LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

M. OUASSOU
S. NODJIRAM

Sur la classification des formes compactes en géométrie projective

Les cahiers de l'analyse des données, tome 19, n° 2 (1994), p. 217-228
<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1994__19_2_217_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. XIX - 1994 n°2 pp.217-228.

SUR LA CLASSIFICATION DES FORMES COMPACTES EN GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

[FORME PROJ.]

*M. OUASSOU, S. NODJIRAM**

On trouve, dans un mémoire principalement consacré à la classification des structures affines et projectives sur les variétés compactes (cf. BENZÉCRI, in *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Vol.88, pp.229-332, 1960: cité, dans la suite: [SMF, page.x]), quelques résultats relatifs à l'ensemble des formes convexes. Il apparaît que ces résultats se généralisent aux formes compactes non convexes; à condition de poser des définitions nouvelles et d'introduire dans certaines démonstrations les modifications appropriées.

Il n'est pas opportun de consacrer ici aux formes compactes un exposé complet; mais nous reprendrons, sous une forme intuitive, l'exposé des résultats que nous utilisons tels quels ou généralisons; en n'entrant dans le détail des preuves que lorsque cela semble nécessaire pour asseoir les assertions que nous croyons nouvelles.

§1 Résultat principal: existence d'une forme projective générique

La transformation projective la mieux connue de tous est celle qui associe à une figure F, d'un plan P, son ombre, F', projetée, à partir d'un centre c, sur un autre plan, P'. On sait que selon la disposition relative de {c F P'}, la forme de F' peut varier grandement. Il n'en est pas moins surprenant qu'il existe, en bref, une figure F dont l'ombre puisse, avec une précision arbitrairement grande, présenter toutes les formes possibles.

Plus précisément, [SMF, p.321] donne la construction d'une forme générique dans l'espace P(n) des formes projectives convexes compactes de la sphère projective à n dimensions, $S\pi(n)$. Cette construction sera généralisée à l'espace PK(n) des formes compactes, dont l'enveloppe est un corps convexe; ce que nous appellerons, en bref, l'espace des formes de corps compacts.

Il importe d'expliquer les termes que nous avons introduits.

(*) Étudiants en Doctorat à l'Université Pierre et Marie CURIE.

§2 Forme de corps convexe et forme de corps compact

Intuitivement, la notion de forme se comprend dans l'espace euclidien usuel: deux parties F et F' ont même forme si F' peut s'obtenir, à partir de F, par une similitude; i.e., le composé d'une homothétie (de centre quelconque), destinée à donner à F la taille de F', et d'un déplacement. Éventuellement, le déplacement n'est pas défini de manière unique: e.g., si F et F' sont des sphères, le déplacement est défini à une rotation près. La notion de taille, quant à elle, n'est définie que pour des parties bornées; plus précisément, en vue des passages à la limite sur des suites de parties, on se restreindra à considérer des parties compactes.

La comparaison des formes prend en compte la dimension: pour une partie F de R^n est défini un support, sup(F) qui est le plus petit sous-espace affin où F est incluse, et aussi l'intersection de tous les sous-espaces affins de R^n contenant F.

Le rapport entre F et sup(F) peut être précisé en introduisant l'enveloppe convexe cnv(F); F étant supposé compact, il en est de même pour cnv(F), qu'on définit simplement comme la réunion de tous les simplexes ayant pour sommets n+1 points, $\{m_i\}$, de F; (on se souvient que l'espace ambiant est R^n;) i.e. comme l'image dans R^n, par l'application barycentre:

$$\Sigma\{x_i \,.\, m_i \mid i=1,\ldots, n+1\}\ ,$$

du produit de la puissance n+1 de F par le simplexe S ensemble des suites de n+1 nombres $\{x_i\}$ positifs ou nuls de somme 1; construction qui prouve que cnv(F) est compacte, comme image continue d'un compact.

Ceci posé, cnv(F) a même support que F: sup(cnv(F)) = sup(F); et, de plus, dans sup(F), cnv(F) a un intérieur non vide. Si, comme dans [SMF], on appelle 'corps convexe' un convexe compact d'intérieur non vide, et 'corps compact' (cf. *supra*) un compact dont l'enveloppe convexe est un corps convexe, on peut dire que l'étude des formes de corps compacts est associée, par cnv, à celle des formes de corps convexes.

