u>est un sous-faisceau d'algèbres de Lie graduées de</u> $\Lambda\check{J}(\mathcal{T})^* \otimes \check{J}(\mathcal{T})$.

En vertu des formules (3.1) à (3.4), il suffit de vérifier ceci : soient $\alpha \in \Lambda^p J^o(\mathcal{T})^*$, et $\xi \in \tilde{J}(\mathcal{T})$; alors, on a $\theta(\xi)\alpha \in \Lambda^p J^o(\mathcal{T})^*$; comme $\theta(\xi)$ est une dérivation, il suffit de vérifier cela pour $p = 1$; or, pour $\eta \in J(\mathcal{T})$, on a $\xi\langle\alpha,\eta\rangle = \langle\theta(\xi)\alpha,\eta\rangle + \langle\alpha,[\xi,\eta]\rangle$ (cette formule résulte immédiatement de la définition de $d\alpha$ et de $\theta(\xi)\alpha$). Prenons en particulier $\eta \in \tilde{J}(\mathcal{T})$; comme $\langle\alpha,\tilde{J}(T)\rangle = 0$, on trouve $\langle\theta(\xi)\alpha,\eta\rangle = 0$, donc $\theta(\xi)\alpha \in J^o(\mathcal{T})^*$, ce qui démontre la proposition.

Pour $\alpha \in \Lambda J^o(\mathcal{T})^*$ et $\xi \in \tilde{J}(\mathcal{T})$, $\theta(\xi)\alpha$ ne dépend que de α et de la projection de ξ dans $\tilde{J}^1(\mathcal{T})$. Il résulte de là que, pour tout $k \geq 1$, $\Lambda J^o(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}^k(\mathcal{T})$ est un faisceau d'algèbres de Lie graduées, quotient du précédent.

Définition (3.9).

i) <u>On désigne par</u> $\bar{\nu}$ <u>l'isomorphisme</u>

$$\nu^*\otimes\nu : \Lambda^* J^o(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}(\mathcal{T}) \to \Lambda^*\mathcal{T}^* \otimes J(\mathcal{T})$$

ii) <u>Soient</u> $\alpha \in \Lambda^* J^o(\mathcal{T})^*$, <u>et</u> $u \in \Lambda^* J^o(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}(\mathcal{T})$; <u>on pose</u>

$$\bar{d}\alpha = \nu^{*-1} d\nu^*\alpha \quad \text{et} \quad \bar{D}u = \bar{\nu}^{-1} D\bar{\nu}u$$

iii) <u>On pose</u> $\bar{\chi} = (\nu^{*-1}\otimes id)\chi$.

On a donc $\bar{\chi} \in J^o(\mathcal{T})^* \otimes \check{J}(\mathcal{T})$; une autre définition de $\bar{\chi}$ peut être obtenue ainsi : l'application $\xi \mapsto \xi \barwedge \bar{\chi}$, $\xi \in \check{J}(\mathcal{T})$ est la projection de $\check{J}(\mathcal{T})$

sur les champs horizontaux de la connexion canonique, parallèlement à $\tilde{J}(\mathcal{T})$, alors que l'application $\xi \mapsto \xi \,\bar{\wedge}\, \chi$ est la projection parallèlement à $J(\mathcal{T})$. En coordonnées locales, on a $\chi = \sum dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}$; $\bar{\chi} = \sum \overline{dx_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($\frac{\partial}{\partial x_i}$, considéré ici comme champ sur X^2 , ou plus exactement, comme section de $\check{J}(\mathcal{T})$.

Le résultat essentiel de ce paragraphe est le théorème suivant, qui est la version des formules de Spencer [2] dans le formalisme développé ici :

<u>Théorème (3.10)</u>.

i) <u>Pour</u> $\alpha \in \Lambda^* J^o(\mathcal{T})^*$, <u>on a</u> $\theta(\bar{\chi})\alpha = \bar{d}\alpha$;

ii) <u>On a</u> $[\bar{\chi},\bar{\chi}] = 0$;

iii) <u>Pour</u> $u \in \Lambda^* J^o(\mathcal{T})^* \otimes \tilde{J}(\mathcal{T})$, <u>on a</u> $\bar{D}u = [\bar{\chi},u]$.

