LES CAHIERS DE L'ANALYSE DES DONNÉES

P. CAZES

Problème : analyse d'un tableau invariant par permutation simultanée de ses lignes et de ses colonnes

Les cahiers de l'analyse des données, tome 2, n° 3 (1977), p. 265-271

<http://www.numdam.org/item?id=CAD_1977__2_3_265_0>

Les Cahiers de l'Analyse des Données
Vol. II - 1977 - n° 3 - p. 265-271

PROBLÈME : ANALYSE D'UN TABLEAU INVARIANT PAR PERMUTATION SIMULTANÉE DE SES LIGNES ET DE SES COLONNES [GROUPE]

Solution par P. Cazes (1)

On considère ici des tableaux de correspondance k_{IJ} invariants pour un groupe Ω opérant sur I et J, en sorte que $\forall\ (i,j) \in I \times J$: $k_{IJ}(\omega(i),\ \omega(j)) = k_{IJ}(i,j)$, et l'on étudie les propriétés d'invariance qui en résultent pour les facteurs.

Cette étude qui a été suggérée par l'analyse du tableau issu des résultats d'un sondage sur les qualités de divers candidats à des élections présidentielles (cf § 1.5) est présentée sous la forme d'un problème (*) muni de sa solution détaillée.

1. Enoncé du problème

Dans tout ce problème, on appelle permutation d'un ensemble fini I (ou J etc) une application biunivoque de I sur lui-même ; l'ensemble des permutations de I est noté I! ; une permutation σ est dite involutive si on a : $\sigma \circ \sigma$ = identité (i.e. si σ est son propre inverse) ; une permutation σ est dite d'ordre 3 si on a : $\sigma \circ \sigma \circ \sigma$ = identité ; plus généralement σ est dite d'ordre p si $\underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \sigma \ldots \circ \sigma}_{\text{p fois}}$ = identité.

Enfin, une permutation particulière σ d'un ensemble I devra être donnée sous le format ci-dessous en précisant l'image par σ de chaque élément de I :

$$\sigma : \{A,B,C\} \rightarrow \{B,C,A\}$$

(i.e. σ est la permutation de l'ensemble à trois éléments I = {A,B,C} telle que $\sigma(A) = B$, $\sigma(B) = C$, $\sigma(C) = A$)

1.1 Soit k_{IJ} un tableau de nombres positifs indicés par le produit des deux ensembles finis I et J (i.e. k_{IJ} est un tableau de correspondance sur I x J). On dit que deux permutations ρ et σ de I et J respectivement :

$$\rho \in I!\ ;\ \sigma \in J!\ ,$$

forment un couple conjugué relativement à k_{IJ} si est satisfaite la condition suivante :

$$\forall\ i \in I\ ,\ \forall\ j \in J\ :\ k(\rho(i),\ \sigma(j)) = k(i,j)\ .$$

(*) *Ce problème a été proposé aux étudiants du D.E.A. de statistique de l'Université Pierre et Marie Curie, à la session d'Octobre 1974.*

(1) *Maître-assistant I.S.U.P. - Laboratoire de Statistique - Université Pierre et Marie Curie Paris.*

Soient (ρ, σ) et (ρ', σ') deux couples conjugués relativement à k_{IJ} : Trouver $\tau \in J!$ tel que $(\rho \circ \rho', \tau)$ soit un couple conjugué relativement à k_{IJ}.

1.2 Soit (ρ,σ) un couple conjugué relativement à k_{IJ}. Soit $(F_\alpha(i), G_\alpha(j), \lambda_\alpha)$ un couple de facteurs associés et λ_α la valeur propre correspondante. Montrer que la fonction $F_\alpha \circ \rho$ sur l'ensemble I est un facteur ; quel est le facteur associé? Quelle est la valeur propre?

1.3 Soit λ une valeur propre issue de l'analyse de la correspondance k_{IJ} ; on désigne par $R^I(\lambda)$ la partie de R^I, ensemble des fonctions sur I qui sont des facteurs relatifs à cette valeur propre, au sens suivant :

$$R^I(\lambda) = \{f^I | f^I \in R^I \ ; \ f^I \circ f_I^J \circ f_J^I = \lambda f^I\}$$

(il s'agit de facteurs f^I non normalisés, de variance quelconque).