§3 L'espace des formes compactes affines

Avant de considérer les formes projectives, passons de la géométrie euclidienne à la géométrie affine. En effet, comme l'espace A(n) des formes affines de corps convexes, l'espace AK(n) des formes affines de corps compacts est un espace compact métrisable; ce qui permet de définir l'espace PK(n) des formes projectives, dont la topologie n'est même pas séparée, comme le quotient d'un espace usuel AK(n).

Sans reprendre la démonstration, (cf. [SMF, pp.292sqq],) on peut dire, en bref, que celle-ci repose sur le fait que, dans l'ensemble des corps compacts aussi bien que dans celui des corps convexes, il existe un domaine compact, Norm, contenant un représentant au moins de la classe des transformés a(F) de chaque corps F par le groupe affin. Pour les convexes, le domaine NormC peut être défini en munissant l'espace affin d'une structure d'espace euclidien, avec une origine, O: Norm est l'ensemble des corps convexes ayant pour centre de gravité O, et ayant même forme quadratique d'inertie que la boule unité de centre O; un tel corps est dit normalisé.

On montre dans [SMF, p.291] que (la dimension n de l'espace étant fixée) tout corps convexe normalisé, élément de NormC, contient une boule de centre O et de rayon fixe Rmin(n), et est contenu dans une boule de centre O et de rayon fixe. Pour les corps compacts, le domaine NormK est simplement défini par la condition d'être l'ensemble des corps compacts F dont l'enveloppe convexe cnv(F) a pour centre de gravité O et a même inertie que la boule unité de centre O; autrement dit, cnv(F) $\in$ NormC : un corps compact normalisé F est caractérisé par la propriété que son enveloppe convexe, cnv(F) est un corps convexe normalisé.

Il faut rappeler que l'écart e(p, F) d'un point p à un compact F d'un espace métrique est défini comme le minimum (nul si p est dans F), de la distance d(p, m) entre p et un point m de F; l'écart e(F', F) d'un autre compact F' relativement à F, est ensuite défini comme le maximum de e(m',F), pour m' $\in$ F'. D'où, cf. [SMF, p.284], une véritable notion de distance entre deux parties compactes, F et F': d(F, F') = sup{e(F', F), e(F, F')}. Autrement dit, d(F, F').est le plus petit nombre d tel que pour tout point m' de F' existe un point m de F avec d(m, m') $\leq$ e; et de même pour F relativement à F'.

Ceci posé, la distance entre deux formes compactes (éléments de AK(n)) se définit comme le minimum de la distance (usuelle, entre parties compactes d'un espace euclidien) entre deux représentants de ces formes dans NormK; ou, ce qui revient au même, entre un représentant F de la première forme, arbitrairement choisi dans NormK, et les images, par rotation de centre O, d'un représentant F' de la deuxième forme.

§4 Corps convexes et corps compacts sur la sphère projective

Au §1, on a introduit, selon l'usage, la géométrie projective en partant de la projection d'un plan P sur un autre plan P', dans l'espace R^3. On sait que cette projection met entre P et P' une correspondance qui n'est pas rigoureusement biunivoque; mais le devient si l'on complète chaque plan par une droite à l'infini: e.g. on dit qu'un rayon cm, parallèle au plan P', défini par le centre c et un point m de P, rencontre P' en un point m', à l'infini.

Toutefois, dans [SMF], on procède autrement. Plutôt que l'espace projectif, Pπ(n), quotient de R^{n+1} - {O} par le groupe des homothéties de rapport non nul (ou encore: espace des droites passant par O), on considère la sphère projective, $S\pi(n)$, quotient de R^{n+1} - {O} par le groupe des homothéties de rapport strictement positif (ou encore: espace des demi droites issues de O). Dans cette représentation, il correspond à une partie convexe de $S\pi(n)$ un ensemble de demi droites dont la réunion est, dans R^{n+1}, un cône convexe, au sens usuel.

