LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

TH. ETTÉ

Modèle général de classes et modèle de partitions pour le découpage d'une variable unique

Les cahiers de l'analyse des données, tome 16, n° 2 (1991), p. 215-224

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1991__16_2_215_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol XVI 1991 - n° 2 - pp. 215-224.

MODÈLE GÉNÉRAL DE CLASSES ET MODÈLE DE PARTITIONS POUR LE DÉCOUPAGE D'UNE VARIABLE UNIQUE

[MOD. CLASS. PART.]

*Th. ETTÉ**

1 Rappel du modèle général de classes

Dans [MOD. DÉC. VAR.], on part du cas modèle d'un questionnaire redondant fondé sur une variable continue sous-jacente unique dont chaque question réalise le codage suivant un découpage différent; l'ensemble des découpages considérés pouvant être assimilé à une distribution, de masse totale 1, sur l'ensemble infini de tous les découpages possibles.

Plus précisément, au lieu de considérer la masse relative des partitions de (0, 1), on construit le modèle en attribuant directement une masse aux modalités de réponse; dont chacune, même dans le cas fini, peut intervenir dans plusieurs questions; autrement dit, dans plusieurs des partitions retenues pour le segment (0, 1). D'où une distribution de masse, notée q_Z, sur l'ensemble (triangle) Z des sous-intervalles de (0,1):

$$Z = \{\{z_<, z_>\} \mid 0 \leq z_< < z_> \leq 1\} \ .$$

la donnée de la mesure q_Z, assujettie à certaines conditions, suffit pour écrire l'équation des facteurs et en démontrer d'importantes propriétés.

Cependant reste posé le problème, seulement évoqué dans [MOD. DÉC. VAR.] §3 *in fine*, de la construction d'un modèle de partitions à partir de la seule loi q_Z. Il est aisé de voir que ce problème admet, en général, de multiples solutions. Nous nous proposons ici d'en construire une, qu'on peut appeler doublement *markovienne*. Pour plus de clarté, nous partirons du cas où q_Z est un système fini de masses ponctuelles; en d'autres termes, un système fini pondéré d'intervalles.

(*) Étudiant en Doctorat; Université Pierre et Marie Curie.

Les cahiers de l'analyse des données - 0339-3097/91/02 215 10/$ 3.00/ © Gauthier-Villars

2 Modèle fini de classes et modèle de partitions

2.1 Système fini pondéré compatible de classes

Au cas fini, sont adaptées des notations plus simples que celles du cas général. Nous définirons un système fini pondéré compatible de classes (J, q_J) par les données suivantes:

J : ensemble fini pondéré de sous-intervalles *j* du segment (0, 1) ;

q_j : poids attribué à l'intervalle *j* ;

la condition de normalisation étant:

$$\forall\, x \in]0, 1[\quad : \Sigma\{q_j \mid j \in J\,;\, x \in j\} = 1 \quad ;$$

on sait que cette condition généralise la *forme disjonctive complète*, selon laquelle tout individu rentre dans un même nombre de modalités.

Notons N l'ensemble des *nœuds*, ou points de]0,1[qui servent d'origine, et donc aussi d'extrémité, à des segments du système J; soit:

$g(j), d(j)$: origine et extrémité de *j* : $j = [g(j), d(j)[$;

$$N = \{ n \mid n \in]0,1[\,;\, \exists\, j \in J : n \in \{g(j), d(j)\}\}\ ;$$

alors, au niveau de chaque nœud, on a la condition de compatibilité, conséquence de la condition déjà écrite:

$$\forall\, n \in N : \Sigma\{q_j \mid j \in J\,;\, d(j) = n\} = \Sigma\{q_j \mid j \in J\,;\, g(j) = n\} = \pi_n \quad ;$$

dans cette formule, le poids π_n du nœud est défini comme valeur commune aux sommes des poids des segments qui ont *n* pour origine ou pour extrémité.

Il sera commode d'attribuer le poids zéro à tout sous-intervalle de (0,1) qui n'est pas dans J; et de même à tout point de]0,1[qui n'est pas un nœud.

