

D MAÏTI

Calculs de divers angles associés aux sommets d'un polyèdre convexe

Les cahiers de l'analyse des données, tome 4, n° 3 (1979),
p. 281-287

[<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1979__4_3_281_0>](http://www.numdam.org/item?id=CAD_1979__4_3_281_0)

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

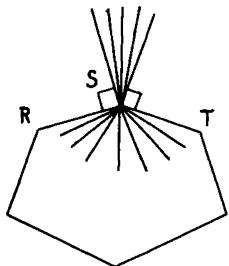
CALCULS DE DIVERS ANGLES ASSOCIÉS AUX SOMMETS D'UN POLYÈDRE CONVEXE [ANGL. SOMM. CONV.]

par D. Maïti ⁽¹⁾

Comme on l'explique ailleurs (cf HODOGRAPHE) l'étude géométrique des gerbes de particules produites dans une collision p-p à haute énergie, peut se faire dans l'espace à trois dimensions en associant à chaque particule émergente son vecteur vitesse. Les calculs effectués à ce propos nous paraissent mériter d'être présentés à tous ceux qui s'intéressent à la géométrie des corps convexes. C'est pourquoi la présente note est écrite indépendamment de l'application que nous avions en vue. On se bornera ici aux principes géométriques : le programme de calcul lui-même est à la disposition des spécialistes qui nous le demanderaient.

1 Les sommets d'un convexe : cône contingent et cône supplémentaire

1.1 Cas d'un convexe du plan : On appelle angle de contingence en S ; l'angle balayé par les demi-droites issues de S, et rencontrant le convexe en d'autres points que S.



Dans le cas d'un polygone convexe, cet angle est compris entre les deux côtés issus de S : SR, ST.

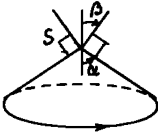
L'angle supplémentaire est balayé par les demi-normales orientées vers l'extérieur, aux droites d'appui au convexe en S (droite d'appui en S = droite passant par S et frontière d'un demi-plan fermé contenant le convexe) : il est clair que l'angle supplémentaire est limité par les perpendiculaires aux deux côtés SR et ST issus de S. On voit que les deux angles sont supplémentaires au sens usuel du terme : i.e. leur somme est égale à π .

1.2 Cas tridimensionnel : On définit de même un cône de contingence, engendré par les demi-droites issues de S et rencontrant le convexe en d'autres points que S ; tandis que le cône supplémentaire, au cône de contingence est engendré par les normales (orientées vers l'extérieur) au plan d'appui au convexe en S (plan d'appui en S = plan passant par S et frontière d'un demi-espace fermé contenant le convexe). On peut voir que la relation de complémentarité est une relation réciproque entre cônes convexes : e. g. dans le cas considéré ici le cône de contingence au convexe est engendré par les demi-normales extérieures au plan d'appui à son propre cône supplémentaire.

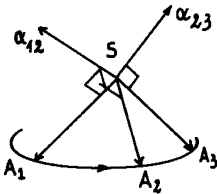
(1) Laboratoire de physique corpusculaire. Collège de France.
Laboratoire de statistique. Université P. et M. Curie.

2 Cônes convexes et cônes supplémentaires ; quelques exemples : Les exemples qui suivent montrent la diversité des formes d'un convexe au voisinage d'un de ses sommets ; et préparent les calculs expliqués dans la suite.

- 2.1 Cône de révolution de demi-angle d'ouverture α : Le cône supplémentaire a pour demi-angle d'ouverture β
 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Ce cas est une généralisation facile du cas du plan.



