LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

J. P. BENZÉCRI
P. CAZES

Recherche du déplacement minimisant la distance entre deux ensembles de points homologues situés dans un plan

Les cahiers de l'analyse des données, tome 3, nº 4 (1978), p. 435-439
<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1978__3_4_435_0>

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. III - 1978 - n° 4 - p. 435-439

RECHERCHE DU DÉPLACEMENT MINIMISANT LA DISTANCE ENTRE DEUX ENSEMBLES DE POINTS HOMOLOGUES SITUÉS DANS UN PLAN [DÉPLACEMENT PLAN]

par J. P. Benzécri (1)
et P. Cazes (2)

N. B. : L'étude faite ici pour le cas du plan est achevée par Ph. Bourgeois en dimension quelconque ; et reçoit des applications diverses : (cf articles suivants).

Le cadre de ce problème est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire euclidien. Un élément de E sera noté par une lettre minuscule ou majuscule et considéré à la fois comme un vecteur, ou comme un point Si A et B sont deux éléments de E, on écrira $\overrightarrow{AB} = (B - A) \in E$; en langage géométrique, cette différence est souvent appelée "vecteur libre d'origine A et d'extrémité B". Le produit scalaire de deux éléments u et u' de E est noté $\langle u,u'\rangle = \langle u',u\rangle$; si u et u' sont définis par une origine et une extrémité, on écrira encore : $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\rangle$. Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est noté comme le carré d'une norme : $\langle u,u\rangle = \|u\|^2$.

On considère dans E deux nuages M(I) et N(I) dont les points sont indicés par un même ensemble fini I, et munis des mêmes masses m_i :

$$M(I) = \{(M^i, m_i) \mid i \in I\} ;$$

$$N(I) = \{(N^i, m_i) \mid i \in I\} ;$$

Les centres de gravité des nuages M(I) et N(I) sont notés respectivement G et H, et définis par la condition usuelle :

$$\Sigma\{m_i \overrightarrow{GM}^i \mid i \in I\} = 0 \quad ; \quad \Sigma\{m_i \overrightarrow{HN}^i \mid i \in I\} = 0.$$

On définit encore les sommes suivantes :

$$m_{tot} = \Sigma\{m_i \mid i \in I\} \qquad ; \text{ masse totale ;}$$

$$In(M) = \Sigma\{m_i\|\overrightarrow{GM}^i\|^2 \mid i \in I\} \text{ ; inertie du nuage M(I) ;}$$

$$In(N) = \Sigma\{m_i\|\overrightarrow{HN}^i\|^2 \mid i \in I\} \text{ ; inertie du nuage N(I) ;}$$

$$Sc(M,N) = \Sigma\{m_i\langle\overrightarrow{GM}^i,\overrightarrow{HN}^i\rangle \mid i \in I\}.$$

1°) a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{M^iN^i}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{GM}^i$, $\overrightarrow{HN}^i$ et $\overrightarrow{GH}$;

b) Exprimer la norme carrée $\|\overrightarrow{M^iN^i}\|^2$ en fonction des normes $\|\overrightarrow{GM}^i\|^2$, $\|\overrightarrow{HN}^i\|^2$, $\|\overrightarrow{GH}\|^2$ et des produits scalaires $\langle\overrightarrow{GM}^i, \overrightarrow{HN}^i\rangle$, $\langle\overrightarrow{G..}, \overrightarrow{GM}^i\rangle$, $\langle\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{HN}^i\rangle$;

2°) L'écart entre les deux nuages M(I) et N(I) peut être mesuré par la somme Dis(M,N) définie ci-dessous :

$$Dis(M,N) = \Sigma\{m_i \|\overrightarrow{M^iN^i}\|^2 \mid i \in I\} ;$$

exprimer Dis(M,N) en fonction des quantités In(M), In(N), Sc(M,N), $\|\overrightarrow{GH}\|^2$ et m_{tot}.

