CAHIERS DU BURO

DANIELLE FLORENS-ZMIROU

Jeux de la secrétaire

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 32 (1979), p. 35-68

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1979__32__35_0>

JEUX DE LA SECRÉTAIRE

Danielle FLORENS-ZMIROU [1]

Sommaire. – Dans cet article, on généralise le problème classique *de la secrétaire* en montrant ses liens avec la statistique inférentielle. Ceci permet de construire différents jeux *de la secrétaire*, que l'on étudie.

Première partie : Préliminaires mathématiques

Deuxième partie : Problèmes de la secrétaire

---

(1) Université des sciences et techniques du Languedoc (Montpellier II). UER de mathématiques.

INTRODUCTION

Le problème classique de la secrétaire peut se formuler comme suit :

Un employeur cherche à engager une secrétaire. Il dispose d'un certain nombre de réponses à son offre d'emploi. Il suppose aussi que les candidates peuvent être rangées dans un ordre total de préférence, mais il ignore cet ordre. Par convention, la candidate qui a le rang 1 sera appelée *la meilleure.* Pour choisir la meilleure secrétaire, il procède de la façon suivante : il interroge les candidates une à une dans un ordre aléatoire. A la $n^{\text{ième}}$ interrogation, il connaît l'ordre relatif des n premières candidates interrogées. Il peut alors décider :

– soit de s'arrêter à l'étape n et il est alors obligé de choisir la $n^{\text{ième}}$ candidate ;

– soit de ne pas choisir cette $n^{\text{ième}}$ candidate et d'interroger la suivante.

Le problème posé est alors le suivant : à quel moment l'employeur doit-il s'arrêter pour maximiser la probabilité de trouver la meilleure secrétaire ? Nous allons étudier différentes généralisations de ce problème. (Pour une revue détaillée sur ce problème, cf. [4] ou [10]).

Dans une première partie, nous allons présenter un certain nombre de résultats que nous utiliserons dans la deuxième partie. Nous allons définir d'abord des processus sur le groupe des permutations, en précisant la notion de rang relatif. Ceci nous conduira à énoncer quelques résultats combinatoires. Nous rappellerons ensuite la notion essentielle d'expérience statistique bayesienne. Reprenant la théorie des temps d'arrêt nous montrerons un théorème d'exhaustivité dans cette théorie. Cette première partie se terminera par des résultats bien connus de la théorie des jeux à deux joueurs de somme nulle, les duels.

Dans la deuxième partie, nous allons construire différentes expériences statistiques bayesiennes qui nous conduiront à des généralisations du problème de la secrétaire. Nous étudierons les temps d'arrêt optimaux pour ces problèmes. Nous nous placerons ensuite dans le cas d'une nature "hostile" à l'employeur, ce qui nous conduira à deux notions de jeux, obtenues en définissant certaines stratégies pour la nature. Nous calculerons la solution de ces jeux (valeur, stratégies minimax et stratégies maximin).

Dans ce papier, nous n'utiliserons pratiquement que des ensembles finis.

PREMIERE PARTIE : PRELIMINAIRES MATHEMATIQUES

I – PROCESSUS SUR LE GROUPE DES PERMUTATIONS

Notations :

. $[N]$ désignera l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ où $N \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

. $G[N]$ désignera le groupe des permutations de N objets.

. $\omega \in G[N]$; $\omega = (\omega(1), \ldots, \omega(N))$.

Nous allons définir sur $G[N]$ un certain nombre de processus.

Dans la deuxième partie, nous étudierons la loi de ces processus pour certaines probabilités sur $G[N]$.

I.1 Processus des rangs absolus

Définissons le *processus des rangs absolus* $W = (W_n)_{n \in [N]}$ par :

$$\begin{cases} W_n : G[N] \longrightarrow [N] \\ \qquad \omega \longmapsto W_n(\omega) = \omega(n). \end{cases}$$

Remarque :

Dans tous les problèmes de la secrétaire, le problème provient du fait que le processus W n'est pas observable.