- 2.2 Cône polyédral ayant pour arêtes les demi-droites $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$:



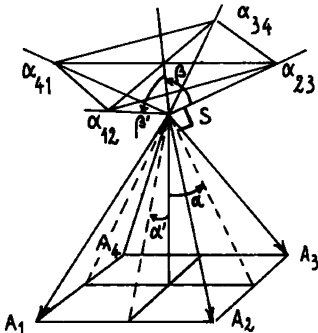
Le cône supplémentaire a pour arêtes les perpendiculaires (extérieures) aux faces $(SA_1, SA_2), (SA_2, SA_3), \dots, (SA_n, SA_1)$: si la succession des arêtes $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ est orientée dans un sens convenable (sens direct si $A_1 A_2 \dots A_n$ est le plan horizontal et que S est au-dessus de ce plan) on a :

$$\vec{S\alpha}_{12} = \vec{SA}_1 \wedge \vec{SA}_2 ; \vec{S\alpha}_{23} = \vec{SA}_2 \wedge \vec{SA}_3 ; \dots ; \vec{S\alpha}_{n1} = \vec{SA}_n \wedge \vec{SA}_1.$$

Avec ces formules la réciprocity de la supplémentarité est en évidence ; on a : $\vec{S\alpha}_{12} \wedge \vec{S\alpha}_{23} \parallel \vec{SA}_2$; $\vec{S\alpha}_{23} \wedge \vec{S\alpha}_{34} \parallel \vec{SA}_3$; $\vec{S\alpha}_{34} \wedge \vec{S\alpha}_{41} \parallel \vec{SA}_4$; etc.

L'angle $(\vec{SA}_1, \vec{SA}_2)$, encore appelé face 12 du cône polyédral $(SA_1 A_2 \dots A_n)$, est pour le cône supplémentaire $(S\alpha_{12} \alpha_{23} \dots \alpha_{n1})$ le supplémentaire de l'angle dièdre formé par les deux faces qui se coupent suivant $S\alpha_{12}$; i.e. $(\vec{SA}_1, \vec{SA}_2)$ est supplémentaire de l'angle formé par les deux plans $(S\alpha_{n1}, S\alpha_{12})$ et $(S\alpha_{12}, S\alpha_{23})$. Ou encore (réciprocity) (l'angle dièdre compris entre les deux demi-plans (SA_1, SA_2) et (SA_2, SA_3)) a pour supplémentaire l'angle de face $(S\alpha_{12}, S\alpha_{23})$ du cône supplémentaire (angle formé par les normales à ces demi-plans orientés vers l'extérieur du dièdre). Notons que le cas $n = 3$ d'un trièdre (SA_1, SA_2, SA_3) et de son supplémentaire est étudié classiquement en géométrie dans l'espace.

- 2.3 Cône pyramidal à base rectangulaire : Le sommet S est sur l'axe



perpendiculaire au plan horizontal du rectangle $A_1 A_2 A_3 A_4$ en son centre ; dans le plan horizontal au-dessus de S, le cône supplémentaire a pour base un losange. Soit α l'angle du plan $SA_2 A_3$ avec la verticale : on voit que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ est l'angle de l'arête $S\alpha_{23}$ avec la verticale ; de même si $SA_1 A_2$ fait avec la verticale l'angle α' , l'arête $S\alpha_{12}$ fait avec la verticale l'angle $\beta' = \pi/2 - \alpha'$.

3 Forme d'un cône convexe et paramètres de formes

3.1 Pointes, plats et pinces : Les exmples du § 2 suggèrent quelques caractères globaux de la forme d'un polyèdre convexe au voisinage d'un point extrémal (ou sommet) S.

On a une *pointe* de demi-angle d'ouverture α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$; α *petit*) si :

$$\forall p, p' \in [1, n] : \text{angle} (\vec{SA}_p, \vec{SA}_{p'}) < 2\alpha \text{ (ou } \cos(\vec{SA}_p, \vec{SA}_{p'}) > \cos 2\alpha).$$

On a un *plat* de demi-angle caractéristique α ($\alpha < \frac{\pi}{2}$; α *grand*) si : le cône supplémentaire présente une *pointe* dont le demi-angle d'ouverture est $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ i.e. si :

$$\forall p, p' \in [1, n] : \text{angle} (\vec{SA}_{p, p+1}, \vec{SA}_{p', p'+1}) < 2\beta$$

(ici on pose, comme d'usage pour un cycle : $n+1 \approx 1 = \vec{SA}_{n, n+1} = \vec{SA}_{n, 1}$).