Soit (ρ,σ) un couple de permutations involutives ($\rho \circ \rho = id$, $\sigma \circ \sigma = id$; cf supra) conjugué relativement à k_{IJ}. Existe-t-il pour certaines valeurs de ε, dans $R^I(\lambda)$ des facteurs f^I tels que :

$$\forall\, i \in I : f^I(\rho(i)) = \varepsilon f^I(i) \ ;$$

pour quelles valeurs de ε peut-il en exister ? Ces facteurs particuliers (qu'on peut appeler facteurs propres pour (ρ,σ)) engendrent-ils $R^I(\lambda)$?

1.4 On reprend les hypothèses de la question 1.3 mais on considère maintenant un couple (ρ',σ') de permutations d'ordre 3 ($\rho' \circ \rho' \circ \rho' = id$;

$\sigma' \circ \sigma' \circ \sigma' = id$) conjugué relativement à k_{IJ}. Existe-t-il pour certaines valeurs γ, dans $R^I(\lambda)$ des facteurs f^I tels que :

$$\forall\, i \in I : f^I(\rho'(i)) = \gamma f^I(i) \ ;$$

pour quelles valeurs de γ peut-il en exister ? Ces facteurs particuliers engendrent-ils $R^I(\lambda)$?

1.5 On considère le tableau de correspondance k_{IJ} sur les deux ensembles suivants :

$$I = \{X,Y,Z\} \ ; \ J = \{C0,C1,C2,B0,B1,B2,S0,S1,S2\}$$

	Compétent			Brillant			Sympathique		
	C0	C1	C2	B0	B1	B2	S0	S1	S2
X	80	10	10	80	10	10	50	30	20
Y	30	40	30	30	20	50	30	35	35
Z	30	30	40	30	50	20	30	35	35

(Ce tableau est une schématisation des résultats d'un sondage relatif à trois candidats aux élections présidentielles françaises de Mai 1974). Montrer que ce tableau admet un couple de permutations conjuguées (ρ,σ) que l'on précisera.

1.6 Faire l'analyse du tableau k_{IJ} ci-dessus en recherchant les facteurs propres pour (ρ,σ) (cf 1.3 & 1.4). On précisera les facteurs F_α, G_α et les valeurs propres correspondantes, et on fera un graphique des deux ensembles I et J dans le plan rapporté aux axes 1 et 2.

2. *Solution du problème*

2.1 On a : $k(\rho(i), \sigma(j)) = k(i,j)$

$k(\rho'(i), \sigma'(j)) = k(i,j)$

donc : $k(\rho \circ \rho'(i), \sigma \circ \sigma'(j)) = k(\rho'(i), \sigma'(j)) = k(i,j)$;

$(\rho \circ \rho', \; \tau = \sigma \circ \sigma')$ est donc un couple conjugué relativement à k_{IJ}.

2.2 Posons $I' = \rho(I)$; $J' = \sigma(J)$

Le tableau $k_{I'J'}$ obtenu en effectuant respectivement les permutations ρ et σ sur I et J, étant identiques à k_{IJ}, puisque (ρ,σ) est conjugué par rapport à k_{IJ}, la transformation ρ laisse invariantes les distances distributionnelles entre éléments de I, ainsi que les masses de ces éléments. Il en résulte que si F_α est un facteur issu de l'analyse des correspondances de k_{IJ}, il en est de même de $F_\alpha \circ \rho$, ces deux facteurs étant relatifs à la même valeur propre λ_α.

Notons que l'on aurait pu obtenir ce résultat directement à partir de l'équation des facteurs :

$$F_\alpha^I \circ f_I^J \circ f_J^I = \lambda_\alpha F_\alpha^I$$

la permutation ρ laissant invariante la matrice $c_I^I = f_I^J \circ f_J^I$, comme il est facile de s'en assurer.