A ce processus W, nous allons associer une partition de $G[N]$ qui nous sera très utile dans la suite de ce travail :

$$G[N] = \sum_{n=1}^{N} A_n$$

où
$$A_n = W_n^{-1}(1).$$

I.2 Processus des rangs relatifs

Définissons le *processus des rangs relatifs* $X = (X_n)_{n \in [N]}$ par :

$$\begin{cases} X_n : G[N] \longrightarrow [n] \\ \qquad \omega \longmapsto X_n(\omega) = \text{“\textit{rang relatif de n par rapport à} } (1, \ldots, n-1) \text{ \textit{vis-à-vis de} } \omega\text{”} . \end{cases}$$

Donnons une définition précise du processus X.

Théorème 1

Pour toute permutation $\omega \in G[N]$, pour tout entier $n \in [N]$, il existe une permutation unique $\omega^{(n)} \in G[n]$ *et une application unique $\varphi_n^N : [n] \to [N]$ strictement croissante telles que l'on ait :*

$$\omega \circ I_n^N = \varphi_n^N \circ \omega^{(n)}$$

où I_n^N est l'injection de $[n]$ dans $[N]$. ∎

Ainsi, une permutation $\omega \in G[N]$ apparaît comme une limite projective correspondant au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} {[N]} \arrow[r, mapsto, "\omega"] & {[N]} \\ {[N-1]} \arrow[u, "I_{N-1}^N"] \arrow[r, mapsto, "\omega^{(N-1)}"] & {[N-1]} \arrow[u, "\varphi_{N-1}^N"'] \\ {[n+1]} \arrow[u, dotted] \arrow[r, mapsto, "\omega^{(n+1)}"] & {[n+1]} \arrow[u, dotted] \\ {[n]} \arrow[u, "I_n^{n+1}"] \arrow[r, mapsto, "\omega^{(n)}"] & {[n]} \arrow[u, "\varphi_n^{n+1}"'] \end{tikzcd}$$

Ce théorème nous permet de construire un isomorphisme, que nous noterons π, entre l'espace $G[N]$ et l'espace $\widehat{G}[N]$ défini par :

$$\widehat{G}[N] = \{x = (x_1, \ldots, x_N) / x_n \in [n] \,; n \in [N]\} .$$

En effet, appelons π_n^N l'application de $G[N]$ dans $G[n]$ qui à $\omega \in G[N]$ fait correspondre le $\omega^{(n)} \in G[n]$ du théorème :

$$\begin{aligned} \pi^N : G[N] &\longrightarrow G[n] \\ \omega &\longmapsto \omega^{(n)} = \pi_n^N(\omega) . \end{aligned}$$

Nous appelerons ω *ordre absolu* et $\omega^{(n)}$ *ordre relatif.*

Nous pouvons alors définir π par :

$$\begin{aligned} \pi : G[N] &\longmapsto \hat{G}[N] \\ \omega &\longmapsto x = \pi(\omega) \end{aligned}$$

où :

$$x_n = [\pi^N(\omega)](n) = \omega^{(n)}(n) = \text{“}\textit{rang relatif de n par rapport à } (1,\ldots,n-1) \textit{ vis-à-vis de } \omega\text{”}.$$

Remarques :

1. Dans les notations, nous respecterons toujours le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} G[N] \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & \hat{G}[N] \arrow[dl, "\hat{f}"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Ainsi, au processus $\hat{X} = (\hat{X}_n)_{n\in[N]}$ défini sur $\hat{G}[N]$ par :

$$\begin{aligned} \hat{X}_n : \hat{G}[N] &\longmapsto [n] \\ x &\longmapsto x_n \end{aligned}$$

nous associons le processus $X = (X_n)_{n\in[N]}$ défini sur $G[N]$ par :

$$X_n(\omega) = \hat{X}_n(\pi(\omega)) = x_n = [\pi_n^N(\omega)](n).$$

$((\hat{G}[N], (\hat{X}_n)_{n\in[N]})$ est la *représentation canonique* de $G[N]$, $(G[N], (X_n)_{n\in[N]}))$.

