

P. CAZES

**Étude de quelques propriétés extrémales
des facteurs issus d'un sous-tableau
d'un tableau de Burt**

Les cahiers de l'analyse des données, tome 2, n° 2 (1977),
p. 143-160

http://www.numdam.org/item?id=CAD_1977__2_2_143_0

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES
DES FACTEURS ISSUS D'UN SOUS-TABLEAU
D'UN TABLEAU DE BURT

[EXTR. FAC]

par P. Cazes (1)

1. Introduction

Nous nous proposons ici de donner des propriétés extrémales des facteurs issus d'un tableau de Burt, ou d'un sous-tableau de ce tableau.

Après avoir défini au § 2 les notations et rappelé l'équation des facteurs du tableau de Burt, et d'un sous-tableau quelconque $k_{JJ'}$, de ce tableau, nous donnons au § 3 une propriété extrémale des facteurs de $k_{JJ'}$.

Au § 4, nous donnons une autre caractérisation des facteurs du tableau de Burt, en nous inspirant d'une idée de Carroll reprise par Saporta.

Au § 5, nous considérons le cas particulier du tableau $k_{JJ'}$, où l'on croise les deux ensembles J et J' de questions, les questions à l'intérieur de chacun des deux ensembles J ou J' étant indépendantes. Nous montrons que dans ce cas, l'analyse des correspondances de $k_{JJ'}$, est équivalente à l'étude de la position respective de deux sous-espaces. Nous montrons également que l'analyse de $k_{JJ'}$, est équivalente à celle du tableau $k_{J \cup J', J \cup J'}$, et nous donnons une limitation des valeurs propres.

Enfin au § 6, nous montrons que si J_q désigne l'ensemble des modalités de la question q , I le produit des J_q , et S l'ensemble des sujets ayant répondu au questionnaire, on peut au lieu de raisonner dans R^I , comme on l'a fait, pour trouver les propriétés des facteurs, raisonner dans R^S .

2. Notations - Equation des facteurs.

2.1. Notations

Nous reprenons ici, à quelques différences près les notations de [Bin. Mult.], CAD, vol. II, n° 1.

Soit $\{J_q | q \in Q\}$ une famille finie d'ensembles finis J_q , indicée par $q \in Q$. On note :

(1) ISUP - Laboratoire de Statistique - Université Pierre et Marie Curie - Paris.

$$\cup \{J_q | q \in Q\} = L; \quad \pi \{J_q | q \in Q\} = I \quad (1)$$

où le symbole \cup correspond à l'union disjointe des J_q (cf [Bin. Mult.] § 1) et où l'on a noté L ce qui était noté J dans [Bin. Mult.]

L'on suppose que l'on a un tableau de contingence k_I sur I (i.e. un tableau multiple); l'on désigne par p_I la loi de probabilité associée sur I ($p_I = k_I/n$ si n est le total des éléments du tableau k_I , i.e. le nombre total de sujets soumis au questionnaire défini par les J_q), et par k_{LL} le tableau de Burt croisant l'ensemble des modalités de tous les $\{J_q | q \in Q\}$ avec lui-même.

Nous désignerons par p_{J_q} , $p_{J_q J_{q'}}$, les lois marginales associées à p_I sur J_q et sur $J_q \times J_{q'}$, et par $p_{J_q}^{J_{q'}}$ la loi conditionnelle de J_q connaissant $j \in J_{q'}$.

Notons que si $q = q'$, $p_{J_q J_q}$ n'est autre que le tableau diagonal des $\{p_{J_q}(j) | j \in J_q\}$ tandis que $p_{J_q}^{J_q}$ n'est autre que la matrice unité.

Nous considèrerons deux parties quelconques K et K' de Q , d'intersection vide ou non, dont la réunion n'est pas en général Q .

Nous poserons :

$$\left. \begin{aligned} \forall q \in K' : J_q' &= J_q \\ J &= \cup \{J_q | q \in K\} \\ J' &= \cup \{J_q | q \in K'\} = \cup \{J_q' | q \in K'\} \\ C_K &= \text{Card } K \\ C_{K'} &= \text{Card } K' \\ C_J &= \text{Card } J \\ C_{J'} &= \text{Card } J' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Nous allons établir certaines propriétés des facteurs issus du tableau k_{JJ} , sous tableau du tableau de Burt k_{LL} .

2.2. Equation des facteurs

Les lois conditionnelles $p_{J'}^{J'}$, et $p_{J'}^{J'}$ associées au tableau k_{JJ} , s'écrivent :

$$p_{J'}^{J'} = \{p_{J_q'}^{J_q'} | q \in K, q' \in K'\}$$

$$p_{J'}^{J'} = \{p_{J_q}^{J_q'} | q \in K, q' \in K'\}$$

avec :

$$p_{J_q'}^{J_q'} = (1/C_{K'}) p_{J_q}^{J_q'}$$

$$p_{\mathcal{Q}}^{J'} q' = (1/C_K) p_{\mathcal{Q}}^{J'} q'$$

l'équation des facteurs de variance 1 ($\varphi^J, \varphi^{J'}$) de $k_{JJ'}$ s'écrit, si l'on pose :

$$\left. \begin{aligned} \varphi^J &= \{ \varphi^{\mathcal{Q}} | \mathcal{Q} \in K \}; \\ \varphi^{J'} &= \{ \varphi^{J'} | \mathcal{Q} \in K' \}; \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} (1/C_K) \sum \{ \varphi^{J'} q' \circ p_{\mathcal{Q}}^{J'} | \mathcal{Q} \in K' \} &= \sqrt{\lambda} \varphi^{\mathcal{Q}} ; \\ (1/C_K) \sum \{ \varphi^{\mathcal{Q}} \circ p_{\mathcal{Q}}^{J'} | \mathcal{Q} \in K \} &= \sqrt{\lambda} \varphi^{J'} ; \end{aligned} \right\} (4)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} (1/C_K) \sum \{ \|\varphi^{\mathcal{Q}}\|^2 | \mathcal{Q} \in K \} &= 1 ; \\ (1/C_{K'}) \sum \{ \|\varphi^{J'}\|^2 | \mathcal{Q} \in K' \} &= 1 ; \end{aligned} \right\} (5)$$

Les deux équations (4) impliquant :

$$\left. \begin{aligned} (1/C_K C_{K'}) \sum \{ \varphi^{\mathcal{Q}''} \circ p_{\mathcal{Q}''}^{J'} \circ p_{\mathcal{Q}}^{J'} | \mathcal{Q}'' \in K, \mathcal{Q}' \in K' \} &= \lambda \varphi^{\mathcal{Q}} \\ (1/C_K C_{K'}) \sum \{ \varphi^{J''} \circ p_{\mathcal{Q}}^{J'} \circ p_{\mathcal{Q}'}^{J'} | \mathcal{Q} \in K, \mathcal{Q}'' \in K' \} &= \lambda \varphi^{J'} \end{aligned} \right\} (6)$$

