LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

PH. BOURGEOIS

Recherche du déplacement minimisant la distance entre deux ensembles de points homologues situés dans un espace euclidien

Les cahiers de l'analyse des données, tome 3, nº 4 (1978), p. 440-448

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1978__3_4_440_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. III - 1978 - n° 4 - p. 440-448

RECHERCHE DU DÉPLACEMENT MINIMISANT LA DISTANCE ENTRE DEUX ENSEMBLES DE POINTS HOMOLOGUES SITUÉS DANS UN ESPACE EUCLIDIEN [DÉPLACEMENT SPATIAL]

par Ph. Bourgeois (1)

N.B. L'étude suivante, extraite du mémoire de stage et de la thèse de P. Bourgeois, achève en dimension quelconque, celle faite pour le plan dans l'article précédent. Elle se prête à une généralisation à la géométrie hyperbolique et à diverses applications à la physique (cf articles suivants).

1 *Notations et rappels* : Comme dans le problème qui précède (cité problème dans la suite), on considère dans un espace euclidien E deux nuages M(I) et N(I) dont les points sont indicés par un même ensemble fini I, et munis des mêmes masses m_i. De plus, en vue des calculs multidimensionnels on arrête les notations suivantes :

$R_J = E$: l'espace ambiant E est rapporté à un ensemble fini J de coordonnées (dont le nombre est égal à la dimension de l'espace : Card J = Dim E) . Un vecteur de E est donc noté x_J , y_J , etc.

$$x_J = \{x_j | j \in J\} \ ; \ y_J = \{y_j | j \in J\} \ ; \ \text{etc...};$$

$g^{JJ} = \{g^{jj'} | j \in J,\ j' \in J\}$: tableau des coefficients du produit scalaire, définissant la métrique de E ; ce tableau est symétrique : $g^{j'j} = g^{jj'}$) de façon précise on a :

$$<x_J , y_J>_g = \Sigma\{x_j\ y_{j'}\ g^{jj'} | j \in J,\ j' \in J\} \ ;$$

en particulier la norme carrée d'un vecteur est donnée par la formule :

$$\| x_J \|_g^2 = <x_J , x_J>_g = \Sigma\{x_j\ x_{j'}\ g^{jj'} | j \in J,\ j' \in J\} \ ;$$

Pour la simplicité des calculs, on peut supposer que l'espace E est rapporté à un système de coordonnées orthonormées, c'est-à-dire que le tableau des $g^{jj'}$ ne contient que des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs : $g^{jj'} = \delta^{jj'}$ = si j = j' alors 1, sinon 0. Mais cette simplification utilisée dans nos calculs, a l'inconvénient de masquer les propriétés des tenseurs ; et elle n'est pas permise dans le cas de la géométrie hyperbolique (cf P. Lutz ; D. Maïti).

$M(I) = \{(M_J^i , m_i) | i \in I\}$: les points du nuage M(I) sont désormais notés M_J^i , selon le système de coordonnées choisi : $M_J^i = \{M_j^i | j \in J\}$. On écrit de même :

(1) *Université Paris X (Nanterre).*

$N(I) = \{(N_J^i, m_i) | i \in I\}$.

$Dis(M,N) = \Sigma\{m_i \| M_J^i - N_J^i \|^2 | i \in I\}$: l'écart entre les deux nuages est défini comme précédemment. L'objet de l'étude est de rendre minimum cet écart, en déplaçant le nuage N(I) : on sait (cf *problème* § 2.3) qu'il convient d'amener les deux nuages à avoir même centre de gravité, qu'on peut supposer être l'origine 0 des coordonnées : il reste donc à faire tourner le nuage N(I) autour de l'origine 0, en sorte que l'écart Dis(M,N) atteigne son minimum. A la vérité l'hypothèse que 0 est centre de gravité des nuages M(I) et N(I) ne joue dans la suite aucun rôle. On résoudra donc le problème suivant :

Problème : Etant donné deux nuages M(I) et N(I) dans un espace euclidien $E = R_J$, trouver *parmi toutes les isométries* α *laissant fixe l'origine* une isométrie réalisant le minimum de l'écart $Dis(M, \alpha N)$ entre M(I) et le nuage $\alpha N(I)$ obtenu en soumettant N(I) à la transformation α.

