

ADNAN AMMOURA

Géométrie anallagmatique et triangulation de Delaunay

Les cahiers de l'analyse des données, tome 13, n° 4 (1988),
p. 425-430

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1988__13_4_425_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE ET TRIANGULATION DE DELAUNAY

[TRIANG. DELAUNAY]

AMMOURA ADNAN*

Памяти Б. Н. ДЕЛОНЕ посвящается

1 Triangulation et décomposition simpliciale

Le terme de triangulation est communément utilisé en géodésie pour désigner la mise en place sur le terrain d'un système de triangles dont toutes les dimensions peuvent être calculées à partir de la mesure d'un seul côté d'un seul triangle et des mesures des angles, effectuées par visées. Aussi n'est-il pas tout à fait surprenant de trouver dans le *Bulletin du Comité Français de Cartographie*, un article où, sous le titre de "Pyramides de triangulations", B. Pasquier expose des notions qui intéressent la théorie des graphes et l'analyse des données.

Formellement, B. Pasquier part d'un ensemble I de points du plan; l'enveloppe convexe $\text{conv}(I)$ (ou plus petit polygone convexe contenant tous les points i de I) peut, de plusieurs manières (excepté si $\text{card}I < 4$), être considérée comme la réunion d'un ensemble de triangles ayant chacun pour sommets 3 points de I et deux à deux sans point intérieur commun. Une telle décomposition de $\text{conv}(I)$ en triangles est appelée "triangulation de I ". Du point de vue pratique toutes les triangulations ne sont pas également intéressantes: on évite, dans la mesure du possible, les triangles effilés ayant un angle obtus très ouvert; on recherche les triangles voisins de la forme équilatérale. D'où l'intérêt de la *triangulation de Delaunay*, caractérisée par la propriété que le cercle circonscrit à chacun de ses triangles ne contient, à son intérieur, aucun point de I . Il est remarquable qu'une telle triangulation existe quel que soit I ; et qu'elle soit même unique si l'on met à part le cas exceptionnel (et d'ailleurs facile à traiter) où il existe dans I un ou plusieurs systèmes de 4 points cocycliques (par exemple un

(*)Assistant à l'Université de Damas: Département de Mathématiques, et Étudiant en Doctorat à l'Université Pierre et Marie Curie: Laboratoire de Statistique, Paris.

carré peut être indifféremment découpé suivant l'une ou l'autre de ses diagonales).

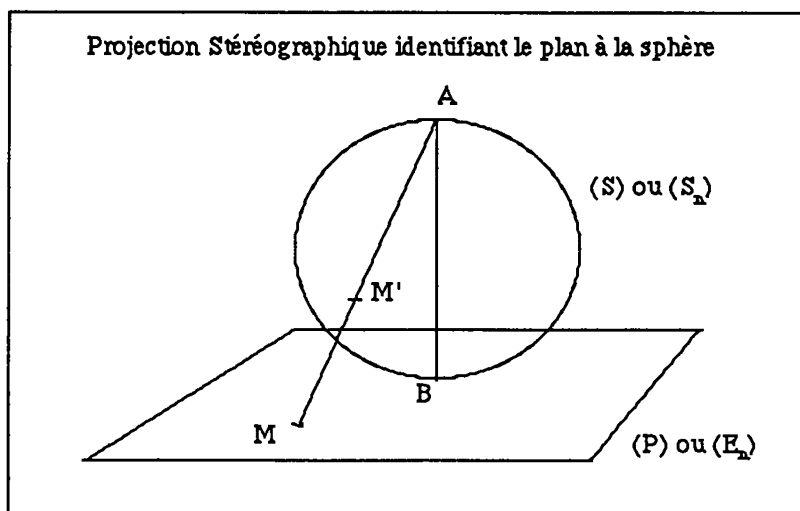
La notion de triangulation et celle de triangulation de Delaunay se généralisent au cas d'un ensemble I de points d'un espace euclidien E_n de dimension n quelconque. On parle alors de *décomposition simpliciale* de l'enveloppe convexe $\text{conv}(I)$. Dans une telle décomposition, $\text{conv}(I)$ est considéré comme la réunion d'un ensemble de simplexes ayant chacun pour sommets $n+1$ points de I et deux à deux sans point intérieur commun. (Si, par exemple, $n=3$, ces simplexes sont des tétraèdres usuels). Une telle décomposition sera dite décomposition de Delaunay, si la sphère, ou hypersphère, circonscrite à chacun de ses simplexes ne contient à son intérieur aucun point de I . On montrera que cette décomposition existe quel que soit I ; et qu'elle est unique, exception faite du cas, analogue à celui signalé pour $n=2$, où il existe dans I un ou plusieurs systèmes de $n+2$ points appartenant à une même sphère S_{n-1} .