Dans le cas où $K = K' = Q, J = J' = L, \varphi^J = \varphi^{J'} = \varphi^L,$
 $C_K = C_{K'} = \text{Card } Q,$ les équations (4) redonnent l'équation des facteurs du tableau de Burt k_{LL} .

$$(1/C_Q) \sum \{ \varphi^{\mathcal{Q}'} \circ p_{\mathcal{Q}'}^{J'} | \mathcal{Q}' \in Q \} = \sqrt{\lambda} \varphi^{\mathcal{Q}} \quad (7)$$

avec :

$$(1/C_Q) \sum \{ \|\varphi^{\mathcal{Q}}\|^2 | \mathcal{Q} \in Q \} = 1 \quad (8)$$

où l'on a noté C_Q pour $\text{Card } Q,$ comme C_K pour $\text{Card } K.$

Remarques :

1) On peut noter que, du fait de la structure particulière du tableau $k_{JJ'},$ si $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ est un couple de facteurs non triviaux, φ^J (resp $\varphi^{J'}$) est de moyenne nulle sur chaque $J_{\mathcal{Q}}$ ($\mathcal{Q} \in K$) (resp. $J'_{\mathcal{Q}}$ ($\mathcal{Q} \in K'$)); en effet on a :

$$\forall \mathcal{Q} \in K : \sum \{ k_{JJ'}(j, j') | j \in J_{\mathcal{Q}} \} = (1/C_K) \sum \{ k_{JJ'}(j, j') | j \in J \}$$

$$\forall \mathcal{Q} \in K' : \sum \{ k_{JJ'}(j, j') | j' \in J'_{\mathcal{Q}} \} = (1/C_{K'}) \sum \{ k_{JJ'}(j, j') | j' \in J' \}$$

Il en résulte que le nombre de facteurs non triviaux de k_{JJ} , est au plus égal à $\min\{C_J - C_K, C_{J'}, - C_{K'}\}$.

Notons que si φ^K est une fonction de moyenne nulle et variance 1, sur K muni de la loi uniforme, i.e. :

$$(1/C_K) \sum \{\varphi^q | q \in K\} = 0$$

$$(1/C_K) \sum \{(\varphi^q)^2 | q \in K\} = 1$$

et si :

$$\varphi^J_q = \varphi^q \delta^J_q$$

$\varphi^J = \{\varphi^J_q | q \in K\}$ (fonction prenant sur chaque J_q la valeur constante φ^q) est un facteur de variance 1 de k_{JJ} , associé à la valeur propre 0. Ce facteur peut être dit trivial en ce que sa présence ne nous apporte aucune information quant aux corrélations entre les questions.

Faisant choix d'un système de $C_K - 1$ fonctions sur K de moyenne nulle, de variance 1, et non corrélées, on obtient ainsi $(C_K - 1)$ facteurs sur J de k_{JJ} , associés à la valeur propre 0, facteurs qui joints au facteur trivial δ^J relatif à la valeur propre 1 donnent C_K facteurs triviaux sur J pour k_{JJ} . On construirait de même $C_{K'}$ facteurs triviaux $\varphi^{J'}$ de k_{JJ} , à partir d'un système de $C_{K'}$ fonctions sur K' , de variance 1, non corrélées, dont la première est la fonction constante.

2) Pour rechercher les facteurs non triviaux de k_{JJ} , on peut se ramener à diagonaliser une matrice symétrique de dimension $r = \min(C_J - C_K, C_{J'}, - C_{K'})$. Si par exemple $C_J - C_K < C_{J'}, - C_{K'}$, et si H^J désigne l'espace des fonctions sur J de moyenne nulle sur chaque J_q , espace qui est de dimension $C_J - C_K$, il suffit de choisir une base orthonormée de H^J , et d'exprimer les facteurs dans cette base (cf. [Bin. Mult.] § 3.5). Notons que l'on peut choisir chaque fonction de cette base de façon à ce que son support soit un des sous-ensembles J_q de J .

3) Supposons que l'on ait une partition de K (resp. K') en deux classes K_1 et K_2 (resp. K'_1 et K'_2) de telle sorte que :

$$\forall (q, q') \in K \times K' - K_1 \times K'_1 : p_{J_q J'_q} = p_{J_q} \otimes p_{J'_q},$$

ce qui signifie que toute question q' de K_2 (resp. q' de K'_2) est indépendante de toute question q' de K' (resp. q de K).

Posons :

$$J^1 = \cup \{J_q | q \in K_1\}$$

$$J^2 = \cup \{J_q | q \in K_2\}$$

$$J'^1 = \cup \{J'_q | q' \in K'_1\}$$

$$J'^2 = \cup \{J'_q | q' \in K'_2\}$$

Soit $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ un couple de facteurs associés non triviaux (i.e. centrés sur chaque sous ensemble J_q ou $J'_{q'}$) et de variance 1 de $k_{JJ'}$; on a :

$$\forall (q, q') \in K \times K' - K_1 \times K'_1 :$$

$$\begin{aligned} \varphi^J_{q \circ p_{J_q}} \varphi^{J'}_{q'} &= (\varphi^J_{q \circ p_{J_q}}) \delta^{J'}_{q'} = 0 \\ \varphi^{J'}_{q' \circ p_{J'_{q'}}} \varphi^J_q &= (\varphi^{J'}_{q' \circ p_{J'_{q'}}}) \delta^J_q = 0; \end{aligned}$$

L'on déduit alors de (4) que la restriction de φ^J (resp. $\varphi^{J'}$) à J^2 (resp. J'^2) est nulle, et que si φ^{J^1} (resp. $\varphi^{J'^1}$) est la restriction de φ^J (resp. $\varphi^{J'}$) à J^1 (resp. J'^1), $((C_{K_1}/C_K)^{1/2} \varphi^{J^1}, (C_{K'_1}/C_{K'})^{1/2} \varphi^{J'^1})$ est un couple de facteurs associés non triviaux et de variance 1 de la correspondance $k_{J^1 J'^1}$ croisant J^1 avec J'^1 , C_{K_1} (resp. $C_{K'_1}$) désignant le cardinal de K_1 (resp. K'_1).

L'analyse des correspondances du tableau $k_{JJ'}$ est donc dans ce cas équivalente à l'analyse des correspondances du tableau $k_{J^1 J'^1}$.

2.3. Etude d'un cas particulier.

Supposons qu'il existe deux fonctions $\varphi^J = \{\varphi^J_q | q \in K\}$, $\varphi^{J'} = \{\varphi^{J'}_{q'} | q' \in K'\}$ telles que pour tout couple (q, q') de $K \times K'$, $(\varphi^J_q, \varphi^{J'}_{q'})$ soit un couple de facteurs de variance 1 de $p_{J_q J'_{q'}}$:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^J_{q \circ p_{J_q}} \varphi^{J'}_{q'} &= \lambda_{qq'} \varphi^{J'}_{q'} \\ \varphi^{J'}_{q' \circ p_{J'_{q'}}} \varphi^J_q &= \lambda_{qq'} \varphi^J_q \end{aligned} \right\} \quad (8 \text{ bis})$$

$\lambda^2_{qq'}$ désignant dans la correspondance $p_{J_q J'_{q'}}$ la valeur propre associée au couple de facteurs $(\varphi^J_q, \varphi^{J'}_{q'})$.