2.2 Poids des chaînes et partitions

On appellera *chaîne* de degré *r* une suite ordonnée de (r+1)points du segment (0,1): une chaîne *c* de degré *r* a, outre son origine et son extrémité notées respectivement g(c) et d(c), (r-1) nœuds; et elle comprend *r* segments ou *maillons*. Un segment isolé est une chaîne de degré 1; un point peut être regardé comme une chaîne de degré 0. Une partition est une chaîne ayant 0 pour origine et 1 pour extrémité.

Ceci posé, on se propose d'associer à un système fini pondéré compatible de classes (J, q_J) un système fini pondéré (P, q_P) de partitions; de telle sorte que:

la somme des poids des partitions soit 1 ;

toute classe *j* d'une partition *p* de P appartienne à J; et la somme des poids q_p des partitions *p* comprenant *j* ne soit autre que le poids q_j de *j*.

La construction se fait en attribuant un poids à toute chaîne; et en montrant que les partitions qui, en tant que chaîne, ont reçu un poids non nul constituent un système P convenable. Le poids d'une chaîne de degré *r* se calcule en divisant le produit des poids de ses *r* segments par le produit des poids de ses (r-1) nœuds. Avec la convention 0/0=0, et compte tenu de ce que les segments et nœuds non compris dans J ont poids nul, on voit que seules reçoivent poids non nul les chaînes dont tous les maillons sont des segments du système J donné.

La pondération des chaînes se justifie comme suit, par récurrence. Partons d'un segment isolé *j*, considéré comme une chaîne de º 1 qui a le poids q_j. Si $n=d(j)\neq 1$, on peut prolonger la chaîne à droite; le choix s'offre entre tous les segments *j'* dont l'origine $g(j')=d(j)=n$; le poids total de ces segments est π_n. Il est naturel d'attribuer à chacun d'eux le poids relatif $(q_{j'}/\pi_n)$; d'où pour la chaîne formée des deux segments *j* et *j'* le poids $(q_j.q_{j'}/\pi_n)$ que nous avons postulé.

On trouve le même poids pour une chaîne, quel que soit le maillon dont on parte, en prolongeant vers la droite, vers la gauche, ou des deux côtés à la fois. Si l'on se représente la construction d'une chaîne comme un processus de fractionnement du segment (0,1) à partir d'un segment donné, on peut dire que le processus est *markovien*, en ce sens que la probabilité d'adjoindre un segment ne dépend que du nœud où l'on est; et non de ce qu'il y a de l'autre côté du nœud.

Si deux chaînes *c* et *c'* ont respectivement le nœud *n* pour origine et pour extrémité, alors la chaîne *c"* obtenue en prolongeant *c* par *c'* a pour poids:

$$p(c") = p(c).p(c') / \pi_n$$

2.3 Calcul de la somme des poids des partitions

Reste à montrer que les partitions qui ont ainsi reçu un poids non nul constituent un système dont le poids total est 1. À cette fin nous poserons la définition suivante: on dira qu'une chaîne *c'* prolonge une chaîne donnée *c* de *r* maillons à droite (resp. gauche) si *c'* s'obtient en ajoutant effectivement *r* maillons à droite (resp. gauche) de *c*, ou si *c'* s'obtient en ajoutant en nombre moindre de maillons (éventuellemnt 0) mais se termine à l'extrémité 1 (resp. débute en 0).

Ceci posé, il est facile de montrer, par récurrence sur r_d et r_g, que la somme des poids des chaînes prolongeant une chaîne donnée *c* de r_d maillons à droite et

r_g maillons à gauche est égale au poids de c. On part du cas (r_d=1, r_g=0): si g(c)=1, la proposition est évidente, car c n'a d'autre prolongement à droite qu'elle-même; sinon elle résulte de la définition du poids. Le cas (r_d=0, r_g=1) se traite de même; puis, tout autre cas.

Sous l'hypothèse faite que sont finis J, ensemble des segments donnés, donc aussi N, ensemble des nœuds, il résulte que la somme des poids des partitions contenant un maillon donné j est égal à q_j: en effet, il suffit de définir cet ensemble comme l'ensemble des chaînes prolongeant j de r maillons à la fois à gauche et à droite, r désignant un entier (d'ailleurs quelconque) supérieur à card(N).