Dans la conclusion de son article, B. Pasquier envisage d'appliquer, notamment à la recherche du plus proche voisin, ce qu'il appelle: "*un algorithme d'hypertétraédration de Delaunay actuellement inconnu du moins de nous-même*". L'objet de la présente note est de montrer que, dans le cadre de la géométrie anallagmatique, tout ce qui concerne les décompositions de Delaunay - démonstration d'existence et d'unicité, construction, caractère local - se ramène à l'étude classique de l'enveloppe convexe dans un espace affine de dimension $n+1$, supérieure d'une unité à celle de l'espace E_n , où est donné I .

2 Géométrie anallagmatique

La définition d'une triangulation, ou, plus généralement, d'une décomposition de Delaunay ne fait pas référence aux structures affines ou projectives d'alignement, mais aux cercles, sphères et hypersphères et aux disques et boules dont ils sont les frontières. Même si l'on considère des simplexes, il est facile de voir que ceux-ci interviennent essentiellement d'une part comme des entités combinatoires, et d'autre part comme définissant des sphères. Il est donc naturel de reformuler le problème dans le cadre de la géométrie anallagmatique.

Cette géométrie étudie les propriétés des sphère ou hypersphères considérées comme des ensembles munis de la relation quaternaire qui lie 4 points situés sur un même cercle. De ce point de vue, (si 4 points alignés du plan sont considérés comme un cas particulier de 4 points situés sur un même cercle), un plan complété par un point unique à l'infini (compactification d'Alexandrov) est équivalent à une sphère usuelle; un espace euclidien E_n , complété par un point à l'infini est l'équivalent d'une sphère S_n . Classiquement, la sphère est identifiée au plan par la projection stéréographique laquelle, étant donné un point A de la sphère S et le plan tangent P au point B diamétralement opposé à A sur



S , fait correspondre à tout point M' de S le point M où la droite AM rencontre P ; construction qui se généralise immédiatement en toute dimension. Les transformations anallagmatiques de la sphère, c'est à dire les transformations biunivoques respectant la relation quaternaire de cocyclicité, (i.e. transformant les cercles en cercles), peuvent se réaliser par des transformations projectives de l'espace ambiant, laissant invariante dans son ensemble la sphère, (ou l'hypersphère).

Voyons comment se pose le problème des décompositions de Delaunay, d'abord en dimension 2, puis pour n quelconque. Partons d'un ensemble fini I de points du plan P . Par projection stéréographique, I peut être identifié à un ensemble I' de points d'une sphère S . Il importe de noter que, du point de vue métrique usuel, cette identification peut aboutir à des figures I' très diverses, selon le rayon de la sphère S choisie, et son point de contact B avec P . Du point de vue anallagmatique, toutes ces figures sont équivalentes; mais leur diversité est intéressante pour les constructions que nous ferons finalement.

Dans le plan P , on considère l'enveloppe convexe $\text{conv}(I)$, et la triangulation doit recouvrir $\text{conv}(I)$, et non le reste du plan. En particulier, si un cercle C enferme à son intérieur l'ensemble I tout entier, la triangulation est également enfermée dans C . Du point de vue anallagmatique, cette restriction ne se justifie pas: un cercle C partage la sphère en deux parties jouant des rôles totalement symétriques; et, en particulier, une transformation anallagmatique telle

qu'une inversion peut amener l'une de ces parties à prendre la forme d'une calotte aussi petite qu'on le voudra. On doit donc chercher une décomposition de la sphère, dans sa totalité. C'est précisément une telle décomposition que l'on obtient, si l'on prend comme notion fondamentale celle de simplexe ou facette de Delaunay, définie ci-après.

3 Facette de Delaunay et décomposition de Delaunay

Plaçons-nous maintenant sur la sphère S_n , réalisée dans un espace euclidien E_{n+1} ; et considérons un ensemble I' de points de S_n , assujéti d'abord à la condition générique qu'il n'y ait pas $n+2$ points de I' appartenant à une même sous-variété sphérique, Σ_{n-1} de S_n ; (une telle sous-variété, cercle dans le cas $n=2$, n'est autre que l'intersection de S_n avec un hyperplan de l'espace ambiant). On dira qu'une partie f de I' comprenant $n+1$ points définit une facette de Delaunay si la sphère circonscrite à cet ensemble (autrement dit la sous variété sphérique passant par ces $n+1$ points; ou encore, l'intersection de S_n avec l'hyperplan de l'espace ambiant passant par ces $n+1$ points) divise S_n en deux parties dont l'une ne contient pas de point de I' à son intérieur.