N.B. Dans cet énoncé, *isométrie* signifie transformation linéaire α conservant le produit scalaire, donc en particulier la norme : $\forall x, y : <\alpha x, \alpha y> = <x,y>$.

Si les nuages M(I) et N(I) ont leur centre de gravité en 0, on atteindra ainsi le minimum *absolu* de l'écart pour toute isométrie (laissant ou non l'origine fixe) ; mais les calculs à faire sont les mêmes quels que soient les centres de gravité ; de plus, dans les applications à la physique (cf Lutz & Maïti) le problème posé suppose l'origine fixe. C'est pourquoi dans les notations qui suivent, les inerties et la somme de produits scalaires sont calculées *relativement à l'origine*, d'où les notations In0, Sc0.

$$In0(M) = \Sigma\{m_i \| M_J^i \|^2 | i \in I\} ;$$

$$In0(N) = \Sigma\{m_i \| N_J^i \|^2 | i \in I\} ;$$

$$Sc0(M,N) = \Sigma\{m_i <M_J^i, N_J^i> | i \in I\}.$$

Ces notations étant posées, Dis(M,N) s'écrit (cf *problème* § 2.2) :

$$Dis(M,N) = In0(M) + In0(N) - 2\, Sc0(M,N).$$

D'après cette formule, trouver α rendant *minimum* $Dis(M,\alpha N)$, c'est trouver α rendant *maximum* $Sc0(M,\alpha N)$: c'est pourquoi on construira d'abord un tenseur s (cf *problème* § 2.4), dit *tenseur d'inertie mixte*, permettant de calculer $Sc0(M,\alpha N)$ en fonction des coefficients de la transformation linéaire α, et de la métrique g.

2 *La matrice d'inertie mixte* : Les composantes $S_{jj'}$ du tenseur d'inertie mixte $S_{JJ}(M,N)$ sont définies par la formule suivante :

$$S_{jj'} = \Sigma\{m_i\, M_j^i\, N_{j'}^i | i \in I\} ;$$

ce qu'on peut écrire d'un bloc dans le langage du calcul tensoriel :

$$S_{JJ}(M,N) = \Sigma\{m_i\, M_J^i \otimes N_J^i \, | i \in I\} \in R_J \otimes R_J = E \otimes E.$$

Dans le cas particulier où les deux nuages M(I) et N(I) sont identiques, on retrouve la forme quadratique d'inertie usuelle : $S_{JJ}(M,N) = \sigma_{JJ}$, (cf [Repr. Eucl.] TII B n° 2). On voit que comme σ_{JJ}, S_{JJ} est un élément du produit tensoriel de l'espace ambiant $E = R_J$ par lui-même ; (et c'est pourquoi le tenseur S a deux indices inférieurs j, j') ; mais à la différence de σ_{JJ}, S_{JJ} n'est pas en général un tenseur symétrique : on n'a pas nécessairement $S_{jj'} = S_{j'j}$; en fait, (comme on le voit en constr isant des exemples simples où les nuages M(I) et N(I) sont formés exclusivement de points situés sur les axes de coordonnées) S_{JJ} peut être n'importe quel élément de $E \otimes E$ (i.e. n'importe quel tenseur à deux indices inférieurs).

A partir de S_{JJ} (M,N) et du tableau g^{JJ} de la métrique, la somme Sc0 des produits scalaires s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} Sc0 &= \Sigma\{m_i < M_J^i \,,\, N_J^i > | i \in I\} \\ &= \Sigma\{m_i \;\Sigma\{M_j^i N_{j'}^i \, g^{jj'} | j \in J \,,\, j' \in J\} | i \in I\} \\ &= \Sigma\{g^{jj'} \Sigma\{m_i \, M_j^i N_{j'}^i \; | i \in I\} \; | j \in J,\, j' \in J\} \\ &= \Sigma\{g^{jj'} \; S_{jj'} \; | j \in J,\, j' \in J\}. \end{aligned}$$