De façon précise, un corps convexe peut être défini comme associé à un cône convexe fermé C, d'intérieur non vide, et tel qu'il existe un demi espace ouvert Hh, limité à un hyperplan H passant par O, où est inclus C-{O}: en coupant C par un hyperplan parallèle à H (et inclus dans Hh), on retrouve un corps convexe affin usuel. En général, il est plus facile de passer d'une représentation projective à une représentation affine appropriée en choisissant un hémisphère de $S\pi(n)$ qu'en assignant à un hyperplan de $P\pi(n)$ le rôle d'hyperplan à l'infini.

Un corps compact F de $S\pi(n)$ est un compact qui est inclus dans un hémisphère ouvert: dans cet hémisphère considéré pour espace affin, F a pour enveloppe convexe, un corps convexe cnv(F). La construction de cnv(F) ne dépend pas du choix d'un hémisphère ouvert particulier contenant F, car le cône qui lui correspond n'est autre que l'enveloppe convexe, dans R^{n+1}, du cône associé à F.

L'ensemble des corps convexes de l'espace $S\pi(n)$ sera noté EP(n); pour les corps compacts on note, de même, EPK(n).

§5 Formes projectives de corps convexes et corps compacts

De façon précise, une forme projective $\pi(F)$ d'un corps convexe F s'identifie à la classe d'équivalence, ensemble de tous les transformés de F par les automorphismes projectifs de $S\pi(n)$ (un tel automorphisme étant défini par l'action d'un automorphisme linéaire de R^{n+1} sur l'ensemble $S\pi(n)$ des demi droites issues de l'origine).

Sur l'ensemble P(n) des formes projectives convexes, une topologie est définie par la donnée d'une base de voisinage: si vois(F) est un voisinage de F, dans l'espace des corps convexes, l'ensemble, π(vois(F)), des formes des corps éléments de ce voisinage est un voisinage de la forme $\pi(F)$. Muni de cette topologie, P(n) peut être appelé espace des formes projectives convexes. On définit de la même façon l'espace PK(n) des formes projectives compactes.

Les espaces que l'on considère communément (espace euclidien, partie d'un tel espace munie de la topologie induite; espaces de BANACH; espace des compacts de R^n,...) sont dits espaces séparés: par quoi on exprime la propriété topologique qu'étant donnés deux points distincts, m et m', il existe de ces points des voisinages respectifs vois(m) et vois(m') dont l'intersection est vide;

ceci implique, en particulier, que tout ensemble {m}, réduit à un point m, est un fermé (en effet, le complémentaire de {m} est un ouvert, puisqu'il contient un voisinage de chacun de ses points, m').

Or un espace quotient d'un espace séparé peut n'être pas séparé: tel est le cas pour les espaces de formes projectives, P(n) ou PK(n); à la différence des espaces de formes affines, A(n), AK(n) (cf. supra §3). On a la propriété suivante [SMF, p.321]: il existe dans P(n) des formes génériques, i.e. des éléments π tels que la fermeture de $\{\pi\}$ est l'espace P(n) tout entier. La démonstration peut être complétée pour établir qu'il y a des formes génériques dans l'espace PK(n) des formes projectives de corps compacts.

Exprimons directement, en terme de voisinage entre corps, le fait que la forme projective d'un corps convexe G est générique. Cela revient à dire que, quel que soit le corps convexe F, la forme projective π(F) adhère à π(G); i.e. que π(G) est dans tout voisinage vois(π(F)); ou encore que dans tout voisinage vois(F) on trouve un corps convexe G', image de G par un automorphisme projectif de Sπ(n).

Il importe de souligner que vois(F) est voisinage de F, considéré comme un point ou un élément de EP(n), au sens de la topologie propre à cet espace. En se restreignant aux parties compactes d'un hémisphère ouvert où F est inclus, on a un voisinage de F dans EP(n); et une base de voisinages qui y sont inclus peut être définie en munissant l'hémisphère d'une métrique euclidienne et procédant comme au §3.

Ceci posé, on exprimera en termes de géométrie euclidienne une condition nécessaire et suffisante pour que soit générique la forme projective π(G) d'un corps convexe G. C'est que, quel que soit le corps convexe normalisé F de l'espace euclidien, (F $\in$ NormC, cf. §3,) et le nombre positif ∂, on trouve un corps convexe G', projectivement équivalent à G, dont la distance (euclidienne entre parties compactes) à F soit $\leq\partial$. En remplaçant NormC par NormK, la condition se généralise immédiatement aux formes projectives de corps compacts.