Dans l'espace ambiant E_{n+1} , la caractérisation des facettes de Delaunay est immédiate: f est une facette de Delaunay si l'hyperplan h support de f partage l'espace en deux demi-espaces dont l'un ne contient aucun point de I' à son intérieur; ou encore si f est une facette de l'enveloppe convexe de I' dans l'espace ambiant. Parce que la sphère elle-même est convexe, il est clair que tout point de I' est un sommet de cette enveloppe convexe, dont l'ensemble des faces constitue la décomposition de Delaunay cherchée.

Dans le cas générique où nous nous sommes placé d'abord, toutes les faces sont des simplexes et la décomposition existe et est unique. S'il y a dégénérescence, (par exemple, en dimension 2, si 4 points de I' sont sur un même cercle), on peut, en déplaçant arbitrairement peu les points de I' se placer dans le cas générique, où il y a existence et unicité; d'où, par passage à la limite, existence, même s'il y a dégénérescence; mais non unicité, ainsi qu'on l'a vu dans l'exemple du carré.

Il est maintenant facile de revenir au cas initial d'un ensemble I de points considérés dans E_n . Par projection stéréographique, les points i sont relevés suivant des points i' de l'espace E_{n+1} . On a les formules

$$i'_p - b_p = (i_p - b_p) a^2 / (a^2 + r^2); \{p=1,2,\dots,n\}$$

$$i'_{n+1} = a r^2 / (r^2 + a^2);$$

où on a noté respectivement i_p , i'_p , b_p les coordonnées des points i et i' et du point de contact B de S_n avec E_n ; r est la distance de i à B ; et a , le diamètre de

S_n . L'enveloppe convexe de I est constituée par un ensemble fini de facettes de Delaunay. Parmi celles-ci, seules sont à conserver pour la décomposition de l'enveloppe convexe $\text{conv}(I)$ de I dans E_n celles dont l'hyperplan support h partage l'espace E_{n+1} en deux demi-espaces fermés dont l'un contient à la fois I et le pôle A ; si, au contraire, h sépare A de I , il s'agit d'une facette f qui sur la sphère S_n correspond, par projection stéréographique, à une partie de l'extérieur de $\text{conv}(I)$ dans E_n .

On peut encore dire que se placer dans une représentation euclidienne E_n , revient à faire choix, sur la sphère S_n , du point A auquel sera dévolu le rôle de point à l'infini; et que, dans la décomposition de $\text{conv}(I)$ (dans E_n) subsistent seules les facettes de Delaunay dont la sphère circonscrite Σ délimite sur S_n une calotte vide de tout point de I (i.e. ne contenant pas de point de I à son intérieur) dans laquelle ne soit pas inclus le point à l'infini A . Ces facettes peuvent également être caractérisées comme étant les facettes de l'enveloppe convexe (dans E_{n+1}) de $I \cup \{A\}$, n'ayant pas A pour sommet.

En conclusion, nous répéterons que nous avons raisonné dans le cas générique où les facettes de l'enveloppe convexe de I sont toutes des simplexes; mais que l'on peut toujours se ramener à ce cas en déplaçant arbitrairement peu un ou plusieurs des points de I .

Références bibliographiques

A) Sur la décomposition de Delaunay

B. Delaunay: Sur la sphère vide, *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 7^e Série, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, 1934, pp. 795-799.

B. Pasquier: *Cartographie numérique des domaines. Structuration, modélisation algorithmique*. Thèse de Doctorat d'État, Université P. et M. Curie. Paris, 1987.

B. Pasquier: Pyramides de triangulation, *Bulletin du Comité Français de Cartographie*, fascicule n° 115, bulletin n° 5, Mars 1988, pp.59-63.

B) Sur la recherche de l'enveloppe convexe

D. Maïti: L'enveloppe convexe d'un ensemble de points du plan: algorithme commenté en problème et programme; *CAD*, Vol IV, n°2, 1979, pp. 175-188.

D. Maïti: Programme de construction et de tracé d'une enveloppe convexe en 3 dimensions; *CAD, Vol IV, n°2*, 1979, pp. 189-210.

Remerciements

L'auteur remercie Madame M.-M. Thomassin qui lui a communiqué le travail de B. Pasquier, Pyramides de triangulation, paru dans le *Bulletin du Comité Français de Cartographie* .