Avant de démontrer ces assertions, donnons une interprétation de $\bar{\chi}$ suggérée par J.L. Koszul. Soit $\mathcal{H}$ le sous-faisceau des champs horizontaux de $\check{J}(\mathcal{T})$; on a une décomposition de $\check{J}(\mathcal{T})$ en une somme directe de deux sous-algèbres de Lie : $\check{J}(\mathcal{T}) = \mathcal{H} \oplus \tilde{J}(\mathcal{T})$; la décomposition précédente donne par dualité une décomposition $\check{J}(\mathcal{T})^* = \tilde{J}(\mathcal{T})^\perp \oplus \mathcal{H}^\perp$, avec $\tilde{J}(\mathcal{T})^\perp = J^o(\mathcal{T})^*$, d'où une bigraduation de $\Lambda \check{J}(\mathcal{T})^*$ (un α étant de type (p,q) s'il appartient à $\Lambda^p \tilde{J}(\mathcal{T})^\perp \otimes \Lambda^q \mathcal{H}^\perp$; comme $\tilde{J}(\mathcal{T})$ et $\mathcal{H}$ sont deux sous-algèbres de Lie, la différentielle d se décompose alors en $d = d'+d''$, d' de type $(1,0)$ et d'' de type $(0,1)$, et l'on a $d'^2 = d''^2 = d'd'' + d''d' = 0$.

Soit p le projecteur $\check{J}(\mathcal{T}) \to \mathcal{H}$ correspondant à la décomposition précédente ; on a $p(\xi) = -\xi \,\bar{\wedge}\, \bar{\chi}$, i.e. $-\bar{\chi}$ est la 1-forme définie par ce projecteur ; de la formule $\theta(\bar{\chi}) = i(\bar{\chi})d - di(\bar{\chi})$, on déduit alors qu'on a $\theta(\bar{\chi}) = -d'$, d'où en particulier $[\theta(\bar{\chi}),\theta(\bar{\chi})] = 0$

(A noter que le projecteur sur $\tilde{J}(\mathcal{T})$ et aussi l'application identique de $\check{J}(\mathcal{T})$ définissant des 1-formes d'un type plus général que celui que nous avons considéré, i.e. des éléments de $\mathrm{Hom}(\check{J}(\mathcal{T}),\check{J}(\mathcal{T}))$ qui n'appartiennent pas à $\check{J}(\mathcal{T})^\perp \otimes \tilde{J}(\mathcal{T})$; les crochets de telles formes peuvent aussi être définis, mais nous n'en aurons pas besoin ici).

Le théorème peut maintenant être démontré :

i) Pour $f \in \mathcal{O}_X$, on a, en coordonnées locales

$$\theta(\bar{\chi})f = i(\bar{\chi})df = \sum \bar{d}x_i \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, df \rangle = \bar{d}f \quad .$$

Ceci, joint au fait que $\theta(\bar{\chi})$ et $\bar{d}$ sont deux dérivations de carré nul de $\Lambda J^o(\mathcal{T})^*$, entraîne le résultat.

ii) On a, d'après (3.2)

$$[\bar{\chi},\bar{\chi}] = \sum_{i,j} \bar{d}x_i \wedge \bar{d}x_j \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] + 2\sum_j \theta(\bar{\chi})\bar{d}x_j \otimes \frac{\partial}{\partial x_j} \quad .$$

Dans cette somme, le premier terme est évidemment nul, et le second est nul d'après i) ; d'où le résultat.