Si G'_α désigne le facteur associé à $F_\alpha \circ \rho$, on a d'après la formule de transition, et en désignant par $k(j)$ le total de la colonne j du tableau k_{IJ}, total encore égal à $k(\sigma(j))$ puisque

$$k(j) = \Sigma\{k(i,j) \mid i \in I\} = \Sigma\{k(\rho(i), \sigma(j)) \mid i \in I\} = \Sigma\{k(i',\sigma(j)) \mid i' \in I\} :$$

$$\begin{aligned} G'_\alpha(j) &= \Sigma\{F_\alpha(\rho(i))\, k(i,j)/(k(j)\sqrt{\lambda_\alpha}) \mid i \in I\} \\ &= \Sigma\{F_\alpha(\rho(i))\, k(\rho(i), \sigma(j)) / (k(\sigma(j))\sqrt{\lambda_\alpha}) \mid i \in I\} \\ &= \Sigma\{F_\alpha(i')\, k(i', \sigma(j)) / (k(\sigma(j))\sqrt{\lambda_\alpha}) \mid i \in I\} = G_\alpha(\sigma(j)). \end{aligned}$$

$G_\alpha \circ \sigma$ est donc le facteur associé à $F_\alpha \circ \rho$.

Remarque : On aurait pu donner directement les résultats précédents par application simultanée des deux formules de transition $F_\alpha^I = (1/\sqrt{\lambda_\alpha}) G_\alpha^J \circ f_J^I$; $G_\alpha^J = (1/\sqrt{\lambda_\alpha}) F_\alpha^I \circ f_I^J$, et en effectuant respectivement sur I et J les permutations ρ et σ, ces permutations simultanées laissant invariantes les transitions f_J^I et f_I^J.

2.3 SI f^I est un facteur de k_{IJ} vérifiant :

$$\forall\, i \in I \;:\; f^I(\rho(i)) = \varepsilon f^I(i) \qquad (1)$$

on a : $f^I(\rho^2(i)) = \varepsilon f^I(\rho(i)) = \varepsilon^2 f^I(i)$

soit puisque ρ est involutive ($\rho^2 = id$) :

$$f^I(i) = \varepsilon^2 f^I(i)$$

ce qui exige que ε soit égal à 1 ou à - 1.

Nous allons montrer que l'espace $R^I(\lambda)$ des facteurs sur I de k_{IJ} relatif à la valeur propre λ peut être engendré par des facteurs vérifiant (1).

En effet, si φ^I est un élément de $R^I(\lambda)$, il en est de même d'après 2.2 de $(\varphi \circ \rho)^I$, et donc de $f_\varepsilon^I = (\varphi \circ \rho)^I + \varepsilon\varphi^I$ (où $\varepsilon = \pm 1$), et il est immédiat de vérifier puisque $\rho^2 = id$, que f_ε^I satisfait (1). A tout facteur φ^I de $R^I(\lambda)$, on sait donc associer deux facteurs (dont l'un éventuellement identiquement nul) vérifiant (1) l'un avec $\varepsilon = 1$, l'autre avec $\varepsilon = -1$.

Posons :

$$S^I(\lambda) = \{\varphi^I \in R^I(\lambda) : (\varphi \circ \rho)^I = \varphi^I\}$$

et désignons par $T^I(\lambda)$ le supplémentaire orthogonal (pour la métrique du χ^2 induite dans R^I par k_{IJ}) de $S^I(\lambda)$ dans $R^I(\lambda)$. Il est facile de voir que si φ^I appartient à $T^I(\lambda)$, il en est de même de $(\varphi \circ \rho)^I$. Pour montrer que $R^I(\lambda)$ est engendré par des facteurs vérifiant (1), il suffit de montrer que $T^I(\lambda)$ est engendré par des facteurs vérifiant (1) avec $\varepsilon = -1$, ce qui revient encore à montrer que les $\{f_{-\alpha}^I = (\varphi_\alpha \circ \rho)^I - \varphi_\alpha^I \mid \alpha \in A\}$ construits à partir d'une base $\{\varphi_\alpha^I \mid \alpha \in A\}$ de $T^I(\lambda)$ engendrent $T^I(\lambda)$, i.e. sont linéairement indépendants. En effet si l'on a une relation de la forme :

$$\Sigma\{c_\alpha \; f_{-\alpha}^I \mid \alpha \in A\} = 0$$

on a, compte tenu de la définition de $f_{-\alpha}^I$, et en posant :