Si l'on fait usage de coordonnées orthonormées (i.e., cf *supra* $g^{jj'} = \delta^{jj'}$) l'expression de Sc0 se simplifie : elle est la somme des éléments diagonaux du tableau S :

$$\Sigma\{\delta^{jj'} \; S_{jj'} | j \in J,\, j' \in J\} = \Sigma\{S_{jj} | j \in J\}:$$

c'est ce qu'on appelle la *trace* du tableau carré S_{JJ}. Mais (cf [Note Lim.] TII B n° 1) on ne peut en toute rigueur parler de trace que pour un endomorphisme d'espace vectoriel (application linéaire de E dans E, élément du produit tensoriel $E \otimes E^* = R_J \otimes R^J \approx L(E,E)$; i.e. tenseur t_J^J à un indice haut, un indice bas). Ici, l'espace $R_J = E$ étant identifié à son dual $E^* = R^J$ par la forme quadratique g^{JJ} qui définit la métrique, sont associées à S_{JJ} des endormorphismes linéaires de E dans E que nous noterons S_J^J et $S^J{}_J$.

De façon précise on note :

$$S_j^{j'} = \Sigma\{S_{jj''} \; g^{j''j'} | j'' \in J\} \;;$$

$$S^j{}_{j'} = \Sigma\{g^{jj''} \; S_{j''j'} | j'' \in J\} \;;$$

l'effet des endomorphismes linéaires S_J^J et $S^J{}_J$ sur un élément x_J de $R_J = E$ est donné par les formules suivantes :

$$S_J^J \; x_J = y_J \;:\; y_j = \Sigma\{S_j^{j'} \; x_{j'} | j' \in J\} \;;$$

$$S^J{}_J \; x_J = z_J \;:\; z_j = \Sigma\{S^{j'}{}_j \; x_{j'} | j' \in J\} \;;$$

ce qu'on peut écrire d'un bloc en revenant à la définition de S_{JJ}(M,N):

$$S_J^J \, x_J = y_J = \Sigma\{m_i \; M_J^i < N_J^i ,\, x_J > | i \in I\} \;;$$

$$S^J{}_J \, x_J = z_J = \Sigma\{m_i < M_J^i ,\, x_J > \; N_J^i \; | i \in I\}.$$

Dans le cas où les deux nuages M(I) et N(I) coïncident, on retrouve l'application $\sigma \circ g$ (notée $\sigma \circ m$ dans [Repr. Eucl.] où la métrique est m et non g...) : mais ici parce que S_{JJ}(M,N) est *non symétrique* , on a deux applications distinctes S_J^J et $S^J{}_J$. Mais ces deux applications ont une même trace qui est la somme Sc0 :

$$ScO(M,N) = \text{trace } S_J^J\,(M,N) = \text{trace } S^J_{\mathcal{J}}(M,N).$$

On notera que $S_J^J\,(M,N) = S^J_{\mathcal{J}}(N,M)$.

3 *Transformation de la matrice d'inertie mixte* : Notre but est de déplacer le nuage $N(I)$ par une isométrie α afin de rendre la somme $ScO(M,\alpha N)$ aussi grande que possible : pour cela on calcule le tenseur $S_{JJ}(M,\alpha N)$, ou plutôt l'endomorphisme linéaire $S^J_{\mathcal{J}}(M,\alpha N)$. Ce calcul n'est en rien simplifié par le fait que α soit une isométrie : on supposera donc dans ce § que α est une application linéaire quelconque de $E = R_J$ dans lui-même.