iii) Soient $\xi \in \tilde{J}(\mathcal{T})$ et $\alpha \in \Lambda^p J^o(\mathcal{T})^*$; en vertu de (3.3) et de i), on a $[\bar{\chi},\alpha\otimes\xi] = \bar{d}\alpha\otimes\xi + (-1)^p \alpha \wedge [\bar{\chi},\xi]$; d'autre part, on a la formule suivante qui résulte de la formule analogue pour D :

$$\bar{D}(\alpha\otimes\xi) = \bar{d}\alpha\otimes\xi + (-1)^p \alpha\wedge\bar{D}\xi \quad .$$

Il suffit donc d'établir qu'on a $\bar{D}\xi = [\bar{\chi},\xi] = -\theta(\xi)\bar{\chi}$; comme on a $p = -i'(\bar{\chi})$ (i', produit intérieur droit), il revient au même de démontrer qu'on a $\theta(\xi)p = i'(\bar{D}\xi)$; d'autre part, le projecteur $id-p$ n'est autre que l'application $\check{\nu}$, égale à l'identité sur $\tilde{J}(\mathcal{T})$ et à ν^{-1} sur $J(\mathcal{T})$; comme $\theta(\xi)id = 0$, il suffit d'établir qu'on a

(3.11) $$\theta(\xi)\check{\nu} = -i'(\bar{D}\xi) \quad .$$

Cette formule s'écrit encore ainsi : pour tout $\eta \in \check{J}(\mathcal{T})$, on a

$$[\xi,\check{\nu}\eta] - \check{\nu}[\xi,\eta] = \eta \barwedge \bar{D}\xi \quad .$$

Cela se vérifie facilement en coordonnées locales, et peut être laissé au lecteur. D'où le théorème

<u>Corollaire (3.12)</u>.

<u>Pour</u> $u,v \in \Lambda J^o(\mathcal{T})^*\otimes\tilde{J}(\mathcal{T})$, <u>avec</u> $\deg u = p$, <u>on a</u>

$$\bar{D}[u,v] = [\bar{D}u,v] + (-1)^p[u,\bar{D}v] \quad .$$

Cela résulte aussitôt de (3.4) et de (3.10).

<u>Remarque (3.13)</u> : Il peut être commode dans certains calculs de "transporter" les opérations précédentes dans $\Lambda\, \mathcal{T}^*\otimes\tilde{J}(\mathcal{T})$; de façon précise, posons, pour $\alpha,\beta \in \Lambda\, \mathcal{T}^*$ et $\xi,\eta \in \tilde{J}(\mathcal{T})$.

i) $\bar{\alpha} = \nu^{*-1}\alpha \quad , \quad \bar{\beta} = \nu^{*-1}\beta$;

ii) $ad(\alpha\otimes\xi)\beta = (\nu^{*}\otimes id)\theta(\bar{\alpha}\otimes\xi)\bar{\beta}$;

iii) $D'(\alpha\otimes\xi) = (\nu^{*}\otimes id)\bar{D}(\bar{\alpha}\otimes\xi)$;

iv) $[\alpha\otimes\xi,\beta\otimes\eta] = (\nu^{*}\otimes id)[\bar{\alpha}\otimes\xi,\bar{\beta}\otimes\eta]$.

On a alors,

(3.13.1) $ad(\alpha\otimes\xi)\beta = \theta(\alpha\otimes\xi)\beta - (-1)^{p}D'(\alpha\otimes\xi) \,\bar{\wedge}\, \beta \quad (p = \deg \alpha)$

(3.13.2) $[u,v] = [u,v] - (-1)^{p}D'u \,\bar{\wedge}\, v + (-1)^{pq+q}D'v \,\bar{\wedge}\, u \;(p=\deg u,\; q=\deg v)$

Cela montre que, aux notations près, les opérations introduites ici coïncident avec elles considérées dans Spencer [1] ,[2] .