§6 Schéma de la construction d'une forme projective générique

Sans répéter les démonstrations de [SMF], appliquons-nous à traduire, en termes euclidiens, la construction d'une forme projective générique de corps convexe: il apparaîtra (cf. §9) que cette construction se généralise aux corps compacts.

Muni de la distance euclidienne entre parties compactes, l'ensemble NormC est compact: on peut donc choisir dans NormC une suite partout dense $\{F_i \mid i=1, 2,\dots, n\dots\}$. On choisit, de plus, une suite $\{\partial_i \mid i=1, 2,\dots, n\dots\}$, de nombres réels strictement positifs, tendant vers zéro.

Supposons qu'il existe un corps convexe G; une suite:

$\{m_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\ldots\}$

de points intérieurs à G; une suite:

$\{g_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\ldots\}$

de transformations projectives; avec la condition que g_i envoie m_i à l'origine et que la distance euclidienne, dist(G_i, F_i), entre $G_i = g_i(G)$ et F_i soit $<\partial_i$. Il est clair que la forme de G est générique: car, quel que soit le corps F dans NormC et le nombre positif ∂, on peut trouver i tel que $\partial_i<(\partial/2)$ et dist(F_i, F) < $(\partial/2)$; d'où dist(G_i, F) < ∂.

Afin de préparer la construction de G, il est commode d'imposer à G_i une condition plus stricte que dist(G_i, F_i) < ∂i. On demande que G_i coïncide avec F_i, à ceci près qu'au voisinage de deux points de la frontière de F_i, G_i diffère de F_i sur des domaines de diamètre $<\partial_i$; domaines petits, mais où, par l'effet d'échelle propre aux transformations projectives, (effet dont l'allongement des ombres offre l'exemple le plus commun,) se trouvent logés, dans l'un, des images projectives, $Q_{i'}$, des $\{F_{i'} \mid i'<i\}$; dans l'autre, des images de la suite infinie des $\{F_{i'} \mid i'=i+1, i+2, \ldots, n\ldots\}$.

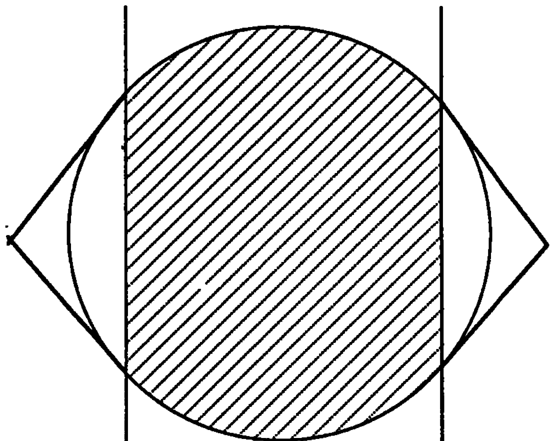
Dans ces conditions, G comprend une suite de convexes Q_i dont chacun, quant à la forme projective, ne diffère du F_i de même rang i, qu'au niveau de deux facettes suivant lesquelles, en bref, il est respectivement en rapport avec Q_{i-1} et Q_{i+1}.

Pour préciser ce schéma, il faut d'abord préciser comment peuvent être choisis les Q_i; puis en décrire l'assemblage, lequel ne s'effectue pas, suivant les facettes, par contact direct; mais avec interposition d'un domaine complémentaire approprié. Nous décrirons donc le prolongement d'un convexe au-delà d'un hyperplan; et le raccordement de deux convexes.

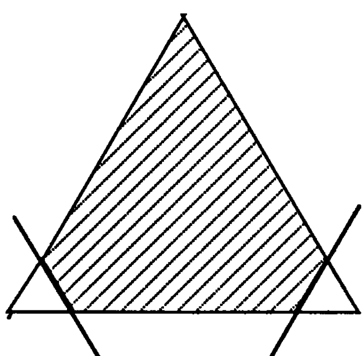
§7 Prolongement d'un convexe au-delà d'un hyperplan

Renvoyant à [SMF, pp.281,sqq] pour un exposé déductif, nous partirons, ici, d'exemples simples de figures planes.