L'application α est définie par le tenseur $\alpha_J^J \in R_J \otimes R^J$, tenseur à un indice bas suivi d'un indice haut : $\alpha_J^J = \{\alpha_j^{j'} \mid j \in J,\ j' \in J\}$; l'image $y_J = \alpha x_J$ d'un vecteur $x_J \in E$, est donnée par la formule :

$$\alpha_J^J\, x_J = y_J \;;\; y_j = \Sigma\{\alpha_j^{j'}\, x_{j'} \mid j' \in J\}.$$

Convenons de noter αN_J^i l'image par α du point N_J^i du nuage $N(I)$; on a pour coordonnées αN_j^i du point αN_J^i :

$$\alpha N_j^i = \Sigma\{\alpha_j^{j'}\, N_{j'}^i \mid j' \in J\} \;;$$

d'où pour les composantes du tenseur S d'inertie mixte :

$$\begin{aligned} S_{j''j}\ (M,\ N) &= \Sigma\{m_i\ M_{j''}^i\ \alpha N_j^i \mid i \in I\} \\ &= \Sigma\{m_i\ M_{j''}^i\, \Sigma\{\alpha_j^{j'}\ N_{j'}^i \mid j' \in J\} \mid i \in I\} \\ &= \Sigma\{\alpha_j^{j'}\ \ \Sigma\{m_i\ M_{j''}^i N_{j'}^i \mid i \in I\}\ j' \in J\} \\ &= \Sigma\{\alpha_j^{j'}\ S_{j''j'}(M,N) \mid j' \in J\} \;; \end{aligned}$$

formule qu'on écrit d'un bloc avec les notations tensorielles :

$$S_{JJ}(M,\alpha N) = \Sigma\{m_i\ M_J^i \otimes \alpha N_J^i \mid i \in I\}$$

et de même pour l'endomorphisme linéaire $S^J_{\mathcal{J}}$:

$$S^J_{\mathcal{J}}(M,\alpha N)\ x_J = \Sigma\{m_i < M_J^i\ ,\ x_J > \alpha N_J^i \mid i \in I\} \;;$$

sous cette forme, il est évident que l'application $S^J_{\mathcal{J}}(M,\alpha N)$ n'est autre que la composée des deux applications linéaires α et $S^J_{\mathcal{J}}$:

$$S^J_J\,(M,\alpha N)\ x_J = \alpha_J^J\ \circ\ S^J_J\,(M,N)\ x_J.$$

D'où pour $ScO(M,\alpha N)$, d'après les résultats du § 2 :

$$\begin{aligned} ScO(M,\alpha N) &= \text{trace } \alpha_J^J \circ S^J_{\mathcal{J}}(M,N) \\ &= \Sigma\{\alpha_j^{j'}\, g^{jj''}\ S_{j''j'}(M,N) \mid j \in J,\ j' \in J,\ j'' \in J\} \end{aligned}$$

En coordonnées orthonormées, $(g^{jj'} = \delta^{jj'})$ la formule se simplifie:

$$\Sigma\{\alpha_j^{j'}\ \delta^{jj''}\ S_{j''j'} \mid j \in J,\ j' \in J,\ j'' \in J\} = \Sigma\{\alpha_j^{j'}\ S_{jj'} \mid j \in J,\ j' \in J\}.$$

Notons que si laissant le nuage $N(I)$ fixe, on fait agir sur $M(I)$ une transformation linéaire β on aura de même $ScO(\beta M,N) = \text{trace } (\beta_J^J \circ S_J^J(M,N))$.

Rappelons que notre but est de rendre $ScO(M,\alpha N)$ maximum sous la condition que α soit une isométrie.

4 *Condition d'optimum* : On va montrer que l'optimum est réalisé si $S_{JJ}(M,\alpha N)$ est *symétrique de type positif*. Dans ce § on verra que ceci est une condition suffisante d'optimum ; et que de plus, en général, α est unique. Au § 5 on verra que cette condition peut toujours être réalisée pour un α convenable dont on indiquera le calcul : d'où il résultera que $S_{JJ}(M,\alpha N)$ *symétrique et positif*, est en fait une condition nécessaire d'optimum ; on pourrait aussi le vérifier directement mais nous ne le ferons pas ici.