Démontrons (3.13.1) pour $\alpha = 1$ et β de degré 1 ; on a $\bar{\beta} = \bar{\chi} \,\bar{\wedge}\, \beta$, d'où

$$\theta(\xi)\bar{\beta} = \theta(\xi)\bar{\chi} \,\bar{\wedge}\, \beta + \bar{\chi} \,\bar{\wedge}\, \theta(\xi)\beta = -\bar{D}\xi \,\bar{\wedge}\, \beta + \bar{\chi} \,\bar{\wedge}\, \theta(\xi)\beta$$

et par suite,

$$ad(\xi)\beta = \nu^{*}\theta(\xi)\bar{\beta} = -D'\xi \,\bar{\wedge}\, \beta + \theta(\xi)\beta \quad .$$

Le reste des formules se déduit ensuite de là et de (3.1) et (3.2)

4. EQUATIONS DE LIE POUR LES CHAMPS DE VECTEURS.

Conformément aux définitions de la théorie formelle des équations différentielles (voir Goldschmidt [1]) une "équation d'ordre k sur T " sera un sous-fibré R^k de $J^k(T)$; nous appellerons $\underline{R}^k$ le faisceau de ses sections, et nous poserons $\tilde{R}^k = \nu^{-1}(R^k)$, $\tilde{\underline{R}}^k = \nu^{-1}(\underline{R}^k)$. Les prolongements $R^{k+\ell}$ sont définis de la manière habituelle, sur laquelle nous reviendrons plus loin, et sont des "sous-fibrés à fibre variable" de $J^{k+\ell}(T)$; on dit que "$R^{k+\ell}$ est un fibré" s'il est de rang constant et que "R^k est formellement intégrable" si, pour tout $\ell \geq 0$, $R^{k+\ell}$ est un fibré et la projection $\pi_{k+\ell} : R^{k+\ell+1} \to R^{k+\ell}$ est surjective. Soit $\underline{R}^{k+\ell}$ le faisceau des sections de $R^{k+\ell}$ (qui ne détermine $R^{k+\ell}$ que si ce dernier est un fibré) ; rappelons que les $u \in \underline{R}^{k+\ell+1}$ sont déterminés par récurrence par les conditions suivantes:

$\pi_{k+\ell}u \in \underline{R}^{k+\ell}$, $Du \in \mathcal{T}^*\otimes\underline{R}^{k+\ell}$.

Définition (4.1).

Nous dirons que R^k (ou $\tilde{R}^k$) est une équation de Lie si l'on a $[\tilde{\underline{R}}^k,\tilde{\underline{R}}^k] \subset \tilde{\underline{R}}^k$.

Exemple (4.2) :

Soit $\pi : Y \to X$ un prolongement d'ordre k de X et soit σ une section de Y ; avec les notations du § 2, soit $\tilde{R}^k$ l'ensemble des vecteurs $\xi \in \tilde{J}^k(T)$ tels que $\tilde{p}\xi$ soit tangent à σ , et supposons $\tilde{R}^k$ de rang constant ; alors R^k est une équation de Lie ; l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des $\xi \in \mathcal{T}$ tels que $p\xi$ laisse σ invariant, (i.e. soit tangent à σ). Dans le cas particulier où Y est un prolongement vectoriel de X , la condition "$\xi \in \tilde{\tilde{\underline{R}}}^k$" équivaut à "$\theta(\xi)\sigma = 0$" .

Proposition (4.3).

Soit R^k une équation de Lie. Pour $\ell \geq 0$, on a $[\tilde{\underline{R}}^{k+\ell},\tilde{\underline{R}}^{k+\ell}] \subset \tilde{\underline{R}}^{k+\ell}$; en particulier, si $R^{k+\ell}$ est un fibré, c'est une équation de Lie.

Démontrons la proposition pour $\ell = 1$, le cas général se traitant par récurrence de manière analogue, soient $\xi \in \tilde{\underline{R}}^{k+1}$, $\eta \in \tilde{\underline{R}}^{k+1}$; on a

$$\pi_k[\xi,\eta] = [\pi_k\xi,\pi_k\eta] \in \tilde{\underline{R}}^k$$

et, d'après (3.12)

$$\bar{D}[\xi,\eta] = [\bar{D}\xi,\eta] + [\xi,\bar{D}\eta] = \theta(\xi)(\bar{D}\eta) - \theta(\eta)(\bar{D}\xi)$$

il résulte alors de (3.3) que l'on a $\bar{D}[\xi,\eta] \in J^o(\mathcal{T})^*\otimes\tilde{\underline{R}}^k$, d'où le résultat.