$$\psi_\alpha^I = \Sigma\{c_\alpha \varphi_\alpha^I \mid \alpha \in A\}$$

qui est un élément de $T^I(\lambda)$:

$$\psi_\alpha^I = (\psi_\alpha \circ \rho)^I$$

ce qui entraine que ψ_α^I appartient à $S^I(\lambda)$ et donc à $S^I(\lambda) \cap T^I(\lambda) = \{0\}$; ψ_α^I est donc nul. Il en résulte, puisque les $\{\varphi_\alpha^I \mid \alpha \in A\}$ forment une base de $T^I(\lambda)$ que : $\forall \alpha \in A$, $c_\alpha = 0$. Les fonctions $\{f_{-\alpha}^I \mid \alpha \in A\}$ qui vérifient (1) avec $\varepsilon = -1$ sont donc linéairement indépendantes, et constituent une base de $T^I(\lambda)$, c.q.f.d.

2.4 Soit (ρ', σ') un couple de permutations d'ordre 3 conjugué relativement à k_{IJ}, et f^I un facteur appartenant à $R^I(\lambda)$ et tel que :

$$\forall \; i \in I : f^I(\rho'(i)) = \gamma f^I(i) \qquad (2)$$

On a alors :

$$f^I(i) = f^I(\rho'^3(i)) = \gamma f^I(\rho'^2(i)) = \gamma^2 f^I(\rho'(i)) = \gamma^3 f^I(i)$$

ce qui implique que $\gamma^3 = 1$, soit $\gamma = 1$.

Si φ^I est un élément de $R^I(\lambda)$, $(\varphi \circ \rho')^I$ et $(\varphi \circ \rho'^2)^I$ sont encore des éléments de $R^I(\lambda)$, et donc

$$f^I = \varphi^I + (\varphi \circ \rho')^I + (\varphi \circ \rho'^2)^I \qquad (3)$$

est encore un élément de $R^I(\lambda)$, i.e., si $f^I \neq 0$ un facteur associé à la valeur propre λ, ce facteur vérifiant la relation (2) où $\gamma = 1$.

En général les facteurs f^I vérifiant (2) et relatifs à la valeur propre λ n'engendrent pas $R^I(\lambda)$ (l'élément f^I déduit par (3) d'un facteur φ^I de $R^I(\lambda)$, pouvant être nul) comme on peut le vérifier sur le contre exemple suivant où $I = \{1,2,3\}$, $\rho' : \{1,2,3\} \to \{2,3,1\}$, le seul facteur vérifiant (2) étant le facteur trivial constant.

Remarque

Si l'on considère les espaces vectoriels non sur le corps R des réels, mais sur le corps C des complexes, la relation $\gamma^3 = 1$ implique que γ est l'une des racines cubiques de 1, à savoir 1, j ou j^2.

Si φ^I est un facteur relatif à la valeur propre λ, (i.e. un élément de $R^I(\lambda)$), et si γ est une racine cubique de 1,

$$f_\gamma^I = \varphi^I + (1/\gamma)(\varphi \circ \rho')^I + (1/\gamma^2)(\varphi \circ \rho'^2)^I = \varphi^I + \gamma^2(\varphi \circ \rho')^I + \gamma(\varphi \circ \rho'^2)^I \quad (4)$$

est encore un facteur (si $f_\gamma^I \neq 0$) relatif à la même valeur propre λ et qui vérifie (2) puisque $\rho'^3 = id$

On peut noter qu'à partir de f_j^I (*) et f_{j2}^I qui sont imaginaires conjugués, on peut construire, si $f_j^I \neq 0$, deux facteurs réels (associés à la même valeur propre λ qui est donc de multiplicité supérieure ou égale à 2) correspondant à la partie réelle et à la partie imaginaire de f_j^I, et l'on peut montrer que ces deux facteurs sont orthogonaux et de même variance.