Rappelons d'abord le sens de la condition : *symétrique* et *positif*: On dit que $S_{JJ}(M,\alpha N)$ est symétrique si quels que soient j et j' on a :

$$S_{jj'}(M,\alpha N) = S_{j'j}(M,\alpha N) \ ;$$

Comme on l'a dit au § 1 cette condition n'est en général pas vérifiée pour α quelconque (par exemple, pour α = identité, $S_{JJ}(M,N)$ n'est pas en général symétrique). Si $S_{JJ}(M,\alpha N)$ est symétrique, on peut l'utiliser pour définir une forme quadratique sur le dual R^J de $R_J = E$: cette forme est dite positive si quel que soit le vecteur u^J de R^J, on a :

$$\Sigma\{u^j\, u^{j'}\, S_{jj'}(M,\alpha N) \mid j \in J,\ j' \in J\} \geq 0.$$

Sous la condition de symétrie et positivité, pour un système convenable d'axes orthonormés, le tableau des $S_{jj'}(M,\alpha N)$ prendra une forme diagonale, avec des coefficients positifs ou nuls. Supposons, pour simplifier les notations que nous soyons placés dans ce système d'axes dès le départ : i.e. pour $\alpha = 1$, $S_{JJ}(M,N)$ est diagonal à coefficients positifs ou nuls. Pour établir que l'optimum est réalisé il suffit de vérifier que pour toute isométrie α , $S_{JJ}(M,\alpha N)$ a une trace inférieure ou égale à celle de $S_{JJ}(M,N)$; (elle lui est même strictement inférieure si $S_{JJ}(M,N)$ est non dégénérée, i.e. n'a pas de coefficients nuls sur la diagonale : ce qui prouve dans ce cas l' *unicité* de α). Avec le choix fait des axes la formule finale du § 3 se simplifie ; on a :

$$ScO(M,\alpha N) = \Sigma\{S_{jj}(M,N)\ \alpha_j^j \mid j \in J\}$$

(car $g^{jj'} = \delta^{jj'}$, par orthonormalité des axes ; et $S_{JJ}(M,N)$ est diagonal). Or les termes diagonaux α_j^j de la matrice de l'isométrie α sont des cosinus qui ne peuvent dépasser 1 : les S_{jj} étant positifs $ScO(M,\alpha N)$ atteint son maximum quand les α_j^j valent exactement 1 : mais alors α est l'isométrie identité. Si toutefois certains des S_{jj} sont nuls, les α_j^j correspondants peuvent différer de 1 : de façon précise, il faut dans ce cas que l'isométrie α laisse invariant le sous-espace engendré par les axes pour lesquels S_{jj} est non nul ; le sous-espace (supplémentaire à celui-ci) engendré par les axes pour lesquels S_{jj} est nul (sous-espace propre relatif à la v. p. zéro) peut être soumis à une isométrie quelconque.

La recherche de l'optimum s'effectue par l'étude classique des invariants d'un endomorphisme d'espace euclidien ; avant de donner les calculs au § 6 nous préférons en rappeler le principe géométrique au § 5 : il n'est pas indispensable au lecteur de suivre dans le détail ce § 5, mais nous pensons que les images qu'il évoque aideront à suivre les calculs.

5 *Principe géométrique de la recherche de l'optimum* : Dire que $S_{JJ}(M,\alpha N)$ est un tenseur symétrique équivaut exactement à dire que les deux endomorphismes linéaires $S_J^J(M,\alpha N)$ et $S^J_J(M,\alpha N)$ sont égaux entre eux, chacun étant symétrique relativement à la métrique g^{JJ} : condition qui s'écrit :

$$\forall\, x_J\,,\, y_J \in R_J : < S_J^J\; x_J\,,\, y_J > \;=\; < x_J\,,\, S_J^J\; y_J >$$

(le produit scalaire étant associé à la métrique g). On sait que S est un endomorphisme symétrique relativement à g, si et seulement si A admet un système de vecteurs propres orthonormé pour la métrique g : d'où le principe de la recherche de α tel que $S_J^J(M,\alpha N)$ soit symétrique.