Notons α_{MAX} (resp β_{MAX}) la moitié de l'angle d'ouverture, i.e. de l'angle maximum formé par deux génératrices du cône contingent (resp. de son supplémentaire) ; (pour le calcul de ces angles). L'exemple du § 2.3 montre que l'on peut avoir simultanément $2\alpha_{\text{MAX}}$ *grand* et $2\beta_{\text{MAX}}$ *grand*. On dira alors qu'on a une *pince*. A la limite les deux arêtes $\vec{SA}_p, \vec{SA}_{p'}$, dont l'angle est $2\alpha_{\text{MAX}} \# \pi$, définissent un *pli* de la *pince* ; et $\pi - 2\beta_{\text{MAX}}$ est l'angle du plus petit dièdre contenant la *pince* à son intérieur.

3.2 Paramètres à calculer : Nous proposons donc de calculer 4 paramètres angulaires

α_{MAX} : demi-angle d'ouverture du cône contingent ; ainsi qu'on l'a dit, une faible valeur de α_{MAX} correspond à une *pointe*.

β_{MAX} : demi-angle d'ouverture du cône supplémentaire : une faible valeur de β_{MAX} correspond à un *plat* ; tandis qu'une valeur grande simultanément pour α et β caractérise une *pince*.

SL : angle solide du cône contingent : une valeur de SL voisine du maximum 2π , correspond à un *plat*.

SU : angle solide du cône supplémentaire : une valeur de SU voisine du maximum 2π caractérise une *pointe*. Dans le cas d'une *pince*, on a simultanément SL et SU petits ; car en bref le cône contingent est resserré dans un dièdre dont le demi-angle d'ouverture est $(\pi/2) - \beta$; et de même le cône supplémentaire est dans un dièdre de demi-angle $(\pi/2) - \alpha$.

De plus on s'intéresse au calcul d'une distance

DT : distance du sommet considéré à l'enveloppe convexe des autres sommets du polyèdre.

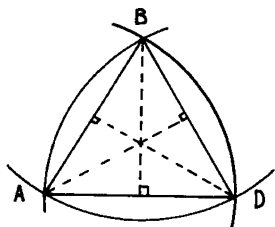
Dans la suite on donne les principes géométriques du programme que nous avons écrit pour le calcul de ces paramètres.

4 Calcul de l'angle d'ouverture d'un cône polyédral : L'angle d'ouverture n'est autre qu'un diamètre angulaire : d'où le § 4.1 qui suit.

4.1 Diamètre : On appelle *diamètre* d'une partie C d'un espace métrique le maximum de la distance entre deux points de C et on écrit :

$$\text{Diam}(C) = \sup\{\text{dist}(M, M') \mid M, M' \in C\}.$$

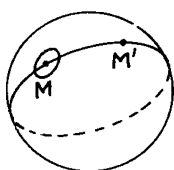
Suivant cette définition, le diamètre d'un disque du plan est le diamètre usuel. Toutefois il est faux que toute partie C du plan telle que $\text{Diam}(C) = 2R$ puisse être incluse dans un disque de rayon R ; le contre-exemple figuré ici donne, probablement le cas le plus défavorable (i.e. réalise le maximum du rapport du diamètre du cercle, circonscrit à C au diamètre $\text{Diam}(C)$) .



L'exemple est le suivant : C est l'ensemble des trois points A, B, D ; formant un triangle équilatéral ; la frontière est formée de trois arcs de cercle ; $\widehat{AB}$, $\widehat{BD}$ et $\widehat{DA}$, centrés respectivement en D, A et B ; tous de rayon $2R$; on a donc $\text{Diam}(C) = 2R$; mais le cercle circonscrit, qui est celui circonscrit au triangle ABD, a pour diamètre $(2/\sqrt{3})(2R)$.

4.2 Angle d'ouverture et diamètre : Un cône usuel, ou ensemble de demi-droites, dites rayons, issues d'un même point 0 dans l'espace R^3 , est complètement décrit par sa base sphérique, ou ensemble des impacts des rayons sur la sphère de centre 0 et de rayon 1. On appellera angle d'ouverture du cône le maximum de l'angle de deux rayons : ce n'est autre que le *diamètre* de la base sphérique ; celle-ci étant considérée comme une partie de la sphère munie de la distance géodésique (longueur des arcs de grand cercle). En particulier l'angle d'ouverture d'un cône polyédral convexe n'est autre que le diamètre du polygone sphérique convexe qui lui sert de base.