Dans un premier cas, le convexe nomalisé F est un disque; par deux droites, notées H1 et H2, (afin de rappeler qu'il s'agira, en général, d'hyperplans,) on sépare de F des onglets (dont chacun est délimité par un arc et sa corde): il reste un domaine Q, hachuré. Un corps convexe G qui coïncide avec Q dans le domaine délimité par H1 et H2, ne peut différer de Q que dans les deux triangles (laissés en blanc sur la figure) dont chacun a pour côtés l'une des cordes et les deux tangentes au cercle en ses extrémités.



Plus précisément, est admissible, de part et d'autre, comme adjonction à Q, tout convexe comprenant la corde et inclus dans le triangle. Il est clair qu'on peut choisir H1 et H2 de telle sorte qu'en tant que parties du plan euclidien, chaque triangle ait un diamètre inférieur à un nombre ∂ arbitraire; ce qui implique que les distances entre F, Q et G sont $<\partial$.



Dans un deuxième cas, F est un triangle équilatéral; par des droites, H2 et H3, qu'on a choisies (sans que cela s'impose) parallèles à des côtés, on sépare de F deux pointes triangulaires; il reste un polygone Q, hachuré. Un corps convexe, G qui coïncide avec Q dans le domaine délimité par H2 et H3, ne peut différer de Q que dans les pointes triangulaires; auxquelles on peut donner un diamètre $<\partial$, afin que soient $<\partial$ les distances entre F, Q et G.

En général, étant donné un corps convexe F et un seuil ∂, la construction de Q, peut être fondée sur ce qu'on appellera la notion d'hyperplan d'appui strict: i.e. d'hyperplan T dont l'intersection avec F se réduit à un point t. Soit T un tel hyperplan; T', parallèle à T, du côté de F; Q', la partie de F obtenue en retranchant de F ce qui est compris entre T' et T (onglet ou pointe dans les cas particuliers considérés ci-dessus); si T' est assez proche de T, un convexe G prolongeant Q', au-delà de T', sera tel que dist(T',F)<∂. La raison en est que, d'une part, l'intersection S de T' avec F, tendant vers le point t, a un diamètre arbitrairement petit; et que, d'autre part, un point g de G doit être tel que tout segment (g, m), joignant g à un point m de la boule de centre l'origine et de rayon Rmin (boule incluse dans F: cf. §3) coupe T' en un point de S.

Pour construire Q_i, il suffit de trouver deux hyperplans d'appui stricts, {Ta Tb}, en des points distincts, ta et tb de F_i. On peut prendre pour ta un point de la frontière de F_i où est réalisé le maximum de la distance à l'origine O (si F est une sphère, ta est un point quelconque; si F est un simplexe régulier, ta est un sommet); et Ta sera l'hyperplan perpendiculaire au segment (O,ta) en ta. Pour avoir un deuxième appui strict, on peut réaliser dans l'espace une transformation affine de dilatation des distances à la droite (O,ta): avec une dilatation convenable, on aura une distance maxima supérieure à (O,ta); et, en un point tb, nécessairement distinct de ta, où se réalise ce maximum, on aura un deuxième appui strict; lequel existe aussi bien sur F_i, avant dilatation.

§8 Raccordement de deux convexes

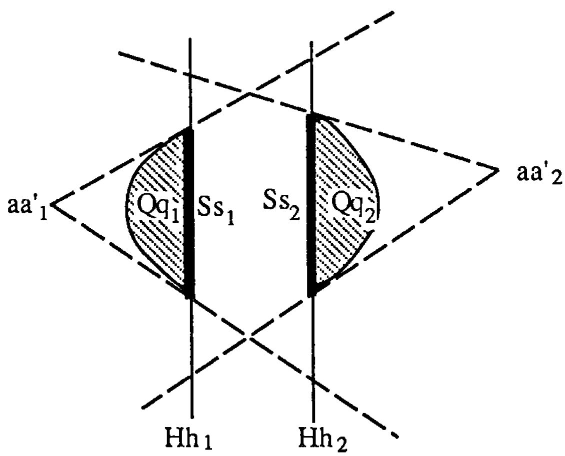
En géométrie euclidienne ou affine, on ne peut construire un convexe qui, d'un côté d'une droite H, soit un disque dont H découpe un onglet; et, de l'autre côté, un triangle dont H découpe une pointe. Mais en géométrie projective c'est possible; parce que, en bref, un disque privé d'un petit onglet a même forme projective que cet onglet; et que, sur le trapèze que constitue un triangle privé d'une pointe, aucun invariant projectif ne distingue la grande base de la petite (les rôles des deux bases pouvant être inversés dans l'ombre relativement à l'objet projeté).

