

## CAD

### **Substance et fonction, éléments pour une théorie du concept**

*Les cahiers de l'analyse des données*, tome 3, n° 2 (1978),  
p. 239-242

[http://www.numdam.org/item?id=CAD\\_1978\\_\\_3\\_2\\_239\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CAD_1978__3_2_239_0)

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MÉMOIRE REÇU

Substance et fonction,  
éléments pour une théorie du concept

### [DÉFINITIONS]

*d'après E. Cassirer*

*Analyse par J.-P. Benzécri (1)*

*Définition logique et définition statistique :*

*Notes de lecture sur un chapitre de Ernst Cassirer.*

Nous publions ici quelques réflexions inspirées par un texte de philosophie déjà ancien (publié en 1909), mais dont M. Volle nous a signalé l'importance pour les recherches contemporaines en analyse des données :

...."; les valeurs diverses que peuvent prendre, l'un par rapport à l'autre, le concept de chose et le concept de relation scandent,...., la distinction des deux grands types de logique...." En expliquant cette formule de Cassirer, on découvrira la théorie du concept qu'annonce son premier chapitre: à une logique scholastique de la chose, et à toute doctrine qui semblablement fonde la définition abstraite sur la reconnaissance d'un type qui ne retient des objets naturels que ce qu'ils ont en commun, C. préfère une logique, qui, s'inspirant des mathématiques, engendre des objets dont le degré de généralité croît avec leurs potentialités structurelles.

Comme il est fréquent en philosophie, C, ne présente ses propres pensées qu'en les opposant à d'autres. Un tel exposé montre avec vivacité où est l'enjeu; mais il ajoute à un problème de doctrine, un problème d'histoire des doctrines. Et tantôt le lecteur tente de saisir l'idéal positif que lui propose l'auteur; tantôt il se demande si au pôle opposé il a jamais existé, un penseur, fût-il scholastique, qui acceptât de tenir le langage qu'on lui prête.

Ce qu'on appelle en 1978 Mathématique Moderne, n'est pas vieux de deux siècles; il ne convient pas en effet de remonter avant Cauchy qui est de la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle; et la théorie des ensembles n'est que de la fin de ce même siècle. Cependant le terme de Math. Moderne, est communément employé pour désigner des objets aussi divers que le traité de N. Bourbaki, les manuels de l'enseignement primaire et secondaire français, la recherche mathématique contemporaine, le formalisme ensembliste... A plus forte raison le terme de scholastique, appliqué à tous ceux qui, grecs, arabes ou latins ont depuis 23 siècles invoqué le patronage d'Aristote, est-il une Arche de Noé où voguent confondus le Saint Patriarce, sa famille, et tous les animaux purs et impurs.

Vaut-il mieux alors ne plus parler d'histoire des doctrines, pour nous consacrer absolument à la recherche de la vraie doctrine? Même sans approfondir l'histoire, il faut particulièrement en philosophie, méditer sur la pérennité des problèmes et des solutions. On objectera que cette pérennité est illusoire: dans la phrase d'un ancien "la vie est issue de l'eau et du feu", un chimiste moderne s'émerveillera bien à tort de découvrir une prémonition des théories d'Oparine sur la biogénèse; le critique plus averti évoquera les mythes; et au fond il ne s'agit que d'une formule générale donnant rang de loi à cette observation banale, et à d'autres semblables, que la graine qu'on arrose germe au soleil. Nous croyons cependant juste de noter que sur une trame de plus en plus dense d'observations de la nature, au sein d'une société elle-aussi sans cesse plus complexe, l'analogie des rapports nous donne droit d'appliquer les mêmes mots et de cultiver la même sagesse.

(1) *Professeur de statistique. Université Pierre et Marie Curie. Paris.*

De ce point de vue, il ne fait pas de doute que E. Cassirer a dans les pensées de son temps vu juste ; mais on regrettera qu'il ait choisi de s'opposer à ceux qui avant lui avaient dans d'autres pensées, vu les mêmes vérités ; au lieu de s'attacher à l'analogie de l'être qui seul est l'objet ultime de la philosophie.