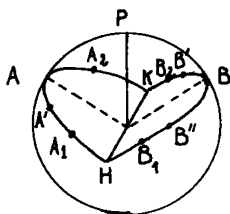
4.3 Diamètre d'un polygone sphérique convexe : Il est clair que le maximum de $\text{dist}(M, M')$ ne pourra être réalisé entre deux points dont l'un est intérieur au polygone convexe : en effet si M est intérieur au polygone, on peut prolonger au dela de M l'arc MM', donc l'allonger.



Ce raisonnement tomberait en défaut que pour M et M' diamétralement opposés sur la sphère, mais ce cas est exclu, car alors la convexe recouvrirait la sphère entière... (en joignant à M' par un arc de grand cercle les points d'un petit cercle entourant M, on balaye la sphère).

Donc le diamètre (distance maximale) est réalisé soit entre deux sommets ; soit entre un sommet et un point d'un côté ; soit peut-être deux points intérieurs chacun à un côté. On va montrer que ce dernier cas est impossible (cf *infra*).

4.4 Perpendiculaire commune à deux grands cercles : Remarquons d'abord



qu'une valeur extrémale de la distance entre points situés respectivement sur un arc $\widehat{A_1 A_2}$ et un arc $\widehat{B_1 B_2}$ ne pourra être réalisée que par la perpendiculaire commune AB à ces deux arcs ; perpendiculaire qui est un arc du grand cercle dont les pôles sont H et K ;

points d'intersection des grands cercles portant les arcs $\widehat{A_1 A A_2}$ et $\widehat{B_1 B B_2}$. On voit sur la figure les inégalités de longueur d'arc.

$$\widehat{A' B''} < \widehat{AB} < \widehat{A' B'} ;$$

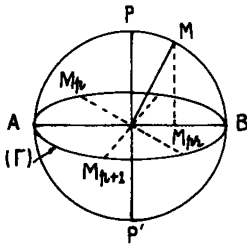
qui valent dans le cas où : $\widehat{AA'} = \widehat{BB'} = \widehat{BB''} = \epsilon$. Il en résulte que AB ne peut réaliser ni un maximum relatif, ni un minimum relatif ; bien que du fait de la perpendicularité, $A'B'$ ou $A'B''$ ne diffèrent de AB que par des termes du second ordre. Des trois possibilités envisagées plus haut, il n'en reste donc que deux : ou bien le diamètre d'un polygone sphérique est réalisé par la distance entre deux sommets ou bien il est réalisé par la distance entre un sommet et un point d'une arête ; ce qui équivaut à dire que l'angle d'ouverture maximum $2\alpha_{\text{MAX}}$ (ou $2\beta_{\text{MAX}}$) lié au cône contingent (ou au supplémentaire) ayant pour sommet le point S peut être réalisé soit entre deux sommets du polygone sphérique de base du cône considéré, soit entre un sommet et un point d'une arête. Selon la première possibilité les angles α_{MAX} et β_{MAX} seront donnés par les formules suivantes :

$$2\alpha_{\text{MAX}} = \sup \{ \text{angle}(\vec{SA_p}, \vec{SA_{p'}}) \mid p, p' \in [1, n] \} = \text{Arcos} \{ \inf \{ \langle \vec{SA_p}, \vec{SA_{p'}} \rangle / (\|\vec{SA_p}\| \|\vec{SA_{p'}}\|) \} \}$$

$$2\alpha_{\text{MAX}} = \sup \{ \text{angle}(\vec{S_{p,p+1}}, \vec{S_{p',p'+1}}) \mid p, p' \in [1, n] \} = \text{Arcos} \{ \inf \{ \langle \vec{S_{p,p+1}}, \vec{S_{p',p'+1}} \rangle / (\|\vec{S_{p,p+1}}\| \|\vec{S_{p',p'+1}}\|) \} \}$$