Pour $k+\ell \geq 1$, il résulte de la proposition précédente et de (3.2) que, si R^k est une équation de Lie, $\Lambda J^o(\mathcal{T})^*\otimes\tilde{\underline{R}}^{k+\ell}$ est une sous-algèbre de Lie graduée de $\Lambda J^o(\mathcal{T})^*\otimes\tilde{J}^k(\mathcal{T})$ (par contre pour $k = \ell = 0$, cet énoncé n'a pas de sens, le crochet en question n'en ayant pas !).

La proposition suivante sera énoncée, pour simplifier, sous des hypothèses inutilement restrictives, qui seront les seules à nous servir.

<u>Proposition (4.4).</u>

<u>Soit</u> R^k <u>un sous-fibré de</u> $J^k(T)$; <u>supposons que</u> R^{k+1} <u>soit un fibré et que</u> $\pi_k : R^{k+1} \to R^k$ <u>soit surjectif. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes</u> :

i) R^k <u>est une équation de Lie</u> ;

ii) $[R^{k+1}, R^{k+1}] \subset R^k$;

iii) $[\underline{\tilde{R}}^{k+1}, \underline{R}^k] \subset \underline{R}^k$.

Démontrons i) $\Rightarrow$ iii) . Soient $\tilde{\xi} \in \underline{\tilde{R}}^{k+1}$, $\eta \in \underline{R}^k$, et posons $\tilde{\eta} = \nu^{-1}(\eta)$; on a, d'après (3.11) : $\nu^{-1}(\theta(\tilde{\xi})\eta) = \theta(\tilde{\xi})\tilde{\eta} - \eta \,\overline{\wedge}\, \overline{D}\tilde{\xi} \in \underline{\tilde{R}}^k$; d'où le résultat (à noter qu'ici le fait que R^{k+1} soit un fibré et la surjectivité de $\underline{R}^{k+1} \to \underline{R}^k$ ne sont pas intervenus). Le même calcul, joint à la surjectivité de $\underline{R}^{k+1} \to \underline{R}^k$ démontre l'implication iii) $\Rightarrow$ i) . L'équivalence de i) et ii) se démontre de manière analogue.

Les propositions précédentes peuvent se démontrer d'une manière plus naturelle, sans faire appel au formalisme développé au § 3, à condition d'examiner de plus près la notion de prolongement d'une équation différentielle ; comme nous en aurons besoin dans la suite, nous allons maintenant revenir sur ce point .

Désignons par pr_i (i=1,2,3) les 3 projections $X^3 \rightrightarrows X$, et posons $pr_{ij} = (pr_i, pr_j) : X^3 \to X^2$; soit $\mathcal{J}^{(\ell,k)}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{X^3}$ engendré par $pr^*_{12}\mathcal{J}^\ell + pr^*_{23}\mathcal{J}^k$; le faisceau $\mathcal{O}_{X^3}/\mathcal{J}^{(\ell+1,k+1)}$ a pour support la diagonale Δ_2 de X^3 ; nous le noterons $J^\ell(J^k\mathcal{O}_X)$, et nous le considérerons aussi, par une convention analogue à celle faite au § 1 , comme un faisceau sur X en l'identifiant à son image par pr_1 . Nous noterons quelquefois $\Delta^{(\ell,k)}$ l'espace annelé $(\Delta_2, J^\ell(J^k\mathcal{O}_X))$.