---

(1) *Professeur de statistique. Université Pierre et Marie Curie.*

(2) *Maître-assistant. Université Pierre et Marie Curie.*

3°) Soit t un vecteur de E : on note $N^i(t) = N^i + t$, le point obtenu à partir de N^i par la translation t ; et de même :

$$N(I;t) = \{(N^i(t), m_i) \mid i \in I\}$$

le nuage déduit du nuage N(I) par la translation t.

a) quel est le centre de gravité H(t) du nuage N(I;t) ?

b) exprimer en fonction des quantités In(M), In(N), Sc(M,N), $\|\overrightarrow{GH}(t)\|^2$ et m_{tot}, l'écart Dis(M,N(t)) :

$$Dis(M,N(t)) = \Sigma\{m_i \ \|\overrightarrow{M^iN^i}(t)\|^2 \mid i \in I\} \ ;$$

c) déterminer le vecteur t pour que Dis(M,N(t)) ait la plus faible valeur possible ; quelle est cette valeur minimum ?

4°) Dans les questions 4°, 5° et 6°, on suppose que l'espace E est le plan R^2, rapporté à deux axes orthogonaux Ox, Oy ; on note $(x(M^i), y(M^i))$ les coordonnées d'un point M^i (et de même $(x(N^i), y(N^i))$ pour le point N^i; etc) ; le produit scalaire de deux vecteurs t = (x,y) et t' = (x',y') est donné par la formule :

$$\langle t,t'\rangle = \langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy' \ ;$$

en particulier l'on a pour la norme :

$$\|t\|^2 = x^2 + y^2 \quad ; \quad \|t'\|^2 = x'^2 + y'^2 \ ;$$

on définit les sommes suivantes (où G et H désignent comme précédemment les centres de gravité de M(I) et N(I)) :

$$S_{xx}(M,N) = \Sigma\{m_i(x(M^i) - x(G))(x(N^i)-x(H)) \mid i \in I\} \ ;$$
$$S_{xy}(M,N) = \Sigma\{m_i(x(M^i) - x(G))(y(N^i)-y(H)) \mid i \in I\} \ ;$$
$$S_{yx}(M,N) = \Sigma\{m_i(y(M^i) - y(G))(x(N^i)-x(H)) \mid i \in I\}$$
$$S_{yy}(M,N) = \Sigma\{m_i(y(M^i) - y(G))(y(N^i)-y(H)) \mid i \in I\} \ ;$$

Soit θ un angle : on note N(I,θ) le nuage obtenu en faisant tourner N(I) de l'angle θ autour de son centre de gravité H :

$$N(I,\theta) = \{(N^i(\theta), m_i) \mid i \in I\} \ ; \quad \text{avec :}$$

$$x(N^i(\theta)) = x(H) + \cos\theta \ (x(N^i) - x(H)) - \sin\theta \ (y(N^i) - y(H)) \ ;$$

$$y(N^i(\theta)) = y(H) + \sin\theta \ (x(N^i) - x(H)) + \cos\theta \ (y(N^i) - y(H)) \ ;$$

a) quel est le centre de gravité H(θ) du nuage N(I,θ) ?

b) exprimer en fonction de cosθ, sinθ et $S_{xx}(M,N)$, $S_{xy}(M,N)$, $S_{yx}(M,N)$, $S_{yy}(M,N)$, la somme Sc(M,N(θ)) :

$$Sc(M,N(\theta)) = \Sigma\{m_i \ \langle\overrightarrow{GM^i}, \overrightarrow{H(\theta)\ N^i}(\theta)\rangle \mid i \in I\}$$

c) exprimer en fonction de In(M), In(N), $S_{xx}(M,N)$, $S_{xy}(M,N)$, $S_{yx}(M,N)$, $S_{yy}(M,N)$, cosθ, sinθ, $\|\overrightarrow{GH}\|^2$ et m_{tot} l'écart Dis(M,N(θ)) entre les deux nuages M(I) et N(I,θ):

$$Dis(M,N(\theta)) = \Sigma\{m_i \|\overrightarrow{M^iN^i}(\theta)\|^2 \mid i \in I\}.$$