Sans l'analogie, la philosophie scholastique est inintelligible. Soit par exemple cette définition : *Substantia est cui competit habere esse in se et non in alio* : la substance est ce à quoi il appartient d'avoir l'être en soi et non dans un autre. Pour un philosophe chrétien, cette définition ne peut en toute rigueur s'appliquer qu'à Dieu seul : l'usage si étendu qu'on a fait du mot substance ne se peut donc comprendre qu'analogiquement. Le terme de substance ne s'applique pas univoquement à l'animal, au pain, à la pierre, au fer. L'animal n'est pas absolu, subsistant en lui-même sans dépendre de rien ; mais il est organisé en lui-même, et tend à subsister aux dépens de ce qui l'entoure. Le pain n'est tel que par l'homme qui l'a pétri, et pour l'homme qui s'en nourrit ; mais un processus physico-chimique complexe lui confère un ordre macroscopique (voire microscopique) homogène propre. La pierre n'a pas de limite qui lui soit propre, ni donc de forme géométrique définie indépendamment du hasard des cassures possibles ; mais elle a une structure que révèle son éclat, sa couleur, sa dureté ; et dont la minéralogie poursuit l'étude. Le fer à l'état de pureté, a comme tout corps simple des propriétés qui résultent de celles de ses atomes tous identiques (aux variantes isotopiques près). Pour autant qu'un objet peut être considéré en lui-même, il est substance ; mais ce point de vue n'est pas en tout également justifié, ni tout objet également solide. L'analogie donne seule la clé de tant de formules qui prises à la lettre sont ridicules, qu'on a pu répéter telles quelles dans les classes, mais qui dans la pensée des grands fondateurs ne sont que l'illustration schématique de rapports, présents partout dans le réel mais transposés indéfiniment sans jamais se répéter. Il faut avoir compris que Platon suggère avec l'éloquence imagée d'un poète, une réplique humoristique des profondeurs de l'être ; qu'Aristote enseigne en alternant dans une même prose des phrases qui sont comme des formules d'algèbre et d'autres qui sont des croquis d'exemples...

En faisant de la théorie du concept la pierre de touche des doctrines philosophiques, Cassirer va trop vite au but. Il doit considérer à la fois ce que les choses sont en elles-mêmes, la découverte que nous en faisons, et le langage dans lequel nous entendons fixer et renouveler cette découverte. Il serait plus sage d'accepter que notre langage soit d'abord imprécis, notre connaissance troublée par des reflets difficiles à dissiper, des passions qui ne se laissent pas dompter ; et de nous appliquer seulement à méditer sur l'existence réelle du monde, qui subsiste en dehors de nous et apparaît à nous, quand nous faisons silence et marchons sur la pointe des pieds. Dans cette méditation, il vaut mieux partir des sciences de la nature que des mathématiques : il est vrai que celles-ci offrent un trésor d'images pour mimer en nous le réel extérieur, et aussi reconstruire la pensée elle-même dans la pensée. Mais les objets mathématiques semblent se prêter à toutes les variations qu'il plait au géomètre, en sorte qu'on peut croire qu'ils sont les créatures de l'esprit humain ; même si à la vérité, toutes les variations raisonnables respectent des invariants dont l'ordre est comme une projection de l'ordre naturel selon les capacités de notre esprit à distinguer, composer et articuler. Tandis que les objets des sciences naturelles, même mal découpés et mal compris, apparaissent à l'esprit comme les témoins d'un univers extérieur, auquel il n'est point étranger mais qui s'impose à son attention et résiste à sa compréhension.