Supposons connu un système d'axes orthogonal Rep dont l'image par $S^J_J(M,N)$ est un système orthogonal Rep'. Soit $\mathcal{A}^J_J$ un déplacement qui ramène en Rep le système Rep' : $\mathcal{A}$ Rep' = Rep : il est clair qu'on a :

$$\mathcal{A}^J_J \circ S^J_J(M,N)\ \text{Rep} = \text{Rep}\ ;$$

or d' après la formule de transformation du § 3 ceci équivaut à :

$$S^J_J(M,\alpha N)\ \text{Rep} = \text{Rep}\ ;$$

et $S^J_J(M,\alpha N)$ qui laisse invariant un système d'axes orthogonal, est un endomorphisme symétrique : donc α réalise l'optimum cherché, *pourvu que* $S_{JJ}(M,\alpha N)$ soit *positif*, ou encore que les valeurs propres de $S^J_J(M,\alpha N)$ soient toutes positives ; cette dernière condition sera réalisée parce que $\alpha \circ S^J_J(M,N) = S^J_J(M,\alpha N)$ ramène chaque axe de Rep suivant ce même axe, orienté dans le même sens. Reste donc à trouver un système d'axes Rep convenable. Ce à quoi nous aidera encore le raisonnement géométrique.

Soit Sph la sphère de centre l'origine et de rayon 1 :

$$\text{Sph} = \{x_J \mid x_J \in R_J\ ;\ \| x_J \| = 1\}\ ;$$

l'image réciproque de Sph par l'application linéaire $S^J_J(M,N)$ est un ellipsoïde Ell :

$$\text{Ell} = \{x_J \mid x_J \in R_J\ ;\ \| S^J_J(M,N)\, x_J \| = 1\}\ ;$$

deux vecteurs x_J et y_J ont des directions conjuguées relativement à Ell si l'on a :

$$< S^J_J(M,N)\, x_J\,,\, S^J_J(M,N)\, y_J > = 0,$$

c'est-à-dire si leurs images par S (M,N) sont conjuguées relativement à Sph i.e. orthogonales. En particulier le système Rep des axes principaux de Ell, a pour image par $S^J_J(M,N)$ un système orthonormé Rep' (cf figure).

Si $S^J_J(M,N)$ n'est pas un isomorphisme (i.e. si le rang de S est strictement inférieur à la dimension Card J de $E = R_J$), le raisonnement doit être un peu modifié : ce qu'on fera sur deux exemples. Soit Card J = 3 : E est l'espace ordinaire ; rang S = 2 : il y a dans E une droite Noy , noyau de S, que S envoie sur l'origine (Noy = $\{x \mid x \in E\ ;\ Sx = 0\}$). Alors Ell n'est pas un ellipsoïde, mais un cylindre elliptique dont les génératrices sont parallèles à Noy, on prendra l'axe 3 suivant Noy, et les deux

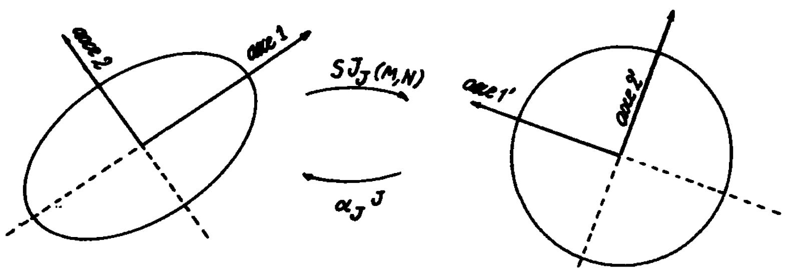

Figure : Système orthogonal Rep transformé par $S^J{}_J(M,N)$ en un système orthogonal Rep' : pour plus de clarté on a translaté la sphère Sph relativement à l'ellipsoïde Ell ; on notera que dans le cas *de la figure, les deux systèmes orientés Rep et Rep' ne sont pas de même sens : donc α^J_J (qui envoie l'axe orienté 1' sur l'axe orienté 1 ; et de même 2' sur 2) est ici une isométrie inverse.*