Considérons les fonctions $\{\psi^J_q | q \in K\}$, (resp. $\{\psi^{J'}_{q'} | q' \in K'\}$), ψ^J_q (resp. $\psi^{J'}_{q'}$) étant la fonction sur J (resp. J') nulle sur $J - J_q$ (resp. $J' - J'_{q'}$) et dont la restriction à J_q (resp. $J'_{q'}$) est φ^J_q (resp. $\varphi^{J'}_{q'}$). Les fonctions $\{\psi^J_q | q \in K\}$ (resp. $\{\psi^{J'}_{q'} | q' \in K'\}$) forment dans R^J (resp. $R^{J'}$) un système de fonctions non corrélées. Nous désignerons par H^J (resp. $H^{J'}$) le sous espace de R^J (resp. $R^{J'}$) engendré par les $\{\psi^J_q | q \in K\}$ (resp. $\{\psi^{J'}_{q'} | q' \in K'\}$). De (4) et (8 bis) l'on déduit que :

$$\begin{aligned} p^{J'}_{J'} (H^{J'}) &\subset H^J \\ p^{J'}_{J'} (H^J) &\subset H^{J'} \end{aligned}$$

et donc que l'espace H^J (resp. $H^{J'}$) est stable pour $p^{J'}_{J'} \circ p^J_{J'}$ (resp. $p^J_{J'} \circ p^{J'}_{J'}$).

Il existe donc une base de H^J (resp. $H^{J'}$) formée de facteurs de k_{JJ} . De façon précise, si $(\psi^J, \psi^{J'})$ où :

$$\psi^J = \sum \{u^q \psi^J_q | q \in K\} \subset H^J, \quad \psi^{J'} = \sum \{v^{q'} \psi^{J'}_{q'} | q' \in K'\} \subset H^{J'}$$

est un couple de facteurs associés de k_{JJ} , relatif à la valeur propre λ , l'on déduit de (4) et (8 bis) que $u^K = \{u^q | q \in K\}$ et $v^{K'} = \{v^{q'} | q' \in K'\}$ vérifient les équations :

$$(1/C_K) u^K \circ L^K_{K'} = \sqrt{\lambda} v^{K'}$$

$$(1/C_{K'}) v^{K'} \circ L^K_{K'} = \sqrt{\lambda} u^K$$

avec $\forall q, q' \in K \times K' : L^K_{K'}(q') = L^K_{K'}(q) = \lambda_{qq'}$

u^K (resp. $v^{K'}$) est donc vecteur propre de la matrice symétrique $L^K_{K'} \circ L^K_{K'}$ (resp. $L^K_{K'} \circ L^K_{K'}$) relatif à la valeur propre $\lambda C_K C_{K'}$.

Prenant $\varphi^J = \delta^J, \varphi^{J'} = \delta^{J'}$, on retrouve ainsi à partir des facteurs triviaux constants des correspondances $p_{J_q, J'_{q'}}$, les facteurs triviaux (i.e. constants sur chaque sous ensemble J_q ou $J'_{q'}$) de k_{JJ} ; dans ce cas les matrices $L^K_{K'}$ et $L^K_{K'}$ sont de rang 1, et ont tous leurs éléments égaux à 1.

Si on a un questionnaire binaire, et si l'on désigne par φ^{J_q} (resp. $\varphi^{J'_{q'}}$) la seule fonction (au signe près) centrée sur J_q (resp. $J'_{q'}$) et de variance 1, $(\varphi^{J_q}, \varphi^{J'_{q'}})$ est le seul couple de facteurs non triviaux et de variance 1 de $p_{J_q, J'_{q'}}$. Posant $\varphi^J = \{\varphi^{J_q} | q \in K\}$, $\varphi^{J'} = \{\varphi^{J'_{q'}} | q' \in K'\}$ on se trouve dans le cas particulier étudié ici.

Le terme général $\lambda_{qq'}$ de la matrice $L^K_{K'}$ et de sa transposée $L^K_{K'}$ est alors tel que $\lambda_{qq'}^2$ est la trace associée à la correspondance $p_{J_q, J'_{q'}}$. De plus les facteurs non triviaux sur J (resp. J') de k_{JJ} , appartiennent à l'espace H^J (resp. $H^{J'}$) puisqu'ils sont centrés sur chaque J_q ($q \in K$) (resp. $J'_{q'}$ ($q' \in K'$)). On est ainsi ramené pour chercher ces facteurs à diagonaliser soit $L^K_{K'} \circ L^K_{K'}$ si $C_K < C_{K'}$, soit $L^K_{K'} \circ L^K_{K'}$ si $C_{K'} < C_K$, i.e. à diagonaliser une matrice symétrique de dimension $r = \min(C_K, C_{K'})$ au lieu de diagonaliser une matrice de dimension $2r$.

2.4. Rappel sur les opérateurs de projection de R^{J_q} dans $R^{J'_{q'}}$ considérés comme des sous-espaces de R^I .

Pour étudier les propriétés extrémales des facteurs, on se placera dans l'espace produit R^I .

Une fonction d'une variable φ^{J_q} pourra être considérée comme une fonction sur I ne dépendant que de J_q et que l'on peut écrire $\varphi^{J_q} \circ \pi^I_{J_q}$ où $\pi^I_{J_q}$ désigne l'application projection de I sur J_q .

Nous poserons :

$$\left. \begin{aligned}
 W_q &= \{ \varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I \mid \varphi^{J_q} \in R^{J_q} \} \\
 &= \{ \varphi^{J_q} \otimes \{ \delta^{J_{q'}} \mid q' \in Q - \{q\} \} \mid \varphi^{J_q} \in R^{J_q} \} \subset R^I,
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(où $\delta^{J_{q'}}$ est la fonction constante et égale à un sur $J_{q'}$); W_q est le sous espace de R^I , isomorphe à R^{J_q} , engendré par les fonctions ne dépendant que de J_q .

Nous supposons R^I muni de la norme (ou pseudo norme si le support de p_I est différent de I) p_I .

On a alors :

$$\langle \varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I, \psi^{J_{q'}} \circ \pi_{J_{q'}}^I \rangle_{p_I} = \langle \varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^{J_q J_{q'}}, \psi^{J_{q'}} \circ \pi_{J_{q'}}^{J_q J_{q'}} \rangle_{p_{J_q J_{q'}}} \quad (*) \quad (10)$$

$$\langle \varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I, \psi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I \rangle_{p_I} = \langle \varphi^{J_q}, \psi^{J_q} \rangle_{p_{J_q}} \quad (11)$$

Afin de ne pas alourdir les notations, quand il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre, nous omettrons souvent les $\pi_{J_q}^I$. C'est ainsi que l'expression (10) sera notée $\langle \varphi^{J_q}, \psi^{J_{q'}} \rangle_{p_{J_q J_{q'}}}$ (ou $\langle \varphi^{J_q}, \psi^{J_{q'}} \rangle_{p_{J_q J_{q'}}}$).