Partons maintenant d'un point quelconque, x, de l'intervalle]0,1[; (point dont on pourra supposer, pour plus de clarté, qu'il n'est pas un nœud; bien que l'on ait spécifié, sans ambiguïté, que $x \in j$ si et seulement si x est dans l'intervalle [g(j),d(j)[fermé à gauche et ouvert à droite...;) soit J(x) la partie de J définie par la condition:

$$J(x) = \{j \mid j \in J \,;\, g(j) \leq x < d(j)\};$$

alors toute partition p (de poids non nul) contient un maillon et un seul appartenant à J(x); donc la somme des poids de toutes les partitions n'est autre que la somme des poids de tous les éléments de J(x); donc, en vertu de la condition de normalisation imposée au §2 à (J, q_J), cette somme est 1; c.q.f.d..

À la donnée de tout système pondéré compatible d'intervalles (J, q_J), on a associé, par un processus de fragmentation doublement markovien, un système pondéré de partitions (P, q_P), de poids total 1, et tel que la somme des poids des partitions contenant chaque segment j vaut p_j.

3 Modèle de partitions pour un modèle général de classes

Dans le cas général, on ne peut partir de la notion de poids attribué à une chaîne individuelle; car, e.g., dans le cas de modèles continus dont le §3 de [MOD. DÉC. VAR.] offre des exemples, toute chaîne individuelle a masse nulle. On doit donc définir directement une distribution de masse sur l'ensemble des chaînes; et nous reprenons les notations générales de l'article [MOD. DÉC. VAR.] auquel nous renvoyons.

L'ensemble des chaînes est la réunion d'une infinité de composantes définies par la valeur du degré: on considérera successivement des chaînes de º croissant. Sur l'intervalle]0,1[, on a la distribution q_X des points de division entre segments: donc une distribution de masse sur les chaînes de º0. Les chaînes de º1 ne sont autres que les segments, pour lesquels on a la distribution notée q_Z, avec ses trois composantes q_{Z° , q_{Y-} , q_{Y+} . Afin de donner une masse aux chaînes de º supérieurs, on reliera q_Z à q_X par des transitions.

3.1 Transitions vers la droite et vers la gauche entre origine et extrémité et réciproquement

Considérons q_Z comme une distribution de masse sur le carré $[0,1] \times [0,1]$ que nous noterons $X \times X$: la première projection "origine", $pr_<$: $(z \to z_<)$, envoie la distribution $q_{Z°}$ sur la somme de $\delta_X{}^0$ (masse unité à l'origine) et de q_X; plus précisément, en séparant les segments dont l'origine est 0 de ceux dont l'origine est dans $]0,1[$, on a:

$$pr_<(q_{Y-}) = \delta_X{}^0 \quad ; \quad pr_<(q_{Z°} + q_{Y+}) = q_X \quad ;$$

il existe donc une transition probabiliste vers la droite (non unique) qui, en bref, associe à un point de division $x \in]0,1[$ la loi de l'extrémité des segments commençant en x; et satisfait à la relation suivante (écrite avec les notations du calcul des transitions; pour lesquelles nous renvoyons à la leçon [Note Lim.], TIIB, n°1, §5, du Traité sur *L'Analyse Des Données*):

$$(\delta_X{}^X \times D_X{}^X) \circ q_X = q_{Z°} + q_{Y+} \quad ;$$

i.e., on a la loi du segment en faisant le produit cartésien de la transition identité, qui garde l'origine du segment, par la transition droite, qui donne l'extrémité.

On définit de même une transition vers la gauche à partir de la deuxième projection "extrémité", $pr_>$: $(z \to z_>)$; en séparant les segments dont l'extrémité est 1 de ceux dont l'extrémité est dans $]0,1[$, on a:

$$pr_>(q_{Y+}) = \delta_X{}^1 \quad ; \quad pr_>(q_{Z°} + q_{Y-}) = q_X \quad ;$$

et la transition vers la gauche doit satisfaire à la relation:

$$(G_X{}^X \times \delta_X{}^X) \circ q_X = q_{Z°} + q_{Y-} \quad ;$$

i.e., on a la loi du segment en faisant le produit cartésien de la transition à gauche, qui donne l'origine du segment, par la transition identité, qui en garde l'extrémité.