Si E est un fibré vectoriel sur X , nous poserons

$$J^\ell(J^k\mathcal{E}) = pr_3^{-1} \underset{pr_3^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} J^\ell(J^k\mathcal{O}_X)$$

, c'est (i.e. son image par pr_1 est) un faisceau localement libre sur X , et nous désignerons par $J^\ell(J^kE)$ le fibré correspondant. Nous laissons le lecteur examiner quelles identifications rendent ces notations compatibles avec celles du § 1, et avec les notations classiques des "espaces de jets itérés".

Nous désignerons par j^{ℓ} l'application $J^k(\mathcal{E}) \to J^{\ell}(J^k\mathcal{E})$ définie par pr_{23}^{-1} et par λ^{ℓ} l'application $J^{k+\ell}(\mathcal{E}) \to J^{\ell}(J^k\mathcal{E})$ définie par pr_{13}^{-1} ; la première application coïncide avec le "jet d'ordre ℓ" habituel ; quant à la seconde, elle est $\mathcal{O}_X$-linéaire et définit donc un morphisme de fibrés $\lambda^{\ell} : J^{k+\ell}(E) \to J^{\ell}(J^kE)$ qui est définit usuellement ainsi : on prend une section s de E au voisinage $x_o \in X$, d'où par j^k une section de $J^k(E)$, puis par j^{ℓ} une section de $J^{\ell}(J^kE)$, dont la valeur en x_o ne dépend que de $j^{k+\ell}(s)(x_o)$. En coordonnées locales, avec des notations évidentes, ces applications s'écrivent ainsi

$$(j^{\ell}a)(x,x',x") = a(x',x") \quad \mathrm{mod}\ (x'-x)^{\ell+1}, (x"-x')^{k+1}$$

$$(\lambda^{\ell}a)(x,x',x") = a(x,x") \quad \mathrm{mod}\ (x'-x)^{\ell+1}, (x"-x')^{k+1} \quad .$$

Cela étant, soient E et F deux fibrés vectoriels sur X ; soit φ un morphisme $J^k(E) \to F$; désignons encore par φ le morphisme de faisceaux associé ; à φ correspond de manière biunivoque un opérateur différentiel $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, défini par $\Phi = \varphi \circ j^k$; par abus de langage, on appelle encore φ un opérateur différentiel d'ordre k de E dans F, et l'on définit son prolongement d'ordre ℓ $p^{\ell}(\varphi) : J^{k+\ell}(E) \to J^{\ell}(F)$ par la formule $p^{\ell}(\varphi) = (\lambda^{\ell})^{-1} \circ \varphi^{\ell}$, avec φ^{ℓ}, $J^{\ell}(J^kE) \to J^k(E)$ déduit de φ de la manière évidente (en langage élémentaire, $p^{\ell}(\varphi)$ s'obtient en "dérivant Φ jusqu'à l'ordre ℓ"). Posons, pour $x \in X$: $R^{k+\ell}(x) = \ker p^{\ell}(\varphi)(x)$; lorsque R^k est un fibré i.e. lorsque φ est de rang constant, on a $R^{k+\ell} = (\lambda^{\ell})^{-1} J^{\ell}(R^k)$; donc les $R^{k+\ell}$ ne dépendent que de R^k et coïncident avec ceux qui ont été introduits plus haut.

Posons encore $J_o^k(E) = \ker \pi_o : J^k(E) \to J^o(E)$. De l'isomorphisme $J_o^1(\mathbb{1}) \simeq T^*$ (cf §1), on déduit par des produits tensoriels convenables des isomorphismes $J_o^1(E) \simeq T^* \otimes E$ et $J_o^1(J^k(E)) \simeq T^* \otimes J^k(E)$; en écrivant ce dernier isomorphisme comme une égalité, on a alors, pour $f \in J^{k+1}(\mathcal{E})$

(4.5) $$Df = j^1 \pi_k f - \lambda^1 f$$

que nous écrivons aussi, par abus de notation : $Df = j^1 f - \lambda^1 f$ (cf Quillen [1] ; voir aussi la définition de la différentielle d'une fonction dans Grothendieck [1]).