De même l'on notera $\| \varphi^{J_q} - \psi^{J_{q'}} \|^2$

(ou $\| \varphi^{J_q} - \psi^{J_{q'}} \|^2_{p_{J_q J_{q'}}}$) pour :

$$\| \varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I - \psi^{J_{q'}} \circ \pi_{J_{q'}}^I \|_{p_I}^2 = \| \varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^{J_q J_{q'}} - \psi^{J_{q'}} \circ \pi_{J_{q'}}^{J_q J_{q'}} \|_{p_{J_q J_{q'}}}^2$$

Dans ces conditions l'opérateur de projection de W_q sur $W_{q'}$ est l'opérateur défini par la transition $p_{J_q J_{q'}}$ qui à φ^{J_q} associe $\varphi^{J_q} \circ p_{J_q J_{q'}}$ (i.e. qui à $\varphi^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I$ associe $\varphi^{J_q} \circ p_{J_q J_{q'}} \circ \pi_{J_q}^I$).

Nous noterons $(A_q)_I^I$ l'opérateur de projection de R^I sur le sous-espace W_q , opérateur dont la restriction à W_q est $p_{J_q}^{J_q}$.

Nous poserons enfin :

(*) où $\pi_{J_q}^{J_q J_{q'}}$ et $\pi_{J_{q'}}^{J_q J_{q'}}$ désignent respectivement les projections de

$J_q \times J_{q'}$ sur J_q et $J_{q'}$.

$$\left. \begin{aligned}
 R^J &= R^J \oplus \{ \lambda \delta^J | \lambda \in R \} ; \\
 W_{q^-} &= \{ \varphi^J \circ \pi_{J,q}^I | \varphi^J \in R^J \} \\
 &= \{ \varphi^J \otimes \{ \delta^J | q' \in Q - \{q\} \} | \varphi^J \in R^J \} \subset R^I ; \\
 W_q &= \{ \lambda \delta^I | \lambda \in R \} \oplus W_{q^-} ;
 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

où R^J (resp. W_{q^-}) désigne l'ensemble des fonctions de moyenne nulle de R^J (resp. W_q), i.e. des fonctions de R^J (resp. W_q) orthogonales à la fonction constante δ^J (resp. δ^I).

3. Propriétés extrémales des facteurs issus du sous tableau k_{JJ} .

3.1. Énoncé :

A) Les facteurs issus du sous tableau k_{JJ} , rendent extrémales (minimisent) la quantité suivante :

$$R = (1/C_K C_{K'}) \sum \{ \| \varphi^J \circ \pi_{J,q}^I - \varphi^{J'} \circ \pi_{J',q'}^I \|^2 | q \in K, q' \in K' \} \tag{13}$$

sous l'une des quatre conditions suivantes :

$$1) \quad (1/2 C_K) \sum \{ \| \varphi^J \|^2_{P_{J,q}} | q \in K \} + (1/2 C_{K'}) \sum \{ \| \varphi^{J'} \|^2_{P_{J',q'}} | q' \in K' \} = 1 \tag{14}$$

$$2) \quad (1/C_K) \sum \{ \| \varphi^J \|^2_{P_{J,q}} | q \in K \} = (1/C_{K'}) \sum \{ \| \varphi^{J'} \|^2_{P_{J',q'}} | q' \in K' \} = 1 \tag{15}$$

$$3) \quad (1/C_K) \sum \{ \| \varphi^J \|^2_{P_{J,q}} | q \in K \} = 1 \tag{16}$$

$$4) \quad (1/C_{K'}) \sum \{ \| \varphi^{J'} \|^2_{P_{J',q'}} | q' \in K' \} = 1 \tag{17}$$

Soit $(\varphi^J = \{ \varphi^J | q \in K \}, \varphi^{J'} = \{ \varphi^{J'} | q' \in K' \})$ le couple de fonctions assurant le minimum de R.

Alors sous les conditions (14) ou (15), $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ constitue un couple de facteurs de variance 1 de k_{JJ} . Sous la condition (16) (resp. (17)) φ^J (resp. $\varphi^{J'}$) est de variance 1, tandis que $\varphi^{J'}$ (resp. φ^J) a pour variance la valeur propre à laquelle est relative le facteur.

B) Sous la condition (14) (ou sous la condition (15)), les facteurs issus du sous tableau k_{JJ} , rendent extrémales (maximisent) la quantité suivante :

$$\left. \begin{aligned}
 T &= (1/C_K C_{K'}) \sum \{ \langle \varphi^J \circ \pi_{J,q}^I, \varphi^{J'} \circ \pi_{J',q'}^I \rangle | q \in K, q' \in K' \} \\
 &= \langle \sum \{ \varphi^J \circ \pi_{J,q}^I | q \in K \} / C_K, \sum \{ \varphi^{J'} \circ \pi_{J',q'}^I | q' \in K' \} / C_{K'} \rangle
 \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

Le couple de fonctions $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ assurant le maximum de T étant un couple de facteurs de variance 1 de $k_{JJ'}$.

Remarques :

1) Dans le cas où $K = K' = Q$, $J_q = J'_q$, $\varphi^q = \varphi^{J'_q}$; les conditions (14), (15), (16), (17) sont équivalentes; la quantité T s'écrit alors :

$$T = (1/C_Q^2) \sum \{ \varphi^q \cdot \pi_{J_q}^I | q \in Q \}^2 \quad (19)$$

et l'on retrouve la propriété extrémale donnée dans [Bin. Mult.] § 4 que les facteurs issus du tableau de Burt maximisent T, sous la condition de normalisation :

$$(1/C_Q) \sum \{ \|\varphi^q\|_{P_{J_q}}^2 | q \in Q \} = 1 \quad (20)$$

2) Dans le cas où $C_K = C_Q - 1$, $C_{K'} = 1$, et où $\{K, K'\}$ constitue une partition de Q, le tableau $k_{JJ'}$ peut être considéré comme un tableau de régression, croisant l'ensemble J' des modalités de la variable à expliquer, avec l'ensemble J des modalités des autres variables que l'on peut considérer comme des variables explicatives. Les facteurs $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ minimisent donc :

$$(1/C_K) \sum \{ \|\varphi^{J'} \cdot \pi_{J'}^I - \varphi^J \cdot \pi_{J'}^I\|^2 | q \in K \}$$

sous la condition de normalisation :

$$\|\varphi^{J'}\|_{P_{J'}}^2 = 1$$

3) Sous les conditions (14) ou (15), $R = 2(1 - T)$, et si λ est la valeur propre associée au couple de facteurs $(\varphi^J, \varphi^{J'})$ rendant extremum R ou T, on a $R = 2(1 - \sqrt{\lambda})$ et $T = \sqrt{\lambda}$. Sous les conditions (16) ou (17) l'extremum de R vaut $1 - \lambda$.