Dans l'enseignement scholastique, la distinction entre sciences de la nature et mathématiques s'inscrit dans l'échelle des *degrés d'abstraction* : la mathématique est au 2° degré d'abstraction parce qu'elle ne retient des objets matériels que les rapports d'espace ou de quantité ; au 3° degré est l'ontologie, qui étudie exclusivement les propriétés de l'être en tant que tel : identité et différence ; changement (génération et corruption) ; puissance et acte (ce qui peut être et ce qui est en effet, cf infra). Le terme d'abstraction est employé en beaucoup de sens, lesquels bien que

reliés entre eux, aboutissent à des conceptions philosophiques opposées. Etymologiquement, abstraire veut dire "tirer de", *abstrahere* ; mais que tire-t-on et comment ? Le procès lui-même (l'acte d'extraire) importe-t-il essentiellement ? Ou seul compte le terme ? On parle aujourd'hui de mathématique abstraite, et d'abstraction en général, quand on opère librement sur des entités dont les lois ne dépendent pas de l'ordre des phénomènes réels ; cependant, à l'univers abstrait de ces entités, l'esprit n'accède qu'en tirant du réel les notions mêmes d'ordre, de loi, de système : le terme (la science abstraite) n'existe que par le procès (l'abstraction active, ou l'acte d'abstraire) qui sans le déterminer exactement engendre et alimente le terme. D'autre part la langue courante dit "faire abstraction de" pour "ne pas considérer ; écarter de son champ" ; pour la philosophie, cette expression est ambiguë. Par exemple parler du chat en faisant abstraction de la couleur, ce peut être : considérer du chat une image en noir et blanc, telle que la peut voir un oeil insensible aux nuances du spectre, une image appauvrie ; ou ce peut être dire du chat ce qui convient à tous blancs ou fauves, noirs ou bigarrés ; y compris les propriétés de pigmentation qui existent chez tous (sauf les albinos) mais se manifestent diversement ; d'où finalement une connaissance générale plus riche que si on se bornait à une seule couleur déterminée.

Ici on doit considérer avec C. les rapports du particulier au général ; du concret à l'abstrait ; de l'individu à l'espèce ; de l'espèce au genre ; etc.. Reprenons (avec des notations un peu modifiées) l'exemple de C. : soit des individus  $\alpha \beta_1 \gamma_1$ ,  $\alpha \beta_2 \gamma_2$ , ...,  $\alpha \beta_n \gamma_n$ , décrits chacun comme possédant trois traits (ou caractères). En faisant abstraction des deux derniers éléments de chaque description, on dira que tous ces individus rentrent dans une seule espèce définie par le trait  $\alpha$ , et qu'on pourra appeler en bref : l'espèce  $\alpha$ . Mais même si le trait  $\alpha$  permet de définir cette espèce et d'en reconnaître les individus, on ne peut étudier celle-là sans égard aux traits  $\beta$ ,  $\gamma$  de ceux-ci. De ce point de vue, si on note B l'ensemble des modalités  $\beta$  que peut revêtir le deuxième caractère, et C l'ensemble des modalités  $\gamma$  du caractère trois : étudier l'espèce  $\alpha$  ce sera : étudier  $\alpha BC$ , c'est-à-dire outre le premier trait qui est fixé, tout ce que peut être le deuxième (B) ou le troisième (C) ; et de plus les associations permises entre ces derniers (de tel  $\beta$  avec  $\gamma$  plutôt qu'avec  $\gamma'$  ou  $\gamma''$ ). Dans le langage de l'Aristotélisme, on dira que l'individu ( $\alpha \beta_1 \gamma_1$ , ou  $\alpha \beta_2 \gamma_2$ ) possède actuellement (en acte) trois traits ; tandis que l'espèce possède en acte le trait  $\alpha$  et en puissance les caractères B et C qui s'actualisent dans chaque cas individuel suivant l'un ou l'autre de leurs traits ou modalités ( $\beta, \gamma$ ) : s'élever en généralité c'est restreindre le champ de l'actuel (de  $\alpha \beta \gamma$  à  $\alpha$ ) mais élargir le champ du potentiel (BC). Une telle réflexion n'est certes pas étrangère à la pensée traditionnelle ; même si certains exposés scolaires n'en disent rien.