Par suite, si $f \in J^{k+1}(\mathcal{E})$ vérifie $\pi_k f \in \underline{R}^f$, $Df \in \mathcal{T}^* \otimes R^k$, on aura $\lambda^1 f \in J^1(\underline{R}^k)$, donc $f \in \underline{R}^{k+1}$ et réciproquement.

Prenons en particulier $E = T$; on est alors amené à identifier $J^\ell(J^k\mathcal{T})$ aux champs de vecteurs pr_{12}-verticaux sur X^3, modulo $\mathcal{J}^{(\ell+1,k+1)}$. Appelons maintenant "bidiagonaux" les champs ξ sur X^3 qui

i) sont tangents à $pr_{23}^{-1}(\Delta)$

ii) sont pr_{12}-projetables, avec $pr_{12}(\xi)$ diagonal sur X^2.

En passant au quotient par $\mathcal{J}^{(\ell+1,k+1)}$, on obtient un faisceau noté $\tilde{J}^{(\ell,k)}(\mathcal{T})$; en coordonnées locales un tel champ s'écrit

$$\xi = a(x,x',x'')\frac{\partial}{\partial x''} + a(x,x',x')\frac{\partial}{\partial x'} + a(x,x,x)\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{modulo } (x''-x')^{k+1}, (x'-x)^{\ell+1} .$$

L'application $\xi \to a(x,x',x'')\frac{\partial}{\partial x''}$ est un isomorphisme $\tilde{J}^{(\ell,k)}(\mathcal{T}) \to J^\ell(J^k\mathcal{T})$ que nous noterons ν, comme l'application analogue sur X^2 ; nous définirons $\tilde{j}^\ell : \tilde{J}^k(\mathcal{T}) \to \tilde{J}^{(\ell,k)}(\mathcal{T})$ et $\tilde{\lambda}^\ell : \tilde{J}^{\ell+k}(\mathcal{T}) \to \tilde{J}^{(\ell,k)}(\mathcal{T})$ par $\tilde{j}^\ell = \nu^{-1} j^\ell \nu$, $\tilde{\lambda}^\ell = \nu^{-1}\lambda^\ell\nu$; on vérifie immédiatement que $\tilde{J}^{(\ell,k)}(\mathcal{T})$ est un faisceau d'algèbres de Lie, et que $\tilde{j}^\ell$ et $\tilde{\lambda}^\ell$ sont des morphismes d'algèbres de Lie.

La proposition (4.3) résulte des calculs précédents de la manière suivante : soit $R^k \subset J^k(T)$ une équation de Lie ; alors $\tilde{J}^\ell(\tilde{\underline{R}}^k) = \nu^{-1} J^\ell(\underline{R}^k)$ est un sous-faisceau d'algèbres de Lie de $\tilde{J}^{(\ell,k)}(\mathcal{T})$ (en effet, tout élément de $\tilde{J}^\ell(\tilde{\underline{R}}^k)$ s'écrit $\sum f_i \otimes \tilde{j}^\ell \xi_i$, $f_i \in \mathcal{O}_X$, $\xi_i \in \tilde{\underline{R}}^k$, et il suffit d'examiner le crochet $[f \otimes \tilde{j}^\ell \xi, g \otimes \tilde{j}^\ell \eta]$ pour $\xi, \eta \in \tilde{\underline{R}}^k)$; par suite $\tilde{\underline{R}}^{k+\ell} = (\tilde{\lambda}^\ell)^{-1}\tilde{J}^\ell(\tilde{\underline{R}}^k)$ est un sous-faisceau d'algèbres de Lie de $\tilde{J}^{k+1}(\mathcal{T})$. La proposition (4.4) pourrait aussi se démontrer d'une manière analogue, quoiqu'un peu plus compliquée ; nous laisserons cette question au lecteur.

Pour terminer avec les généralités sur les équations de Lie "infinitésimales", il resterait à examiner la version "sophistiquée" du complexe de Spencer. Nous renvoyons la question au § 7, où nous examinerons en même temps le cas "fini" ou "non-linéaire".