Considérons, en général, le problème du raccordement. On donne d'abord chacun des deux corps à raccorder $\{Q_i \mid i=1,2\}$ dans un espace affin, identifié à un hémisphère de la sphère projective; puis on dispose dans un même espace deux corps, déduits de Q_1 et Q_2 par transformation projective, et dans une position relative telle qu'ils puissent être raccordés.

Q_1 est un corps convexe; H_1, un hyperplan d'appui à Q_1, coupant Q_1 suivant une facette S_1; G_1 un convexe prolongeant Q_1 au delà de S_1; i.e. des deux demi espaces que délimite H_1, l'un a pour intersection avec G_1, le convexe Q_1; et l'autre a avec G_1 une intersection d'intérieur non vide dont on choisit un point a_1. Et de même pour $\{Q_2\ H_2\ S_2\ G_2\ a_2\}$.

Notons a'_i le point diamétralement opposé à ai sur la sphère projective; et Q'_i, le cône de sommet a'_i et de base la facette hyperplane S_i: Q'_i est l'ensemble des segments (a'_i, s_i) joignant a'_i à un point m_i de S_i; segments dont chacun est bien défini parce que a_i n'est pas dans S_i. Plus précisément, Q'_i est un corps convexe parce qu'on peut séparer a_i de Q_i (et, *a fortiori*, de S_i) par un hyperplan; ce qui sur la sphère projective implique l'existence de deux hémisphères complémentaires dont l'un contient a_i à son intérieur; et l'autre a'_i ainsi que Q_i, donc Q'_i.

Le corps Q_i est inclus dans le cône Q'_i: en effet, tout point m_i de Q_i peut être relié à a_i par un segment (a_i, m_i), lequel, étant inclus dans le convexe G_i coupe l'hyperplan H_i en un point s_i de S_i; et en prolongeant (s_i, m_i) au-delà de mi, on a un un segment (s_i, a'_i) passant par m_i et inclus dans le cône Q'_i. Si l'on parvient à raccorder Q'_1 et Q'_2, on aura, *ipso facto*, raccordé Q_1 et Q_2.



De façon précise, plaçons, dans l'espace affin, deux hyperplans parallèles $\{Hh_i \mid i=1, 2\}$; avec, dans Hh_i, un convexe Ss_i, projectivement équivalent à S_i. Un cône de sommet aa'_i quelconque et de base Ss_i est projectivement équivalent à Q'_i; et contient un corps convexe Qq_i projectivement équivalent à Q_i et appuyé sur la facette Ss_i.

À condition de placer convenablement les points aa'_i, on peut faire en sorte que, pour i=1 ou 2, le cône de sommet aa'_i et de base Ss_i, prolongé au delà de sa base, contienne à son intérieur l'autre point $aa'_{i'}$ et l'autre facette $Ss_{i'}$. Alors, l'enveloppe des cônes Qq'_1 et Qq'_2 est un corps convexe, coupant Hh_1 et Hh_2 suivant les facettes Ss_1 et Ss_2; et il en est de même pour les corps convexes Qq_1 et Qq_2.

Ainsi est réalisé le raccordement.

(On prendra garde que, contrairement à ce que suggèrerait la figure plane, sur laquelle les Ss_i sont des segments, il est impossible, en général, d'appliquer Ss_1 contre Ss_2; mais il faut un espace intermédiaire entre les convexes raccordés.)

Plus généralement, on raccordera une suite de corps convexes, telle que celle décrite au §7, en raccordant Q_1 à Q_2 suivant les facettes spécifiées; puis le convexe ainsi obtenu à Q_3; etc; le raccordement se faisant entre des figures projectivement équivalentes aux convexes à raccorder.