4) Il est évident que la fonction constante : $\varphi^J = \delta^J$, $\varphi^{J'} = \delta^{J'}$ est solution des problèmes d'extrema énoncés ci-dessus. En particulier, elle assure le minimum absolu de R qui vaut zéro, et le maximum absolu de T qui vaut 1. Une fois enlevée cette solution triviale, on trouvera les facteurs non triviaux de $k_{JJ'}$.

5) En bref on peut dire que la propriété A) exprime que les fonctions φ^J et $\varphi^{J'}$ (fonctions sur les ensembles de modalités J et J') considérées comme fonctions sur l'ensemble pondéré I des individus sont aussi proches que possible l'une de l'autre (R minimum), tandis que la propriété B) exprime que φ^J et $\varphi^{J'}$ ont sur I corrélation maxima (T maximum).

3.2. Démonstration

3.2.1. Minimum de R et maximum de T, sous les conditions (14) et (15).

La condition (15) impliquant (14) il suffit de faire la démonstration dans ce dernier cas; il sera alors évident que la solution vérifie bien également la condition (15). Par ailleurs nous démontrerons en même temps B), puisqu'en fait on va voir que rendre minimum R sous la condition (14) équivaut à maximiser T sous cette même condition. En

effet, développant R, et compte tenu de (14), on a, en omettant les $\pi_{J_q}^I$ pour alléger l'écriture :

$$R = (1/C_K C_{K'}) (C_K \sum_{q \in K} \|\varphi^J_q\|^2 + C_{K'} \sum_{q' \in K'} \|\varphi^{J'}_{q'}\|^2 - 2 \sum \langle \varphi^J_q, \varphi^{J'}_{q'} \rangle \dots \dots | q \in K, q' \in K')$$

soit :

$$R = 2 (1 - T) \tag{21}$$

Minimiser R sous la condition (14) est donc bien équivalent à maximiser T sous cette même condition.

Notons : $\varphi^M = (\varphi^J, \varphi^{J'})$: la quantité à maximiser peut s'écrire :

$$T = (1/C_K C_{K'}) \sum \langle \varphi^J_q, \varphi^{J'}_{q'} \rangle | q \in K, q' \in K' = \sigma(\varphi^M, \varphi^M); \tag{22}$$

avec pour la condition de normalisation :

$$(1/2C_K) \sum \{\|\varphi^J_q\|^2 | q \in K\} + (1/2C_{K'}) \sum \{\|\varphi^{J'}_{q'}\|^2 | q' \in K'\} = n(\varphi^M, \varphi^M) = 1; \tag{23}$$

$$\varphi^M \text{ est donc vecteur propre de la transition } \omega^M_M = (n^{-1} \circ \sigma)^M_M. \tag{24}$$

Or l'on a :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{JJ} &= 0; \quad \sigma_{J'J'} = 0 \\ \forall q \in K, q' \in K' : \sigma_{J_q J'_{q'}} &= (1/2 C_K C_{K'}) p_{J_q J'_{q'}} \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

soit :

$$\sigma_{J_q J'_{q'}} = p'_{J_q J'_{q'}} / 2$$

où $p'_{J_q J'_{q'}}$ est le tableau de correspondance associée à $k_{J_q J'_{q'}}$, et dont la somme des éléments vaut 1.

On a de même, si $q(j)$ désigne la question dont j est une modalité :

$$\left. \begin{aligned} \forall j, j' \in J : n_{jj'} &= p_{J_{q(j)}}(j) \delta_j^{j'} / 2C_K, \\ \forall j, j' \in J' : n_{jj'} &= p_{J'_{q(j)}}(j) \delta_j^{j'} / 2C_{K'}, \\ \forall j \in J, \forall j' \in J' : n_{jj'} &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

On en déduit que :

$$\left. \begin{aligned} \omega_J^J &= 0; \quad \omega_{J'}^{J'} = 0; \\ \forall q \in K, \forall q' \in K' : \omega_{J'_q}^J &= (1/C_K) p_{J'_q}^J; \quad \omega_{J_q}^{J'} = (1/C_{K'}) p_{J_q}^{J'} \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

L'équation :

$$\varphi^M \circ \omega^M_M = \mu \varphi^M \tag{28}$$

se décompose alors en :

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{J'} \circ \omega_{J'}^J &= \mu \varphi^J \\ \varphi^J \circ \omega_J^{J'} &= \mu \varphi^{J'} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

soit, $\psi, q \in K, q' \in K'$:

$$\left. \begin{aligned} (1/C_{K'}) \sum \{ \varphi^{J'} \circ p_{J'}^J \mid q' \in K' \} &= \mu \varphi^{J'} \\ (1/C_K) \sum \{ \varphi^J \circ p_J^{J'} \mid q \in K \} &= \mu \varphi^J \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

On retrouve ainsi les équations de transition (4) associées au tableau $k_{JJ'}$, la valeur propre λ étant égale à μ^2 .

Des relations (4) vérifiées par φ^J et $\varphi^{J'}$ l'on déduit que ces facteurs ont même variance, or ces variances s'écrivent respectivement :

$$\left. \begin{aligned} \|\varphi^J\|^2 &= (1/C_K) \sum \{ \|\varphi^J\|^2 \mid q \in K \} \\ \|\varphi^{J'}\|^2 &= (1/C_{K'}) \sum \{ \|\varphi^{J'}\|^2 \mid q' \in K' \} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

et comme d'après la condition (14) :

$$(\|\varphi^J\|^2 + \|\varphi^{J'}\|^2) / 2 = 1 \quad (32)$$

on en déduit :

$$\|\varphi^J\|^2 = \|\varphi^{J'}\|^2 = 1 \quad (33)$$

les conditions (15) sont donc bien réalisées.

Notons que la valeur extrémale de T étant μ , i.e. $\sqrt{\lambda}$, la valeur extrémale de R est $2(1 - \sqrt{\lambda})$.

3.2.2. Minimum de R sous la condition (16)

Supposons que l'on veuille minimiser R sous la condition de normalisation (16).

$$(1/C_K) \sum \{ \|\varphi^J\|^2 \mid q \in K \} = 1 \quad (16)$$

qui signifie simplement que φ^J est de variance 1.