5°) Soit t un vecteur quelconque du plan ; et θ un angle on note :

$$N^i(\theta;t) = N^i(\theta) + t \ ;$$

$$N(I,\theta;t) = \{(m_i, N^i(\theta;t)) \mid i \in I\} \ ;$$

déterminer t et θ (l'angle θ étant défini par cosθ et sinθ), de telle sorte que soit aussi faible que possible l'écart Dis(M,N(θ;t)) :

$$Dis(M,N(\theta;t)) = \Sigma\{m_i \|\overrightarrow{M^i\ N^i}(\theta;t)\|^2 \mid i \in I\}$$

exprimer en fonction de In(M), In(N), $S_{xx}(M,N)$, $S_{xy}(M,N)$, $S_{yx}(M,N)$, $S_{yy}(M,N)$, le minimum atteint par Dis(M,N(θ;t))

6°) Soit θ un angle ; ε un nombre valant +1 ou −1 : on définit le point $N^i(\theta,\varepsilon)$ par la formule :

$$x(N^i(\theta,\varepsilon)) = x(H) + \cos\theta(x(N^i) - x(H)) - \varepsilon \sin\theta(y(N^i) - y(H)) ;$$
$$y(N^i(\theta,\varepsilon)) = y(H) + \sin\theta(x(N^i) - x(H)) + \varepsilon \cos\theta(y(N^i) - y(H)) ;$$

et de même si t est un vecteur quelconque du plan, on pose :

$$N^i(\theta,\varepsilon;t) = N^i(\theta,\varepsilon) + t ;$$

Déterminer t,θ,ε pour que soit minimum l'écart Dis(M,N(θ,ε;t)) :

$$\mathrm{Dis}(M,N(\theta,\varepsilon;t)) = \Sigma\{m_i \,\|\overrightarrow{M^i N^i(\theta,\varepsilon;t)}\|^2 \mid i \in I\}$$

on exprimera ce minimum en fonction des mêmes quantités qu'en 5°).

7°) Soit en général $M(I) = \{(M^i,m_i) \mid i \in I\}$ et $N(I) = \{(N^i,m_i) \mid i \in I\}$ deux ensembles de points munis de masses et distances se correspondant biunivoquement avec conservation des masses ; comment faut-il placer N(I) relativement à M(I) pour que l'écart entre les deux soit minimum ? Quelles difficultés rencontre-t-on ? Vous paraît-il possible de généraliser en dimension quelconque la méthode des questions 4°, 5°, 6°, éventuellement par des approximations successives ? L'analyse factorielle (recherche des axes principaux d'inertie des nuages) peut-elle suggérer de telles approximations ?

2 *Solution du problème*

2.2 a) $\overrightarrow{M^i N^i} = \overrightarrow{M^i G} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HN^i} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HN^i} - \overrightarrow{GM^i}$

b) $\|\overrightarrow{M^i N^i}\|^2 = \|\overrightarrow{GH}\|^2 + \|\overrightarrow{HN^i}\|^2 + \|\overrightarrow{GM^i}\|^2 + 2 < \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{HN^i} >$
$- 2 < \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GM^i} > - 2 < \overrightarrow{HN^i}, \overrightarrow{GM^i} >$

2.2 $\mathrm{Dis}(M,N) = \Sigma\{m_i \|\overrightarrow{M^i N^i}\|^2 \mid i \in I\}$

$$= m_{tot}\|\overrightarrow{GH}\|^2 + \mathrm{In}(N) + \mathrm{In}(M) - 2\,\mathrm{Sc}(M,N) \qquad (1)$$