Mais le calcul de α_{MAX} et β_{MAX} doit tenir compte de la deuxième possibilité ainsi qu'on le précise ci-dessous :

4.5 Perpendiculaire issue d'un point à un grand cercle : Soit (Γ) un grand cercle ; P et P' ses deux pôles : tout arc de grand cercle reliant P (ou P') à un point de Γ vaut $(\pi/2)$. Mais soit M un point distinct d'un pôle (e.g. situé dans le même hémisphère que P) : de M sont issues deux perpendiculaires à Γ : $\widehat{MA}$ qui passe par P et est supérieur à $\pi/2$; et $\widehat{MB}$ qui est inférieur à $\pi/2$; $\widehat{MA}$ et $\widehat{MB}$ sont respectivement le maximum et le minimum des arcs de grand cercle liant P à un point



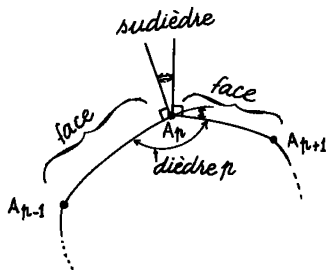
de Γ ; donc le maximum de la distance du point M à un arc $\widehat{M_p M_{p+1}}$ porté par Γ sera atteint en A si $A \in \widehat{M_p M_{p+1}}$ et sinon, le maximum sera atteint en celle des extrémités (M_p ou M_{p+1}) qui est la plus proche de A . On peut remarquer encore que si M, M_p, M_{p+1} sont des points d'un polygone convexe dont on cherche le diamètre, le polygone est tout entier contenu dans le même hémisphère de frontière Γ qui contient P (hémisphère supérieur sur la figure).

Donc si $\widehat{MA}$ est perpendiculaire au côté $\widehat{M_p M_{p+1}}$, $\widehat{MA}$ réalise le maximum absolu de la distance de M à un point du polygone ; et en particulier il est inutile de chercher sur un autre côté du polygone un point qui serait le pied d'une perpendiculaire issue de M . De plus soit $A \in \widehat{M_p M_{p+1}}$, côté du polygone, on a nécessairement $\widehat{M_p M_{p+1}} < \pi$ (le polygone est strictement compris dans un hémisphère) : donc l'un au moins des arcs $\widehat{MM_p}$ et $\widehat{MM_{p+1}}$ est obtus (sinon M_p et M_{p+1} , donc $\widehat{M_p M_{p+1}}$ seraient du côté de B sur Γ).

Ces remarques sont à la base du programme de recherche du diamètre. Il est facile de considérer les distances des sommets deux à deux ; pour les distances de sommets à côtés, on n'a pas à passer en revue tous les triplets (M, M_p, M_{p+1}) mais seulement ceux pour lesquels l'un au moins des deux arcs $\widehat{MM_p}$ et $\widehat{MM_{p+1}}$ est obtus. Pour un tel triplet on cherche si (en prenant les notations mêmes de la figure) $A \in \widehat{M_p M_{p+1}}$; ou encore si M se projette orthogonalement sur le plan de Γ en un point M_{pr} inclus dans l'angle opposé par le sommet à $M_p O M_{p+1}$.

5 Calcul de l'angle solide d'un cône polyédral : Ce calcul utilise les angles des côtés (arcs de grand cercle) du polygone sphérique de base ; angles qui ne sont autres que les dièdres du cône polyédral lui-même (ou les faces de son cône supplémentaire).