Or les notions de puissance et acte, particulier et général, modalités et caractères, description (de l'individu) et définition (de la classe) sont aujourd'hui omniprésentes en analyse des données ; ainsi la philosophie inspire et éclaire nos techniques ; et celles-ci en retour, offrent à l'imagination des exemples sur lesquels il est plus facile de philosopher que naguère.

Pour munir un ensemble I d'individus d'une classification hiérarchique (I étant partagé en deux classes, comme un genre le serait en deux espèces ; puis chacune de celles-ci subdivisée, etc...) il convient de procéder d'abord par voie ascendante : agrégeant d'abord deux à deux les individus qui se ressemblent le plus ; et poursuivant l'édification des classes de rang supérieur en agrégeant les individus restant aux classes déjà formées, ou les classes aux classes. Dans cette construction l'on doit brasser l'ensemble des informations relatives aux individus. Cependant une fois que la hiérarchie des classes est construite, celle-ci peut *a posteriori* recevoir une définition très simple par une clé descendante ne mettant en jeu qu'un petit nombre de caractères : ainsi les animaux seront partagés entre ceux qui n'ont point de vertèbres et ceux qui en sont pourvus ; et ceux-ci distingués selon qu'ils possèdent ou non des poumons ; etc.

Une telle définition minima des classes, analogue à celle des logiciens par genre prochain et différence spécifique (e.g. homme = animal (genre) raisonnable (différence spécifique)) n'exprime qu'une partie de l'actuel (l'analogie de  $\alpha$  dans l'exemple ci-dessus : ce que les individus d'une classe possèdent actuellement) et ne dit rien du potentiel (B et C dans l'exemple : ce que les individus de la classe peuvent être) ; elle est à la fois simple et pauvre ; pour mieux adaptée qu'elle soit à l'équilibre réel des être elle ne l'exprime qu'incomplètement ; et notre esprit n'y parvient qu'après avoir effectué par voie ascendante une synthèse à la fois riche et complexe.

Les logiciens font état de définitions d'une notion en extension par énumération des individus auxquels s'étend la notion - ou en compréhension - par énumération des qualités que comprend la notion. Aucun de ces deux types de définition ne peut suffire : car une notion n'importe que par sa généralité ; et dans les êtres matériels ce qui est général s'étend potentiellement à un nombre infini d'individus (susceptibles d'exister sous la même notion) ; semblablement l'étude des qualités offre matière à des recherches indéfinies. En analysant le tableau de description  $k_{IJ}$  d'un ensemble d'individus I pour un ensemble de traits ou modalités J, on reconnaît des notions associées à une zone de l'espace où se superposent une classe d'individus i et une classe de modalités j. Ainsi se trouvent simultanément suggérées deux définitions complémentaires en extension (par les i) et en compréhension (par les j).

Construction imparfaite ; suggestion critiquable. Mais, après la pratique millénaire de la science, la pratique de l'analyse des données témoigne que la critique même suggère de nouvelles constructions qui convergent vers ce qu'on peut raisonnablement appeler la connaissance du réel. Il ne convient pas d'identifier à la hâte les concepts, les notions, les zones des diagrammes avec des êtres qui subsistent vraiment en eux-mêmes. Dans un tableau de correspondance, les ensembles I et J sont communément des échantillons ou des mosaïques pris arbitrairement en acceptant des contingences dont il est d'abord impossible de s'affranchir. Mais une fois acceptés I et J, les relations entre leurs éléments peuvent être observées et recensées par les  $k(i,j)$ . On retrouve ici la préférence manifestée par Cassirer pour les *relations* plutôt que pour les *choses*. Mais de même que la concordance entre les signaux reçus par deux voies sensorielles différentes (e.g. le toucher et la vue ; ou le toucher par la main et le lait dans la bouche) révèle à l'enfant la réalité d'un objet ; ainsi par leurs associations, les i et les j (dont le choix ou le découpage sont comme on l'a reconnu arbitraires et subjectifs) engendrent un espace, orientent des axes, cernent des classes et finalement nous convainquent que les relations sont entre des choses.