2.3 a) $H(t) = H + t$ (2)

b) Appliquant la formule (1) au nuage N(t), on obtient :

$$\mathrm{Dis}(M,N(t)) = m_{tot}\|\overrightarrow{GH(t)}\|^2 + \mathrm{In}(N(t)) + \mathrm{In}(M) - 2\,\mathrm{Sc}(M,N(t)) ;$$

comme $\overrightarrow{H(t)N^i(t)} = \overrightarrow{HN^i}$, on a : In(N(t)) = In(N) ; Sc(M,N(t)) = Sc(M,N), et donc:

$$\mathrm{Dis}(M,N(t)) = m_{tot}\|\overrightarrow{GH(t)}\|^2 + \mathrm{In}(N) + \mathrm{In}(M) - 2\,\mathrm{Sc}(M,N) \qquad (3)$$

c) Dis(M,N(t)) sera minimum si $\overrightarrow{GH(t)} = 0$, soit si $t = -\overrightarrow{GH}$, auquel cas

$$\mathrm{Dis}(M,N(t)) = \mathrm{In}(N) + \mathrm{In}(M) - 2\,\mathrm{Sc}(M,N). \qquad (4)$$

2.4 a) $H(\theta) = H$ (5)

b) $\mathrm{Sc}(M,N(\theta)) = \Sigma\{m_i < \overrightarrow{GM^i}, \overrightarrow{H(\theta)N^i(\theta)} > \mid i \in I\}$

$$= \Sigma\{m_i[(x(M^i) - x(G))(\cos\theta(x(N^i) - x(H)) - \sin\theta(y(N^i) - y(H))) + (y(M^i) - y(G))(\sin\theta(x(N^i) - x(H)) + \cos\theta(y(N^i) - y(H)))] \mid i \in I\}$$
$$= \cos\theta(S_{xx}(M,N) + S_{yy}(M,N)) + \sin\theta(S_{yx}(M,N) - S_{xy}(M,N)) \qquad (6)$$

c) Les rotations conservant la norme, on a

$\|\overrightarrow{H(\theta)N^i(\theta)}\|^2 = \|\overrightarrow{HN^i}\|^2$, et donc $In(N(\theta)) = In(N)$.

En appliquant la formule (1) au nuage $N(\theta)$, et compte-tenu de (5)& (6), on obtient :

$$Dis(M,N(\theta)) = m_{tot}\|\overrightarrow{GH}\|^2 + In(N) + In(M) - 2\alpha\cos\theta - 2\beta\sin\theta \quad (7)$$

formule où on a posé pour simplifier les notations :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= S_{xx}(M,N) + S_{yy}(M,N) \\ \beta &= S_{yx}(M,N) - S_{xy}(M,N) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

2.5 Appliquant la formule (3) au nuage $N(\theta;t)$ et compte-tenu des relations (5) à (8), on a :

$$Dis(M,N(\theta;t)) = m_{tot}\|\overrightarrow{GH}+t\|^2 + In(N)+In(M)-2\alpha\cos\theta-2\beta\sin\theta \quad (9)$$

$Dis(M,N(\theta;t))$ sera donc minimum si $t = -\overrightarrow{GH}$, et si $\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta$ est maximum ; or cette dernière quantité est extrémale si sa dérivée $-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta$ est nulle, soit si $tg\theta = \beta/\alpha$, son maximum égal à $(\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$ étant obtenu pour :

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \beta/(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} \\ \cos\theta &= \alpha/(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

La valeur minimale de $Dis(M,N(\theta;t))$ s'écrit alors :

$$Dis(M,N(\theta;t)) = In(N) + In(M) - 2(\alpha^2+\beta^2)^{1/2} \quad (11)$$

2.6 Si l'on pose :

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\varepsilon &= S_{xx}(M,N) + \varepsilon S_{yy}(M,N) \\ \beta_\varepsilon &= S_{yx}(M,N) - \varepsilon S_{xy}(M,N) \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

il est immédiat de vérifier que :

$$Sc(M,N(\theta,\varepsilon;t)) = \alpha_\varepsilon\cos\theta + \beta_\varepsilon\sin\theta \quad (13)$$

Il en résulte puisque l'on a encore $\|\overrightarrow{HN^i(\theta,\varepsilon)}\|^2 = \|\overrightarrow{HN^i}\|^2$, et donc $In(N(\theta,\varepsilon)) = In(N)$ que toutes les formules (pour ε fixé) trouvées au § 2.5 sont valables à condition de remplacer α et β par α_ε et β_ε respectivement.