Remarquons que R peut s'écrire sous la forme :

$$R = (1/C_K C_{K'}) \sum \{ a_{q'} \mid q' \in K' \} ; \quad (34)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} a_{q'} &= \sum \{ \|\varphi^J - \varphi^{J'}\|^2 \mid q \in K \} \\ &= \sum \{ \|\varphi^J - (1/C_K) \sum \{ \varphi^{J''} \mid q'' \in K \} \|^2 \mid q \in K \} + \\ &\quad C_K \{ (1/C_K) \sum \{ \varphi^{J''} \mid q'' \in K \} - \varphi^{J'} \|^2 \} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

En bref, d'après le théorème de Huyghens, l'inertie du nuage de points $\{ \varphi^J \circ \pi_J^I \mid q \in K \}$ ($\varphi^J \circ \pi_J^I$ étant affecté de la masse unité) par rapport au point $\varphi^{J'} \circ \pi_{J'}^I$ est égale à l'inertie de ce nuage par rapport à son cen-

tre de gravité, augmenté du carré (pondéré par la masse totale C_K de ce nuage) de la distance de :

$$\varphi^{J'} q' \cdot \pi_{J'}^I \text{ à ce centre de gravité.}$$

De (35) l'on déduit que $a_{q'}$, et donc R sera minimum si $\varphi^{J'} q'$ est la projection de $(1/C_K) \Sigma \{\varphi^{Jq} | q \in K\}$ sur l'espace des fonctions ne dépendans que de $J' q'$, i.e. :

$$\varphi^{J'} q' = (1/C_K) \Sigma \{\varphi^{Jq} \cdot p_{Jq}^{J'q'} | q \in K\} \tag{36}$$

Dans ces conditions, on est ramené à minimiser :

$$R = (C_K C_{K'})^{-1} \Sigma \{ \|\varphi^{Jq} - C_K^{-1} \Sigma \{\varphi^{Jq''} \cdot p_{Jq''}^{J'q'} | q'' \in K\}\|^2 | q \in K, q' \in K' \} \tag{37}$$

Développant R, l'on obtient :

$$C_K C_{K'} R = \Sigma \{ (\|\varphi^{Jq}\|^2 + (1/C_K)^2 \|\Sigma \{\varphi^{Jq''} \cdot p_{Jq''}^{J'q'} | q'' \in K\}\|^2 - (2/C_K) \langle \varphi^{Jq}, \Sigma \{\varphi^{Jq''} \cdot p_{Jq''}^{J'q'} | q'' \in K \rangle \rangle | q \in K, q' \in K' \} \} \tag{38}$$

En tenant compte du fait que :

$$\langle \varphi^{Jq}, \varphi^{Jq''} \cdot p_{Jq''}^{J'q'} \rangle = \langle \varphi^{Jq} \cdot p_{Jq}^{J'q'}, \varphi^{Jq''} \cdot p_{Jq''}^{J'q'} \rangle \tag{39}$$

puisque $\varphi^{Jq} - \varphi^{Jq} \cdot p_{Jq}^{J'q'}$ est orthogonal à l'espace des fonctions ne dépendant que de $J' q'$, donc à $\varphi^{Jq''} \cdot p_{Jq''}^{J'q'}$, il vient d'après (16) :

$$R = 1 - (1/C_K^2 C_{K'}) \Sigma \{ \|\Sigma \{\varphi^{Jq} \cdot p_{Jq}^{J'q'} | q \in K\}\|^2 | q' \in K' \} \tag{40}$$

Minimiser R sous la condition (16) est donc équivalent à maximiser la quantité :

$$R_1 = (1/C_K^2 C_{K'}) \Sigma \{ \|\Sigma \{\varphi^{Jq} \cdot p_{Jq}^{J'q'} | q \in K\}\|^2 | q' \in K' \} = \sigma(\varphi^J, \varphi^J) \tag{41}$$

sous la condition :

$$(1/C_K) \Sigma \{ \|\varphi^{Jq}\|^2 | q \in K \} = n(\varphi^J, \varphi^J) = 1 \tag{42}$$

φ^J est donc vecteur propre de la transition :

$$\omega_J^J = (n^{-1} \cdot \sigma)_J^J$$

Or l'on a, $\forall q, q' \in K$:

$$\sigma_{Jq}^{Jq'} = \Sigma \{ p_{Jq}^{J'q''} \times p_{Jq''}^{J'q'} \cdot p_{Jq'}^{J'q''} | q'' \in K' \} / C_K^2 C_{K'} \tag{43}$$

$$n_{jj'} = (1/C_K) p_{Jq}^{Jq'}(j) \delta_j^{j'} \tag{44}$$

d'où l'on déduit :

$$\omega_{Jq}^{Jq'} = \Sigma \{ p_{Jq}^{J'q''} \cdot p_{Jq''}^{J'q'} | q'' \in K' \} / C_K C_{K'} \tag{45}$$

d'où l'on déduit :

$$(1/C_K C_{K'}) \Sigma \{ \varphi^J \circ p_{J_q}^{J'q''} \circ p_{J_q'}^{J'q''} \mid q \in K, q'' \in K' \} = \mu \varphi^J \quad (46)$$

On retrouve bien la première équation (6) avec $\mu = \lambda$, ce qui prouve que φ^J est bien facteur de $k_{JJ'}$, ce facteur étant de variance 1 d'après (16). La comparaison de (36) qui fournit $\varphi^{J'}$ et de (4) montre bien que $\varphi^{J'}$ est le facteur de variance la valeur propre, associé à φ^J .

n.b. Si φ^J est associé à la valeur propre λ , R_1 vaut λ , et donc la quantité R minimisée vaut $1 - \lambda$.

4. Propriétés extrémales du tableau de Burt.

Nous avons déjà vu que les facteurs $\varphi^Q = \{ \varphi^q \mid q \in Q \}$ du tableau de Burt rendent extrémales, sous la condition de normalisation (20), la quantité T définie par (19), et la quantité R qui s'écrit dans ce cas particulier.

$$R = (1/C_Q^2) \Sigma \{ \| \varphi^q \circ \pi_{J_q}^I - \varphi^{q'} \circ \pi_{J_{q'}}^I \|^2 \mid q, q' \in Q \} \quad (47)$$

Nous inspirant d'une idée de Carroll, reprise par Saporta (*), nous allons donner une autre caractérisation des facteurs.

Nous allons chercher les fonctions φ^I , $\{ \varphi^q \mid q \in Q \}$ telles que soit minimale la quantité :

$$U = \Sigma \{ a_q \| \varphi^I - \varphi^q \circ \pi_{J_q}^I \|^2 \mid q \in Q \} \quad (48)$$

(où les a_q sont des coefficients de pondération positifs connus), sous la condition de normalisation :

$$\| \varphi^I \|^2 = 1 \quad (49)$$

$\varphi^q \circ \pi_{J_q}^I$ doit donc être la projection de φ^I sur l'espace W_q des fonctions ne dépendant que de J_q :

$$\varphi^q \circ \pi_{J_q}^I = \varphi^I \circ (A_q)_I^I \quad (50)$$

$(A_q)_I^I$ désignant l'opérateur de projection sur W_q . (48) s'écrit compte tenu du théorème de Pythagore et de (49) :

$$\left. \begin{aligned} U &= \Sigma \{ a_q \mid q \in Q \} - \Sigma \{ a_q \| \varphi^I \circ (A_q)_I^I \|^2 \mid q \in Q \} \\ &= \Sigma \{ a_q \mid q \in Q \} - \Sigma \{ a_q \langle \varphi^I, \varphi^I \circ (A_q)_I^I \rangle \mid q \in Q \} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Minimiser (51) sous la condition (49) est donc équivalent à maximiser :

$$V = \Sigma \{ a_q \langle \varphi^I, \varphi^I \circ (A_q)_I^I \rangle \mid q \in Q \}$$