§9 Construction d'une forme générique projective de corps compact

On utilise pour les corps compacts, ce qui a été fait aux §§6,7 et 8 pour les corps convexes

Muni de la distance euclidienne entre parties compactes, l'ensemble NormK des corps compacts normalisés (cf. §3) est compact: on peut donc choisir dans NormK une suite partout dense $\{K_i \mid i=1, 2,\dots, n\dots\}$. On choisit, de plus, une suite:

$$\{\partial_i \mid i=1, 2,\dots, n\dots\},$$

de nombres réels strictement positifs, tendant vers zéro. À chaque K_i est associée son enveloppe convexe F_i qui est un corps convexe.

On peut trouver, sur chacun des F_i, deux hyperplans d'appui stricts $\{Ta_i\ Tb_i\}$ en des points $\{ta_i\ tb_i\}$: ces points appartiennent à K_i car, en bref, $\{Ta_i\ Tb_i\}$ doivent toucher K_i dont F_i est l'enveloppe convexe. On choisit des hyperplans $\{T'a_i\ T'b_i\}$, parallèles respectivement à $\{Ta_i\ Tb_i\}$, qui délimitent de F_i un corps convexe Q_i; de telle sorte que le prolongement maximal, Z_i, de Q_i au-delà de $T'a_i$ et $T'b_i$, s'obtienne en adjoignant à Q_i des parties convexes, $\{Xa_i\ Xb_i\}$ dont le diamètre est $<\partial_i$.

Il est clair que tout corps compact K ayant avec Q_i même intersection que K_i, et ayant, de plus, une intersection non vide avec chacun des $\{Xa_i\ Xb_i\}$, est tel que $\mathrm{dist}(K, K_i) < \partial_i$. En effet, d'une part, un point de K non inclus dans K_i est un point de Xa_i (ou de Xb_i); et alors il est à une distance $<\partial i$ du point ta_i (ou tb_i) de K_i. Et, d'autre part, un point de K_i non inclus dans K est dans Xa_i (ou Xb_i); et alors il est à une distance $<\partial_i$ de tout point de l'intersection (non vide par hypothèse) de K avec Ta (ou Tb).

Supposons maintenant qu'on construise un convexe G par raccordement de la suite des Q_i: on a une suite $\{m_i \mid i=1, 2,\dots, n\dots\}$ de points intérieurs à G; une suite $\{g_i \mid i=1, 2,\dots, n\dots\}$ de transformations projectives; avec la condition que g_i envoie m_i à l'origine et que $G_i=g_i(G)$ prolonge Q_i au delà des hyperplans Ta_i et Tb_i. Notons h_i la transformation inverse de g_i. On a dans G une suite de parties convexes $h_i(Q_i)$: en bref, Q_i est dans $G_i = g_i(G)$; et $h_i(Q_i)$ est dans $h_i(G_i) = h_i \circ g_i(G) = G$.

De même, à G est associé un corps compact K, fermeture de l'union des $h_i(K_i)$; K est inclus dans G; l'intersection d'un $g_i(K)$ avec le Q_i de même rang n'est autre que K_i; et, comme on l'a montré ci-dessus, la distance entre les corps compacts $g_i(K)$ et K_i est $<\partial_i$.

Il en résulte que le compact K définit une forme générique projective de corps compact. Ce qui établit le résultat principal proposé au §1.

10 Appendice: figure d'une forme générique projective

Au §8, on a schématisé sur une figure plane le raccordement de deux convexes; mais aucune figure n'illustre le §9. On se propose ici d'excuser cette absence; tout en offrant le schéma d'une construction moins complexe.

Reprenons d'abord les notations du §9. Dans la représentation $g_i(K)$ du compact générique K, la partie K_i apparaît en pleine taille, dans le convexe Q_i, qui ne diffère du convexe normalisé, F_i, centré à l'origine, que par des onglets, de taille $\approx\partial_i$, découpés par les hyperplans $\{T'a_i\ T'b_i\}$. C'est au niveau de ces onglets seulement que $g_i(K)$ lui-même diffère de K_i ; et, pourtant, là se trouvent les images $\{g_i(h_{i'}(K_{i'})) \mid i' \neq i\}$ des compacts qui représentent, en bref, toutes les formes possibles. Mais ces images sont si réduites, dans la vue $g_i(K)$ adaptée à la i-ème forme, qu'on a renoncé à les figurer, même schématiquement.