Posons : $S^I(\lambda) = \{\varphi^I \in R^I(\lambda) : (\varphi \circ \rho')^I = \varphi^I\}$ et désignons comme au § 2.3 par $T^I(\lambda)$ l'espace orthogonal à $S^I(\lambda)$ dans $R^I(\lambda)$. Il est immédiat de vérifier que :

$$\forall \varphi^I \in S^I(\lambda) : f_1^I = 3\,\varphi^I \;;\; f_j^I = f_{j2}^I = 0$$

$$\forall \varphi^I \in T^I(\lambda) : f_1^I = \varphi^I + (\varphi \circ \rho')^I + (\varphi \circ \rho'^2)^I = 0$$

$$f_j^I \in T^I(\lambda) \quad ; \quad f_{j2}^I \in T^I(\lambda)$$

$$f_j^I \neq 0 \;;\; f_{j2}^I \neq 0 \text{ si } \varphi^I \neq 0$$

Il en résulte que pour tout facteur réel φ^I appartenant à $T^I(\lambda)$, φ^I, $(\varphi \circ \rho')^I$, $(\varphi \circ \rho'^2)^I$ engendrent un sous espace $E(\varphi^I)$ de $T^I(\lambda)$ de dimension 2, espace que l'on peut caractériser par les facteurs imaginaires conjugués f_j^I et f_{j2}^I déduits de φ^I par la relation (4) et vérifiant

---

(*) *On note ici f_j^I la fonction f_γ^I associée à $\gamma = j$, aucune confusion n'étant à craindre dans le contexte avec la fonction f_j^I associée à la transition f_J^I.*

(2), ou par les facteurs réels et orthogonaux $(f_j^I + f_{j2}^I)/2$ et $(f_j^I - f_{j2}^I)/2i$ (*). Caractérisant $E(\varphi^I)$ par f_j^I et f_{j2}^I, puis recommençant le processus avec un facteur réel φ'^I de $T^I(\lambda)$ orthogonal à $E(\varphi^I)$ on construit de proche en proche une série de facteurs engendrant $T^I(\lambda)$ et vérifiant (2). Il en résulte que $R^I(\lambda)$ peut être engendré par des facteurs (dont certains sont complexes sauf si $T^I(\lambda) = \{0\}$) vérifiant (2).

2.5 Le couple de permutations conjuguées (ρ,σ) de k_{IJ} s'écrit :

$$\rho : \{X,Y,Z\} \rightarrow \{X,Z,Y\}$$

$$\sigma : \{C_0,C_1,C_2,B_0,B_1,B_2,S_0,S_1,S_2\} \rightarrow \{C_0,C_2,C_1,B_0,B_2,B_1,S_0,S_1,S_2\}.$$

Ces permutations sont d'ordre 2 : $\rho \circ \rho = id$; $\sigma \circ \sigma = id$.

2.6 Soit $f^I = \{f^X, f^Y, f^Z\}$ un facteur non trivial de k_{IJ}.

$(f \circ \rho)^I = \{f^X, f^Z, f^Y\}$ est encore un facteur associé à la même valeur propre.

De plus ces deux facteurs sont de moyenne nulle. Comme les totaux $k(X)$, $k(Y)$, $k(Z)$ des lignes X, Y, Z sont égaux, on a :

$$f^X + f^Y + f^Z = 0$$

$f^I + (f \circ \rho)^I$ et $f^I - (f \circ \rho)^I$ étant encore facteurs (cf § 2.3) l'on en déduit que les deux facteurs non triviaux de variance 1 de k_{IJ} s'écrivent:

$$\varphi_1^I = (1/\sqrt{2})\ (-2\ ;\ 1\ ;\ 1) \quad ; \quad \varphi_2^I = \sqrt{3/2}\ (0\ ;\ 1\ ;\ -1)$$

avec $(\varphi_1 \circ \rho)^I = \varphi_1^I$; $(\varphi_2 \circ \rho)^I = -\varphi_2^I$.

Ces deux facteurs sont donc propres pour (ρ,σ).