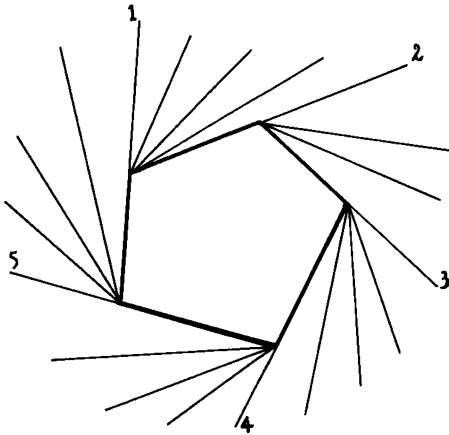
5.1 Polygone sphérique : Comme on l'a dit, à un cône convexe de sommet S , est associée sa base sur la sphère unité de centre S ; i.e. l'intersection de ce cône avec la sphère. Dans le cas considéré ici d'un cône polyédral, la base sur la sphère est un polygone sphérique, dont les côtés sont des arcs de grand cercle. Sur cette représentation, les faces et les dièdres sont en évidence, ainsi que le principe de calcul de l'aire de la base sphérique, aire qui n'est autre que l'angle solide. Soit A_{p-1}, A_p, A_{p+1} trois sommets consécutifs de la base (i.e. les impacts de trois arêtes consécutives du cône polyédral). L'angle formé par les arcs de grand cercle $\widehat{A_{p-1}A_p}$ et $\widehat{A_pA_{p+1}}$ n'est autre que le dièdre p du cône polyédral. Le supplémentaire (noté sudièdre) de ce dièdre apparaît soit com-



me l'angle formé par l'arc $\widehat{A_{p-1}A_p}$ prolongé au delà de A_p , avec l'arc $\widehat{A_pA_{p+1}}$; soit comme l'angle des normales extérieures aux côtés de la base.

Ce supplémentaire n'est autre que la face $(S\alpha_{p-1,p}, S\alpha_{p,p+1})$ du cône supplémentaire. De même l'arc $\widehat{A_{p-1}A_p}$ n'est autre que la face (SA_{p-1}, SA_p) du cône direct ; et c'est donc encore pour le cône supplémentaire, le supplémentaire du dièdre d'arête $S\alpha_{p-1,p}$.

5.2 Angles solides du contingent et du supplémentaire : Quant au calcul de l'aire de la base sphérique, remarquons d'abord l'analogie entre la figure sphérique du § 5.1 et la figure plane du § 1.1. A la limite, si le cône est très pointu la courbure de sa base est négligeable, et celui-ci est assimilable à un polygone plan. On a alors la somme des sudièdres égale à 2π : on peut le voir d'après la formule usuelle de la somme des angles d'un polygone plan, ou mieux directement, en considérant une droite d'appui mobile qui fait un tour complet autour du polygone convexe, en pivotant successivement du sudièdre autour de chaque sommet (cf figure). Dans le cas sphérique on a $\sum \{\text{sudièdre}\} < 2\pi$; la différence étant d'autant plus grande que le polygone occupe une portion plus grande de la sphère. De façon précise $(2\pi - \sum \text{sudièdre})$ est l'aire du polygone sphérique (sur la sphère de rayon 1) ; c'est-à-dire l'angle solide. La formule se démontre également en partant des triangles sphériques, et en généralisant aux autres polygones par triangulation de ceux-ci.



Ainsi qu'on l'a expliqué au § 2.2, les faces du cône contingent en un sommet S d'un polyèdre convexe ne sont autres que les angles formés par deux arêtes consécutives issues de S sur ce polyèdre ; et par produit vectoriel de ces arêtes on construit les génératrices limites du cône supplémentaire. Le calcul des angles solides SL et SU du cône contingent et de son supplémentaire est donc facile, pourvu que soit correctement orienté le cycle des arêtes issues de chaque sommet ; c'est ce que fait le programme [CONVESP] (cf *Cahiers* Vol IV n°2).

6 Calcul de la plus petite distance d'un sommet à l'enveloppe convexe

des autres sommets : Ce calcul repose sur la remarque suivante : la plus petite distance de S à l'enveloppe convexe de tous les autres sommets n'est autre que la plus petite distance de S à l'enveloppe convexe des sommets auxquels il est joint par une arête. Dès lors on cherche d'abord le sommet le plus proche parmi ceux reliés à S ; puis on tente de projeter S à l'intérieur d'un segment ayant deux tels sommets pour extrémités ; ou à l'intérieur d'un triangle défini par trois de ces sommets. (Plus précisément, dans l'application à l'étude des hodographes, il faut tenir compte non seulement des sommets reliés à S ; mais aussi des points, s'il y en a, représentant les vecteurs de particules qui ne sont pas extrémales sur l'hodographe).