(*) Saporta se place dans un espace à $\Sigma \{ \text{card } J_q \mid q \in Q \}$ dimensions, alors que nous nous plaçons dans un espace à $\pi \{ \text{card } J_q \mid q \in Q \}$ dimensions.

avec $\|\varphi^I\|^2 = 1$ (52)

d'où l'on déduit immédiatement que φ^I est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de $\Sigma \{a_q (A_q)^I | q \in Q\}$:

$$\Sigma \{a_q \varphi^I \circ (A_q)^I | q \in Q\} = \mu \varphi^I$$
 (53)

soit d'après (50) :

$$\Sigma \{a_q \varphi^J \circ \pi_{J,q}^I | q \in Q\} = \mu \varphi^I$$
 (54)

d'où l'on déduit en projetant la relation (54) sur W_q , et compte tenu de (50) :

$$\Sigma \{a_{q'} \varphi^{J,q'} \circ P_{J,q'}^J | q' \in Q\} = \mu \varphi^{J,q}$$
 (55)

L'on retrouve si les a_q sont égaux et de somme 1, ($a_q = 1/C_Q$) l'équation (7) des facteurs du tableau de Burt k_{LL} avec $\mu = \sqrt{\lambda}$.

5. Etude du cas où il y a indépendance dans chacun des deux groupes K et K' .

Dans ce cas, on a :

$$\forall q, q' \in K : P_{J,q}^{J,q'} = P_{J,q} \otimes P_{J,q'} ;$$
 (56)

Les espaces $\{W_q | q \in K\}$ se coupent orthogonalement suivant la droite des constantes, ce qui revient à dire que les sous-espaces W_{q-} orthogonaux à la droite des constantes sont orthogonaux entre eux.

$$\left. \begin{aligned} W^- &= \bigoplus \{W_{q-} | q \in K\} \\ W &= W^- \oplus \{\lambda \delta^I | \lambda \in R\} \end{aligned} \right\}$$
 (57)

W est l'espace engendré par les $\{W_q | q \in K\}$.

Posons également :

$$\varphi^I = \Sigma \{\varphi^{J,q} \circ \pi_{J,q}^I | q \in K\}$$
 (58)

où $\varphi^J = \{\varphi^{J,q} | q \in K\}$ est une fonction sur J .

Si on se limite aux fonctions de moyenne nulle φ^I est un élément de W^- dont la composante sur W_{q-} est $\varphi^{J,q} \circ \pi_{J,q}^I$.

On a de même :

$$\forall (q, q') \in K' : P_{J,q}^{J,q'} = P_{J,q} \otimes P_{J,q'}$$
 (59)

Les espaces $\{W'_q | q \in K'\}$, (W'_q étant l'espace des fonctions sur I ne dépendant que de J'_q), se coupent orthogonalement suivant la droite des constantes.

On posera de même :

$$\left. \begin{aligned} W^- &= \bigoplus \{W'_{q^-} | q \in K'\} \\ W' &= W^- \oplus \{\lambda \delta^I | \lambda \in R\} \\ \varphi'^I &= \Sigma \{\varphi'^{J'}_{q^-} \circ \pi^I_{J'} | q \in K'\} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

où $\varphi'^{J'} = \{\varphi'^{J'}_{q^-} | q \in K'\}$ est une fonction sur J' . Se limitant aux fonctions de moyenne nulle, φ'^I est un élément de W^- dont la composante sur W'_{q^-} est $\varphi'^{J'}_{q^-} \circ \pi^I_{J'}$.

Si ces fonctions $\varphi'^{J'}$ et φ'^I sont des facteurs non triviaux (i.e. des facteurs non constants de moyenne nulle) du sous tableau $k_{JJ'}$, ils vérifient les équations (4), et l'on a, en posant :

$$\left. \begin{aligned} A^I_I &= \Sigma \{(A_q)^I_I | q \in K\} \\ A'^I_I &= \Sigma \{(A_q)^I_I | q \in K'\} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$\left. \begin{aligned} (1/C_K) \varphi'^I \circ A^I_I &= \sqrt{\lambda} \varphi^I \\ (1/C_K) \varphi^I \circ A'^I_I &= \sqrt{\lambda} \varphi'^I \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Se limitant aux fonctions de moyenne nulle, A^I_I (resp. A'^I_I) est d'après (57) (resp. (60)) l'opérateur de projection sur W^- (resp. W'^-) (*).

L'on déduit alors de (62) que l'analyse de correspondance du tableau $k_{JJ'}$ est équivalente à l'étude de la figure formée par les deux sous espaces W^- et W'^- (ou W^- et W').

De (62) l'on déduit que :

$$\left. \begin{aligned} \varphi^I \circ A'^I_I \circ A^I_I &= \lambda C_K C_{K'} \varphi^I \\ \varphi'^I \circ A^I_I \circ A'^I_I &= \lambda C_K C_{K'} \varphi'^I \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

On a donc :

$$\lambda \leq 1/C_K C_{K'} \quad (**) \quad (64)$$

puisque $\lambda C_K C_{K'}$ n'est autre que le carré du cosinus entre φ^I et φ'^I .

(*) L'opérateur de projection sur W s'écrit :

$\Sigma \{(A_q)^I_I | q \in K\} - (C_K - 1) \delta^I \otimes p_I$
sa restriction aux fonctions de moyenne nulle étant :

$A^I_I = \Sigma \{(A_q)^I_I | q \in K\}$; On a, bien sûr, une propriété analogue pour l'opérateur de projection sur W' .

(**) Cette inégalité peut s'établir directement sans passer par l'étude de W et W' , par des considérations de norme.

5.1. Lien avec l'analyse du tableau de Burt total k_{LL}

On suppose ici que (K, K') est une partition de Q et donc (J, J') une partition de L .

L'on sait que l'étude de la position de deux sous espaces vectoriels peut se ramener à la diagonalisation de la somme des deux projecteurs sur les sous espaces considérés. Cela revient en fait à remplacer deux directions canoniques associées par leurs bissectrices intérieure et extérieure.

On a en effet d'après (62), en remarquant que si φ^J et $\varphi^{J'}$ sont des facteurs de variance 1, les fonctions φ^I et φ'^I respectivement définies par (58) et (60) sont de variance C_K et $C_{K'}$:

$$\left(\frac{\varphi^I}{\sqrt{C_K}} + \frac{\varepsilon \varphi'^I}{\sqrt{C_{K'}}} \right) \circ (A_I^I + A'^I_I) = \left(\frac{\varphi^I}{\sqrt{C_K}} + \frac{\varepsilon \varphi'^I}{\sqrt{C_{K'}}} \right) (1 + \varepsilon \sqrt{\lambda C_K C_{K'}})$$

où ε peut prendre les valeurs 1 ou - 1.