3.2 Distribution de masse sur l'ensemble des chaînes

L'ensemble des chaînes de º r sera ici noté X^{r+1}, $X(r+1)$ ou $X...X$; la distribution de masse cherchée sur ces chaînes sera $q_{X(r+1)}$; avec cette notation on aura $q_Z \approx q_{XX}$. L'ensemble $]0,1[$ étant noté $X°$, on notera $X(r)X°$ ou $X°X(r)$ (resp. $X°X(r-1)X°$) le sous-ensemble des chaînes dont l'extrémité est distincte de 1 ou l'origine de 0 (resp. les deux); en introduisant $X°$ en indice on spécifiera des restrictions de la loi des chaînes; ce qui permet de récrire avec plus de concision des formules du §3.1:

$$q_X \approx q_{X^\circ} \ ; \ q_Y = q_{0X^\circ} \ ; \ q_{Y+} = q_{X^\circ 1} \ ; \ q_{X^\circ X^\circ} = q_{Z^\circ} \ ;$$

$$q_{Z^\circ} + q_{Y-} = q_{XX^\circ} \ ; \ q_{X^\circ X} = q_{Z^\circ} + q_{Y+} \ ;$$

$$(G_X{}^X \times \delta_X{}^X) \circ q_X = q_{XX^\circ} \quad ; \quad (\delta_X{}^X \times D_X{}^X) \circ q_X = q_{X^\circ X} \ ;$$

Ces formules suggèrent de construire la distribution sur les chaînes de º 2 (à 2 segments) en partant du point de division (distribué suivant la loi q_{X°) et effectuant la transition à droite et à gauche; ou en effectuant la transition d'un seul côté à partir des segments (sous réserve que la transtion vers la droite, resp. gauche, s'effectue à partir d'un point distinct de 1, resp. 0):

$$\begin{aligned} q_{XXX} &= (G_X{}^X \times \delta_X{}^X \times D_X{}^X) \circ q_{X^\circ} \\ &= ((G_X{}^X \times \delta_X{}^X) \otimes \delta_X{}^X) \circ q_{X^\circ X} \\ &= (\delta_X{}^X \otimes (\delta_X{}^X \times D_X{}^X)) \circ q_{XX^\circ} \ ; \end{aligned}$$

l'équivalence de ces formules résulte de l'égalité de transitions:

$$\begin{aligned} (G_X{}^X \times \delta_X{}^X \times D_X{}^X) &= ((G_X{}^X \times \delta_X{}^X) \otimes \delta_X{}^X) \circ (\delta_X{}^X \times D_X{}^X) \\ &= (\delta_X{}^X \otimes (\delta_X{}^X \times D_X{}^X)) \circ (G_X{}^X \times \delta_X{}^X) \ ; \end{aligned}$$

égalité qu'on peut démontrer simplement en faisant agir ces transitions sur une masse ponctuelle unité quelconque $\delta_{X^\circ}{}^X$.

La distribution sur les chaînes de º r+3 (r=0,...) est définie par transition soit vers la droite soit vers la gauche à partir des chaînes de º r+2; ou encore par double transition à partir des chaînes de º r+1:

$$\begin{aligned} q_{X(r+4)} &= ((G_X{}^X \times \delta_X{}^X) \otimes \delta_{X(r+2)}{}^{X(r+2)}) \circ q_{X^\circ(r+2)X} \\ &= (\delta_{X(r+2)}{}^{X(r+2)} \otimes (\delta_X{}^X \times D_X{}^X)) \circ q_{XX^\circ(r+2)} \\ &= ((G_X{}^X \times \delta_X{}^X) \otimes \delta_{X(r)}{}^{X(r)} \otimes (\delta_X{}^X \times D_X{}^X)) \circ q_{X^\circ(r+2)} \ ; \end{aligned}$$