Proposons maintenant un problème plus simple que la construction d'une forme générique projective de corps compact. On se place en dimension 2; et, de plus, on restreint NormK à l'ensemble, DisqK, des seuls compacts formés du cercle unité et d'un compact quelconque inclus dans le disque unité. Dans DisqK, on choisit une suite partout dense $\{D_i \mid i=1, 2,\ldots, n\ldots\}$. Du raccordement des corps compacts particuliers qui forment cette suite, nous croyons pouvoir donner un schéma qui satisfasse l'intuition.

Le disque unité, d'équation $x^2 + y^2 \leq 1$, est invariant, dans son ensemble, par un groupe à un paramètre de transformations projectives; dont chacune laisse fixes les deux points diamétralement opposés $(x=-1, y=0)$ $(x=1, y=0)$; et, de plus, transforme toute corde parallèle (d'abscisse x) à l'axe des y en une corde de même direction (d'abscisse x'); le décalage $(x \to x')$ étant défini par la relation:

$$(1+x')/(1-x') = m^2 . (1+x)/(1-x) ;$$

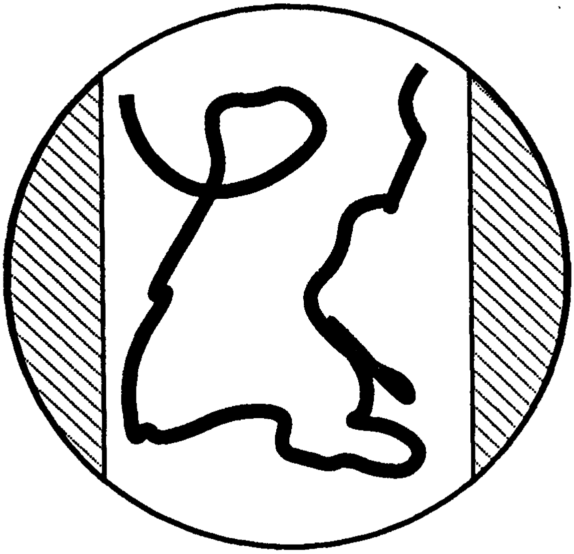
décalage vers la droite ou vers la gauche selon que le paramètre positif, noté m, est >1 ou <1. La tranformation T(m) des deux coordonnées $(x, y) \to (x', y')$ est donnée par les formules:

$$x' = ((m^2-1) + (x.(m^2+1)) / ((m^2+1) + (x.(m^2-1)) ;$$

$$y' = 2.m.y / ((m^2+1) + (x.(m^2-1)) ;$$

(formules que l'on retrouve en considérant le cas, équivalent projectivement, des automorphimes affins d'un domaine parabolique, qui conservent le sommet et transforment entre elles les cordes perpendiculaires à l'axe). En particulier, la transformation de paramètre $f(r) = (1+r)/(1-r)$, (avec $0<r<1$,) transforme la corde d'abscisse -r en la corde d'abscisse +r.

Soit maintenant $\{r_i \mid i=1, 2,\dots, n\dots\}$ une suite de nombres entiers positifs, <1, et tendant vers 1. Au corps nomalisé D_i, associons le corps Δ_i, formé de l'intersection de D_i, avec la bande $(-r_i < x < r_i)$, complétée par les cordes d'abscisse $-r_i$ et r_i, du cercle unité. En bref, Δ_i ne diffère de D_i que quant aux onglets de droite et de gauche; et il est clair que la distance entre les deux corps est arbitrairement petite pour r_i assez voisin de 1.



Ceci posé, un corps K, de forme générique, se décrit bien en considérant les corps Δ_i et les transformations $T_i = T(f(r_i))$. En bref, K comporte le cercle unité; et il se compose, en outre, d'images projectives des Δ_i, logées dans des bandes verticales successives: si l'image de Δ_i est dans la bande (x_i, x_{i+1}), avec $x_{i+1} = T_i(x_i)$, de même, Δ_{i+1} est dans la bande (x_{i+1}, x_{i+2}), avec $x_{i+2} = T_{i+2}(x_{i+1})$; et ainsi de suite. Le point de départ, x_1, importe peu, comme on le voit en ramenant le i-ème corps à prendre la position Δ_i, ce qui, pour i grand, fait disparaître les premiers corps dans l'onglet de gauche.