On est donc ramené en se limitant aux fonctions de moyenne nulle à diagonaliser :

$$A_I^I + A'^I_I = \Sigma \{ (A_q^I)_I^I | q \in K \cup K' \} = \Sigma \{ (A_q^I)_I^I | q \in Q \};$$

Or c'est justement ce que l'on faisait dans l'analyse du tableau de Burt total k_{LL} (cf. § 4).

Donc, si les questions dans chaque groupe sont indépendantes, l'analyse des correspondances du tableau $k_{JJ'}$ est équivalente à l'analyse du tableau de Burt total $k_{J \cup J'}$, $J \cup J' = K_{LL}$.

n.b. Si (K, K') ne constitue pas une partition de Q , et si M désigne l'union disjointe de J et J' , l'analyse des correspondances de $k_{JJ'}$ est équivalente à l'analyse des correspondances du tableau de Burt k_{MM} . Notons que l'on aurait pu obtenir directement ce résultat, sans passer par l'analyse canonique de W et W' , à partir des formules (4), (7) (cette dernière étant écrite pour le tableau k_{MM}), (56) et (59), et compte tenu du fait que les facteurs non triviaux sont de moyenne nulle sur chaque ensemble J_q ou J'_q .

5.2. Etude d'un cas particulier (categorical conjoint Measurement)

On suppose que $C_{K'} = 1$, et que l'on a un modèle d'analyse de variance à C_K facteurs, additif et sans interaction, où tout C_K uple de modalités $(j_1, j_2, \dots, j_q, \dots, j_{C_K})$ ($j_q \in J_q$) est obtenu une fois et une seule. A chacun de ces C_K uples est associé le résultat d'une variable qualitative dont les modalités constituent l'ensemble J' , et l'on désire expliquer cette variable à partir des C_K facteurs précédents.

Pour expliquer cette variable, J. D. CARROLL propose de faire l'étude simultanée de la position des deux sous espaces W^- et W'^- .

Chaque C_K uple étant obtenu une fois et une seule, on est dans le cas où :

$$\forall q, q' \in K, q \neq q' : P_{J_q J_{q'}} = P_{J_q} \otimes P_{J_{q'}}$$

puisque si C_q désigne le cardinal de J_q , on a :

$$p_{J_q}(j) = 1/C_q \quad \text{si } j \in J_q$$

$$p_{J_q J_{q'}}(j, j') = 1/C_q C_{q'} \quad \text{si } j \in J_q, j' \in J_{q'}, (q \neq q')$$

L'analyse canonique précédente est donc équivalente (puisque $C_K = 1$) à l'analyse des correspondances du tableau k_{JJ} , ou du tableau de Burt k_{LL} .

Ayant $C_K = 1$, les valeurs propres non triviales de l'analyse factorielle des correspondances sont donc inférieures ou égales à $1/C_K$, les valeurs propres obtenues lors de l'étude simultanée de W^- et W'^- étant C_K fois les valeurs propres obtenues par l'analyse factorielle des correspondances.

6. Etude dans R^S espace des sujets (*)

Dans l'espace des sujets ayant répondu au questionnaire, nous désignerons par x_j^S la fonction indicatrice de la modalité j de $q(j)$:

$\forall s \in S : x_j^S = 1$ si le sujet s a répondu j à la question $q(j)$,
sinon $x_j^S = 0$.

On a alors :

$$\forall q \in Q : \sum \{x_j^S | j \in J_q\} = \delta^S$$

où δ^S est la fonction constante et égale à 1.

Nous désignerons par W_q l'espace engendré par les $\{x_j^S | j \in J_q\}$.

Nous supposerons S muni de la mesure uniforme p_S :

$$\forall s \in S : p_S = 1/\text{Card } S$$

R^S est alors muni de la norme p_S :

$$\|\varphi^S\|_{p_S}^2 = \sum \{p_S(\varphi^S)^2 | s \in S\} = (1/\text{Card } S) \sum \{(\varphi^S)^2 | s \in S\}$$

Les espaces W_q se coupant suivant la droite des constantes, nous désignerons par W_{q-} le sous espace des fonctions de W_q de moyenne nulle.

Une fonction $\varphi^{J_q} = \{\varphi^j | j \in J_q\}$ peut alors être considérée comme un élément de W_q . Il suffit de poser :

$$\varphi_q^S = \sum \{\varphi^j x_j^S | j \in J_q\} = \varphi^{J_q} \cdot x_{J_q}^S$$

On a alors :

$$\langle \varphi_q^S, \varphi_{q'}^S \rangle_{p_S} = \sum \{\varphi^j \varphi^{j'} \langle x_j^S, x_{j'}^S \rangle_{p_S} | j \in J_q, j' \in J_{q'}\}$$

or :

$$\langle x_j^S, x_{j'}^S \rangle_{p_S} = \sum \{x_j^S x_{j'}^S | s \in S\} / \text{Card } S = p_{J_q J_{q'}}(j, j'), \text{ si } j \in J_q, j' \in J_{q'}.$$

(*) Nous désignerons par S l'ensemble des sujets ayant répondu au questionnaire.

On en déduit que :

$$\langle \varphi_q^S, \varphi_{q'}^S \rangle_{P_S} = \langle \varphi_{J_q}^{J_q} \circ \pi_{J_q}^{J_q J_{q'}}, \varphi_{J_{q'}}^{J_{q'}} \circ \pi_{J_{q'}}^{J_{q'} J_{q'}} \rangle_{P_{J_q J_{q'}}}$$

où si $q = q'$, $P_{J_q J_q}$ n'est autre que la mesure p_{J_q} portée sur la diagonale de $J_q \times J_q$.

D'après (10) et (11), on obtient comme produit scalaire $\langle \varphi_q^S, \varphi_{q'}^S \rangle_{P_S}$ la même quantité que lorsqu'on se plaçait dans R^I , et que $\varphi_{J_q}^{J_q}$ était considéré comme une fonction $\varphi_{J_q}^{J_q} \circ \pi_{J_q}^I$ sur I .

Il en résulte que toutes les propriétés extrémales trouvées dans R^I , se transposent immédiatement dans R^S .

Bibliographie.

- J.P. Benzécri : Sur l'analyse des tableaux binaires associés à une correspondance multiple ([Bin. Mult.]). *Cahiers de l'analyse des données*, Vol. II, n° 1, 1977.
- Carroll, J.D. : Generalisation of canonical correlation analysis to three or more sets of variables. *Proceedings*, 76 th Annual Convention Amer, Psych. Assoc. 1968.
- Carroll, J.D. : "Categorical conjoint Measurement" *Ann Arbor, Michigan; Meeting of Mathematical Psychology*, Août 1969.
- G. Saporta : Liaison entre plusieurs ensembles de variables et codage de données qualitatives. Thèse 3° cycle, Paris 1975.