égalité qu'on déduit d'une égalité de transitions:

$$\begin{aligned} &((G_X{}^X \times \delta_X{}^X) \otimes \delta_{X(r)}{}^{X(r)} \otimes (\delta_X{}^X \times D_X{}^X)) \\ &\quad = ((G_X{}^X \times \delta_X{}^X) \otimes \delta_{X(r+2)}{}^{X(r+2)}) \circ (\delta_{X(r+1)}{}^{X(r+1)} \otimes (\delta_X{}^X \times D_X{}^X)) \end{aligned}$$

$$= (\delta_{X(r+2)}{}^{X(r+2)} \otimes (\delta_X{}^X \times D_X{}^X)) \circ ((G_X{}^X \times \delta_X{}^X) \otimes \delta_{X(r+1)}{}^{X(r+1)}) \quad ;$$

égalité démontrée par action sur une masse ponctuelle quelconque de X°(r+2).

3.3 Le modèle de partitions

Pour construire ce modèle et en démontrer les propriétés, il sera commode d'user de notations condensées. Nous poserons:

$$[XX°(r)X] \approx q_{XX°(r)X} \;;\; [X°(r)X] \approx q_{X°(r)X} \;;\; [0X°(r)] \approx q_{0X°(r)} \;;\ldots\;;$$

avec ces notations, on a des formules telles que:

$$[XX°(r)X] = [0X°(r)1] + [0X°(r+1)] + [X°(r+1)1] + [X°(r+2)] \;;$$

les masses des termes de chaînes ainsi définis seront notées en remplaçant les crochets par des accolades, avec certaines expressions particulières:

$$\{X°(r)\} = \text{masse}([X°(r)]) \;;\; \{X°(2)\} = @ \;;\; \{0X°(r)1\} = P(r) \;;$$

@ est la masse de la mesure $q_{X°X°} = q_{Z°}$ des segments inclus dans]0,1[; on sait que la trace (somme de v.p.) vaut (@+1): nous ferons l'hypothèse que @ est une quantité finie; P(r) est la masse de l'ensemble des partitions de ºr+1 (à *r* nœuds).

Le modèle M est défini comme une distribution de masse sur l'ensemble des partitions de tout degré:

$$M = \Sigma\{[0X°(r)1] \mid r = 1, 2, 3,\ldots\};$$

on montrera que M est une loi de probabilité; i.e. que la série de terme général P(r) est convergente et a pour somme: P(1) + P(2) +... = 1; puis on vérifiera que le modèle M redonne par projection la distribution q_Z des segments utilisée pour le construire.

3.3.1 Propriétés de convergence

En fonction de @ et des P(r), on peut exprimer la masse des termes et préciser la structure du modèle; on a:

$$\{X°(2)\} = @ \;;\; \{0X°\} = \{X°1\} = 1 \;;\; \{01\} = 0 \;;$$

de ce que les transitions $G_X{}^X$ et $D_X{}^X$ conservent la masse, on déduit, par récurrence des relations entre les masses de termes différents quant au º:

$$\{0X°(2)\}+\{0X°1\} = \{0X°X\} = \{0X°\} = 1 \;;\; \{0X°(2)\} = 1\text{-}P(1) \;;$$

$$\begin{aligned}\{0X°(r)\} &= \{0X°(r\text{-}1)X\} - \{0X°(r\text{-}1)1\} = \{0X°(r\text{-}1)\} - P(r\text{-}1)\\ &= 1 - (P(1) + P(2) + \ldots + P(r\text{-}1)) = R(r\text{-}1);\end{aligned}$$

dans la formule ci-dessus, on a introduit la notation R(r-1) parce que cette différence apparaîtra comme un reste, quand on aura montré que la somme de la série des P(h) converge vers 1.