Les facteurs associés G_α ($\alpha = 1, 2$) de variance la valeur propre λ_α s'obtiennent par la formule de transition :

$$G_\alpha(j) = \varphi_\alpha^I \circ f_I^j = \Sigma\{k(i,j)\ \varphi_\alpha^i \mid i \in I\}/k(j)$$

d'où l'on déduit :

$$G_1 = (1/\sqrt{2})(-10/14\ ;\ 5/8;5/8;\ -10/14;5/8;5/8;\ -4/11;1/10;3/9)$$
$$= (-0,505;0,442;0,442;-0,505;0,442;0,442;-0,256;0,707;0,236)$$

$$G_2 = (\sqrt{3/2})\ (0\ ;\ 1/8\ ;\ -1/8\ ;\ 0\ ;\ -3/8\ ;\ 3/8\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0)$$
$$= (0\ ;\ 0,153\ ;\ -0,153\ ;\ 0\ ;\ -0,46\ ;\ 0,46\ ;\ 0\ ;\ 0\ ;\ 0)$$

Calcul des valeurs propres λ_α

Pour calculer λ_α, il suffit d'écrire que G_α est de variance λ_α :

$$\lambda_1 = (1/180)(100/14 + 25/8 + 25/8 + 100/14 + 25/8 + 25/8 + 16/11 + 1/10 + 1)$$
$$= 11296/69300 \approx 0,163$$

$$\lambda_2 = (3/180)\ (1/8 + 1/8 + 9/8 + 9/8) = 1/24 \approx 0,0417$$

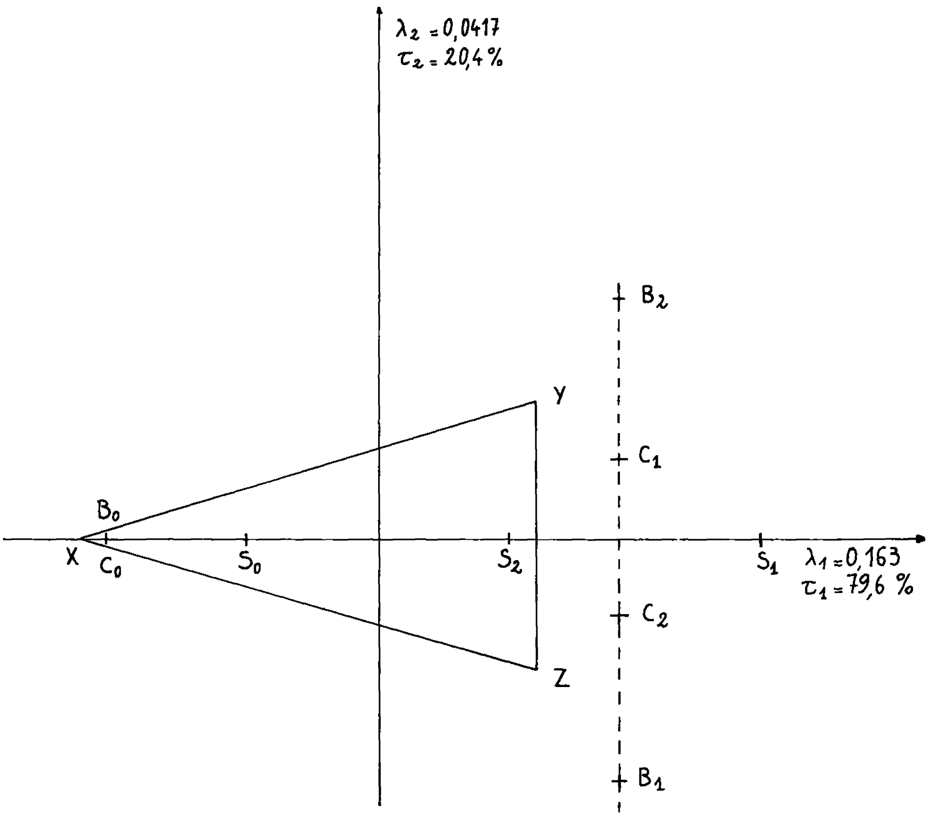
(*) *i étant le symbole des imaginaires.*

Pour avoir les facteurs F_α^I de variance λ_α, il suffit de multiplier φ_α^I par $\sqrt{\lambda_\alpha}$:

$$F_1^I = \sqrt{0,163/2}\,(-2\ ;\ 1\ ;\ 1) = (-\ 0,572\ ;\ 0,286\ ;\ 0,286)$$

$$F_2^I = (1/4)\ (0\ ;\ 1\ ;\ -1) = (\ 0\ ;\ 0,25\ ;\ -\ 0,25)$$

d'où la représentation graphique donnée ci-après.



Représentation de I et J ;
on a donné aux demi-axes positifs longueur 1.