axes 1 et 2 suivant les axes principaux de l'ellipse Ell_B base de Ell dans un plan perpendiculaire à Noy ; de même , 1' = S1 ; 2' = S2 ; et 3' est obtenu en complétant le système formé par 1' et 2' , en un système orthogonal. Soit maintenant Card J = 4, rang S = 2 ; on a alors pour noyau de S un plan Noy : et Ell est un cylindre généralisé (ou hypercylindre) dont les génératrices sont des plans parallèles à Noy , avec pour base une ellipse Ell_B dans le plan perpendiculaire à Noy (supplémentaire orthogonal) : on prend les axes 3 et 4 dans Noy ; les axes 1 et 2 suivant les axes principaux de Ell_B ; 1' = S1 ; 2' = S2 et les axes 3' et 4' perpendiculaires entre eux et au plan SE (image de E par $S^J{}_J(M,N)$: SE est engendré par les axes 1' et 2') : on voit que 3' et 4' ne sont définis qu'à une rotation près dans le plan Sup (supplémentaire orthogonal de l'image SE). Ce cas de non-unicité pour Rep et Rep' (donc pour α) a déjà été signalé à la fin du § 4.

6 <u>*Forme réduite d'un endomorphisme d'un espace euclidien*</u> : Le calcul effectif de α^J_J est un calcul classique de forme réduite de tenseur , d'où le titre de ce §. On définit sur E une forme quadratique $W^{JJ}(M,N)$ par la formule suivante (où x_J et y_J sont des vecteurs de E) :

$$W^{JJ}\, x_J\, y_J = \langle S^J{}_J(M,N)\, x_J\, ,\, S^J{}_J(M,N)\, y_J \rangle\ ;$$

i.e. pour les composantes :

$$\Sigma\{W^{jj'}\, x_j\, y_{j'} \,|\, j \in J,\ j' \in J\} =$$

$$\Sigma\{S^j{}_{j''}\ x_j\ \ S^{j'}{}_{j'''}\, y_{j'}\ g^{j''j'''}\,|\, j \in J,\ j' \in J,\ j'' \in J,\ j''' \in J\}\ ;$$

$$W^{jj'}(M,N) = \Sigma\{S^j{}_{j''}(M,N)\ S^{j'}{}_{j'''}(M,N)\ g^{j''j'''}\,|\, j'' \in J,\ j''' \in J\}.$$

On notera que si α est une isométrie quelconque on a par définition $W^{JJ}(M,\alpha N) = W^{JJ}(M,N)$. En termes géométriques, l'ellipsoïde Ell du § 5 a pour équation : $Ell = \{x | x \in E; W(x,x) = 1\}$.

On cherche une forme réduite de W, i.e. une base orthonormée pour la métrique g^{JJ} et relativement à laquelle la matrice de W soit diagonale. C'est un problème classique de décomposition simultanée de deux formes quadratiques : on le résoud en déterminant une base orthonormée formée de vecteurs propres de l'endomorphisme W_J^J défini par :

$$W_j^{j'}(M,N) = \Sigma\{(g^{-1})_{jj''}\ W^{j''j'}(M,N) \mid j'' \in J\},$$

où l'on a noté g_{JJ}^{-1} l'inverse de g^{JJ} (g^{JJ} définit un isomorphisme de $E = R_J$ sur son dual R^J, g_{JJ}^{-1} est l'isomorphisme inverse de R^J sur R_J : si l'on ne considère que des coordonnées orthonormées, on a $g^{JJ} = \delta^{JJ}$; $g_{JJ}^{-1} = \delta_{JJ}$: matrice diagonale unité). Soit donc Base = $\{e^{(h)} \mid h = 1,\ldots, n\}$ une base orthonormée de R_J formée de vecteurs propres de $W_J^J(M,N)$. (où $n = \text{Card } J$ est la dimension de $R_J = E$) ; dans cette base W s'écrit sous forme diagonale avec p termes diagonaux non nuls $W_h^h = W^{hh}$; et n-p termes diagonaux nuls (où n-p est la multiplicité de la v. p. zéro pour W_J^J). L'image par $S_J^J(M,N)$ d'un vecteur $e^{(h)}$ de Base est un vecteur $f^{(h)} = S\,e^{(h)}$ dont le carré de norme est par définition $W_h^h = W^{hh}$; et l'on a pour $h \neq h'$, $\langle f^{(h)}, f^{(h')}\rangle = W(e^{(h)}, e^{(h')}) = 0$.