$$\{X°(3)\} = \{XX°(2)\} - \{0X°(2)\} = \{X°(2)\} - \{0X°(2)\}$$
$$= @ + P(1) - 1 = @ - R(1) \;;$$
$$\{X°(4)\} = \{X°(3)\} - \{0X°(3)\} = @ - (R(1) + R(2)) \quad ;$$
$$\{X°(r+2)\} = @ - (R(1) + R(2) + \ldots + R(r))$$
$$= @ + (r.P(1)+(r-1).P(2)+\ldots+P(r)) - r$$
$$= @ - (r+1).(1-(P(1)+P(2)+\ldots P(r))) - (r.P(r)+(r-1).P(r-1)+\ldots+P(1))$$
$$= @ - ((r+1).R(r) + (P(1)+2.P(2)+\ldots +(r-1).P(r-1)+r.P(r)))$$

De ce que $\{X°(r)\}$ est ≥ 0, on déduit d'abord que converge la série de terme général R(r); donc que $R(r) \to 0$; et que la série de terme général P(r) a pour somme 1: le modèle M est bien une loi de probabilité. Il apparaît ensuite que converge la série de terme général r.P(r): ce qui est satisfaisant car la somme de cette série est l'espérance mathématique du nombre de nœuds d'une partition dans le modèle M.

On s'interroge alors sur la limite de r.R(r) quand $r \to \infty$; cette quantité est inférieure au reste de la série de terme général r.P(r), car:

$$r.(P(r)+P(r+1)+P(r+2)+\ldots) \leq r.P(r)+(r+1).P(r+1)+(r+2).P(r+2)+\ldots$$

la limite de r.P(r) est donc 0. Il en résulte que:

$$\lim_{r\to\infty}\{X°(r)\} = @ - \Sigma\{r.P(r) \mid r=1, 2, 3,\ldots\} \;;$$

et on montrera, au §3.3.2, que cette limite est nulle; donc que la trace @+1 est bien aussi l'espérance mathématique du nombre de maillons.

3.3.2 Lois des segments selon le modèle

Tout terme de la distribution de masse mise sur les chaînes permet de définir par projection des distributions de masses sur les segments: on précisera par un soulignement de quel maillon il s'agit; i.e., quels sont les deux points consécutifs de la chaîne définissant la projection considérée; ainsi dans:

$$[\underline{0X°}X°(r)] \;,\; [X°(g)\underline{X°X°}X°(d)1] \;,\; [0X°\underline{X°X°}X°(3)1] \;,$$

il s'agit respectivement du premier maillon d'une chaîne de º r+1 issue de l'origine 0; du (g+1)-ème maillon d'une chaîne de º (g+d+2); du 3-ème maillon d'une partition de [0,1] en 7 segments; etc...

Ceci posé, affirmer que la loi des segments selon le modèle est celle postulée au départ équivaut à poser trois équations, respectivement pour les segments issus de 0, ceux aboutissant en 1, et ceux inclus dans $]0,1[=X^\circ$:

$$[0X^\circ] = \Sigma\{[\underline{0X^\circ}X^\circ(r\text{-}1)1] \mid r = 1, 2, 3, \ldots\} \;;$$

$$[X^\circ 1] = \Sigma\{[0X^\circ(r\text{-}1)\underline{X^\circ 1}] \mid r = 1, 2, 3, \ldots\} \;;$$

$$[X^\circ X^\circ] = \Sigma\{[0X^\circ(g)\underline{X^\circ X^\circ}X^\circ(d)1] \mid g = 0, 1, 2,\ldots \;;\; d = 0, 1, 2,\ldots\} \;;$$

les démonstrations reposent sur le fait que la transition vers la droite ou vers la gauche utilisée pour prolonger une chaîne ne change pas la distribution des maillons existants.

Démontrons d'abord la première égalité; on a:

$$[0X^\circ] = [\underline{0X^\circ}1] + [\underline{0X^\circ}X^\circ]$$

$$= [\underline{0X^\circ}1] + [\underline{0X^\circ}X^\circ 1] + [\underline{0X^\circ}X^\circ(2)1] + \ldots + [\underline{0X^\circ}X^\circ(r)1] + [\underline{0X^\circ}X^\circ(r+1)] \;;$$

dans la formule écrite la masse du membre de gauche est 1; et, dans la somme de droite, les $r+1$ premiers termes ont pour masse $P(1)$, $P(2)$,...; ce qui suffit à établir que le dernier est un reste qui tend vers zéro quand $r\to\infty$; C.Q.F.D. La deuxième égalité s'établit de façon semblable.