Pour ε fixé, $Dis(M,N(\theta,\varepsilon;t))$ sera minimum si $t = -\overrightarrow{GH}$, et si :

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \beta_\varepsilon/(\alpha_\varepsilon^2+\beta_\varepsilon^2)^{1/2} \\ \cos\theta &= \alpha_\varepsilon/(\alpha_\varepsilon^2+\beta_\varepsilon^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

sa valeur minimale étant donnée par la formule (11), où α et β sont remplacés par α_ε et β_ε. Il en résulte que $Dis(M,N(\theta,\varepsilon;t))$ sera minimum si $\vec{t}$ étant égal à $-\overrightarrow{GH}$ et les relations (14) étant vérifiées, ε maximise la quantité $\alpha_\varepsilon^2+\beta_\varepsilon^2$; or l'on a, d'après (12) :

$$\alpha_\varepsilon^2+\beta_\varepsilon^2 = (S_{xx}(M,N))^2 + (S_{yy}(M,N))^2 + (S_{yx}(M,N))^2 + (S_{xy}(M,N))^2$$
$$+ 2\varepsilon(S_{xx}(M,N)\ S_{yy}(M,N) - S_{yx}(M,N)\ S_{xy}(M,N))$$

On prendra donc :

$\varepsilon = +1$ si $S_{xx}(M,N)\ S_{yy}(M,N) - S_{yx}(M,N)\ S_{xy}(M,N) \geq 0$

$\varepsilon = -1$ sinon.

2.7 On a vu qu'en dimension 2, pour placer $N(I)$ relativement à $M(I)$ de façon à ce que l'écart entre les deux nuages soit minimum, il faut :

a) faire coïncider le centre de gravité H de N(I) avec le centre de gravité C de M(I).

b) effectuer une rotation du nuage N(I) d'un angle θ autour de G, θ choisi de façon à minimiser l'écart entre M(I) et N(I).

c) effectuer éventuellement une symétrie (cf §2.6, dans le cas où $\varepsilon=-1$) autour d'une droite passant par G (la droite passant par G et parallèle à l'axe ox dans le cas du § 2.6).

En dimension supérieure à deux, il faudra évidemment commencer par amener le centre de gravité H de N(I) à coïncider avec le centre de gravité G de M(I). On pourra ensuite effectuer une ou plusieurs rotations planes de centre G, (l'angle θ de chaque rotation étant choisi de façon à minimiser l'écart entre M(I) et N(I)), puis le cas échéant effectuer des symétries par rapport à des sous-espaces passant par G. La difficulté réside dans le choix du plan (ou des plans) de rotation. Si on fait l'analyse factorielle, on pourra par exemple faire tourner le nuage N(I) dans le plan des axes 1-2, puis dans le plan des axes 1-3 etc...

Il semble donc qu'un algorithme itératif, analogue à celui de Jacobi pour la diagonalisation des matrices, puisse fournir par rotations successives une solution approchée à la question 7. C'est cette suggestion que nous avions en vue en proposant la question au terme du problème. Un seul candidat, Ph. Bourgeois, y a pensé. Dans la suite, Ph. Bourgeois a effectivement conçu et programmé un algorithme itératif satisfaisant ; puis il a découvert une solution meilleure fondée sur la recherche des invariants d'un tenseur d'ordre 2 : cette solution fait l'objet de l'article suivant.