On construit donc une base orthonormée Base' = $\{e'^{(h)} \mid h = 1,\ldots, n\}$ en posant :

$$\forall\, h \in \{1,\ldots, p\} : e'^{(h)} = f^{(h)}/\|f^{(h)}\|$$

et complétant d'une manière quelconque en une base ce système orthonormé de p vecteurs. Alors l'application de α_J^J cherchée n'est autre que l'isométrie telle que α Base' = Base ; cette isométrie étant unique à l'indétermination près laissée dans le choix des n - p derniers facteurs de Base'. Il est de plus facile de calculer la trace de $\alpha_J^J \circ S^J{}_J(M,N)$, laquelle donne le maximum de $ScO(M,\alpha N)$ (cf § 3). On a en effet :

$$\forall\, h \in \{1,\ldots, p\} : \alpha \circ S\,e^{(h)} = \alpha f^{(h)} = \alpha(\|f^{(h)}\|\, e'^{(h)})$$
$$= \|f^{(h)}\| = (W^{hh})^{1/2}$$

$$\forall\, h \in \{p+1,\ldots, n\} : \alpha \circ S\,e^{(h)} = \alpha f^{(h)} = 0 ;$$

donc $\alpha \circ S(M,N)$ est une matrice diagonale ayant pour éléments les $W^{(hh)^{1/2}}$; et sa trace est $\Sigma\{(W^{hh})^{1/2} \mid h = 1,\ldots, p\}$. Ainsi est réalisée la réduction de $S(M,N)$ par une isométrie α.

7 *Les calculs à effectuer* : On précisera ces calculs dans le cas usuel, où les nuages N(I) et M(I) sont donnés dans un espace euclidien E, rapporté à un système orthonormé de coordonnées. Alors il n'y a pas à distinguer entre indices hauts et bas ; c'est pourquoi nous écrirons $S_{jj'}(M,N)$ avec les deux indices sur la même ligne que S ; et de même pour les autres tenseurs.

a) On calcule la matrice des $W_{jj'}$ définis par :

$$W_{jj'} = \Sigma\{S_{jj''}(M,N)\ S_{j'j''}(M,N) \mid j'' \in J\}$$

(dans les notations matricielles, ceci s'écrit $W = S\,{}^tS$).

b) On cherche la suite des valeurs propres w(1)... w(n) de cette matrice ; et on calcule la somme de leurs racines carrées :

$$\text{Max Sc0} = \Sigma\{w(h)^{1/2} \mid h = 1, \ldots, n\}$$

cette somme donne la valeur maxima possible pour Sc0(M,αN) : ce qui suffira dans toutes les applications où l'on veut seulement connaître le minimum de l'écart Dis(M,αN) entre M(I) et un nuage αN(I) obtenu en déplaçant N(I), sans préciser l'isométrie α qui fournit cet optimum.

c) Pour préciser α , on calcule une suite orthonormée $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$ de vecteurs propres de W ; et l'on construit la suite $e'^{(1)} \ldots e'^{(n)}$ comme on l'a dit ci-dessus. Si S est de rang maximum n, W n'a pas la v. p. zéro et l'on a pour tout h : $e'^{(h)} = f^{(h)}/\|f^{(h)}\|$, avec $f^{(h)} = Se^{(h)}$ défini (en prenant garde que $Sjj' \neq Sj'j$ cf § 2) par la formule :

$$f^{(h)}j = \Sigma\{Sj'j\ e^{(h)}j' \mid j' \in J\}$$

sinon au-delà du rang p (cf supra) le système des $e'^{(p)}$ doit être complété en une base Báse' suivant une procédure d'orthonormalisation usuelle.

L'application α telle que α Base' = Base est alors définie par la forme :

$$\forall x \in E : \alpha x = \Sigma\{\langle e'^{(h)}, x\rangle\, e^{(h)} \mid h = 1, \ldots, n\} ;$$

ou en termes de coordonnées :

$$\alpha jj' = \Sigma\{e^{(h)}j\ e'^{(h)}j' \mid h = 1, \ldots, n\} ;$$

$$\alpha x = y ;\ yj = \Sigma\{\alpha jj'\ xj' \mid j' \in J\}.$$