Pour développer $[X^\circ X^\circ]$, on suppose qu'un maillon central est prolongé à droite et à gauche *r* fois; d'où la décomposition suivante:

$$[X^\circ X^\circ] = \Sigma\{[0X^\circ(g)\underline{X^\circ X^\circ}X^\circ(d)1] \mid g<r \;;\; d<r\}$$

$$+ \Sigma\{[0X^\circ(g)\underline{X^\circ X^\circ}X^\circ(r)] \mid g<r\} + \Sigma\{[X^\circ(r)\underline{X^\circ X^\circ}X^\circ(d)] \mid d<r\}$$

$$+ [X^\circ(r)\underline{X^\circ X^\circ}X^\circ(r)] \;;$$

dans cette décomposition, le premier terme fournit précisément le début du développement souhaité; la masse du 2-ème terme, comme celle du 3-ème, se majore d'après les calculs du §3.3.1, en tenant compte de la convergence de la série dont le terme est $R(h)$; on a:

$$\Sigma\{\{0X^\circ(g+r+2)\} \mid g<r\} < \Sigma\,\{R(h) \mid r<h\} \;;$$

$$\Sigma\{\{X^\circ(r+d+2)1\} \mid d<r\} < \Sigma\,\{R(h) \mid r<h\} \;;$$

reste le dernier terme dont il résultera que la limite est 0 si l'on montre que, comme on l'a annoncé, $0=\lim_{h\to\infty}\{X^\circ(h)\}$.

L'égalité suivante, obtenue, comme de règle, par transition à gauche, précise la décroissance de $\{X^\circ(h)\}$:

$$[X^\circ(h)\underline{X^\circ}] = [0X^\circ(h)\underline{X^\circ}] + [X^\circ(h+1)\underline{X^\circ}] \;;$$

il apparaît non seulement que la masse $\{X°(h)\}$ ne peut que décroître en fonction de *h*; mais encore que la distribution du dernier maillon de la chaîne est une mesure positive décroissante; si cette mesure ne tendait pas vers 0, elle tendrait vers une limite non nulle $\mu_{X°}$: il nous suffira donc d'écarter cette dernière hypothèse. Procédons pour cela par transition à droite; on a:

$$D_X{}^X \circ [X°(h)\underline{X°}] = [X°(h+1)\underline{X°}] + [X°(h+1)\underline{1}] \quad ;$$

en d'autres termes, la transition à droite transforme la loi de l'extrémité d'une chaîne $[X°(h+1)]$ de º h en la loi de l'extrémité d'une chaîne $[X°(h+2)]$ de º h+1; à ceci près qu'on perd une partie de la masse qui tombe à l'extrémité 1. Or la perte de masse ainsi réalisée doit tendre vers 0 quand $h \to \infty$, puisque la masse $\{X°(h)\}$ tend en décroissant vers une limite; cependant, si la limite de la distribution de l'extrémité est $\mu_{X°} \neq 0$, on devra perdre une masse finie à chaque application de $D_X{}^X$, parce que cette transition est strictement croissante latéralement vers la droite pour la loi $p_{X°}$, et donc aussi pour $\mu_{X°}$ qui est dominée par $p_{X°}$. Cette propriété de croissance latérale résulte de l'hypothèse essentielle que p_Z n'a pas de masse sur la diagonale du carré $[0,1] \times [0,1]$, i.e. qu'il n'y a pas de segments de longueur nulle: on conçoit qu'avec de tels segments, l'extension de la chaîne par transition puisse ne pas produire un modèle de partitions adéquat faute d'aboutir aux extémités de [0,1].

4 Conclusion

Il apparaît qu'à tout modèle général de classes ayant une trace finie on peut associer un modèle de partitions, satisfaisant, de plus, à des conditions de fragmentation de type markovien. Le cas d'une trace infinie (@ = ∞ dans les notations du §3.3) ne semble pas intéresser directement l'analyse des données codées par découpage de variables en classes; il pose cependant d'intéressants problèmes de géométrie...