2. Se donner l'ordre relatif $\omega^{(n)}$ est équivalent à se donner la suite des rangs relatifs $(x_1, \ldots, x_n)$ grâce à l'isomorphisme précédent considéré entre $G[n]$ et $\hat{G}[n]$.

Donnons maintenant un certain nombre de résultats combinatoires. (Nous ne donnons pas les démonstrations de ces résultats qui se déduisent, sans trop de difficultés, du diagramme projectif introduit précédemment).

Lemme 1

Pour tout entier $n \in [N]$, pour tout $\omega^{(n)} \in G[n]$, nous avons :

$$|\{\omega/\pi_n^N(\omega) = \omega^{(n)}\}| = \frac{N!}{n!}.$$

Lemme 2

Pour tout entier $n \in [N]$, pour tout $x_n \in [n]$, nous avons :

$$|\{\omega/[\pi_n^N(\omega)](n) = x_n\}| = \frac{N!}{n!}.$$

Lemme 3

Pour tout entier $n \in [N]$, pour tout $x_n \in [n]$, pour tout $\omega_0(n)$ compris entre x_n et $N - n + x_n$, nous avons :

$$|\{\omega/\omega(n) = \omega_0(n) \text{ et } [\pi_n^N(\omega)](n) = x_n\}|$$

$$= \binom{\omega_0(n) - 1}{x_n - 1} \binom{N - \omega_0(n)}{n - x_n} (n-1)!(N-n)!.$$

Lemme 4

Pour tout entier $n \in [N]$, pour tout $\omega^{(n)} \in G[n]$ vérifiant $\omega^{(n)}(i) = 1$ où i est un indice fixe entre 1 et n, nous avons :

$$|\{\omega/\pi_n^N(\omega) = \omega^{(n)} \text{ et } \omega(i) = 1\}| = \frac{(N-1)!}{(n-1)!}.$$

Lemme 5

Pour tout entier $n \in [N-1]$, pour tout $\omega^{(n)} \in G[n]$, pour tout $i \in \{n+1, \dots, N\}$, nous avons :

$$|\{\omega/\pi_n^N(\omega) = \omega^{(n)} \text{ et } \omega(i) = 1\}| = \frac{(N-1)!}{n!}.$$

I.3 – Processus "temps d'entrée"

Nous aurons besoin d'un autre processus sur l'espace $G[N]$, processus qui se définit à partir du processus X.

Pour cela, rappelons ce qu'on appelle *processus d'entrée* associé à un processus $X = (X_n)_{n \in [N]}$ où :

$$X_n : \Omega \to E.$$

Considérons une partition de E :

$$E = E_0 + E_1 .$$

Définissons la suite $(T_k)_{k\in[N]}$ par :

$$T_k = k^{\text{ième}} \textit{ temps d'entrée du processus } X \textit{ dans } E_1 .$$

T_k est à valeurs dans $[N] \cup \{\Delta_1\}$ (Δ_1 est un *cimetière*. Si le processus ne rentre plus dans E_1 à partir de T_{k-1}, nous posons $T_k = \Delta_1$).

Ceci permet de définir le processus $Y = (Y_k)_{k\in[N]}$ où

$$Y_k = (T_k, X_{T_k}).$$

(Nous posons $X_{T_k} = \Delta_2$ si $T_k = \Delta_1$). Ce processus a comme espace d'états l'espace $F_\Delta = F \cup \{\Delta\}$ où :

$$\begin{cases} \Delta = (\Delta_1, \Delta_2) \\ F = [N] \times E_1 \end{cases}.$$

Dans notre cas, le processus X des rangs relatifs est à valeurs dans :

$$E = [N]$$

et nous prendrons le processus Y des temps d'entrée successifs dans $E_1 = \{1\} \subset E$.

Remarques :

1. Dans la généralisation du problème de la secrétaire où l'on cherche, non la meilleure, mais une des s meilleures, on a besoin du processus Y associé au sous-ensemble $E_1 = \{1, 2, \ldots, s\}$ (cf. [10]). Dans ce travail, nous n'utiliserons pas cette généralisation.

2. Un autre processus peut aussi être introduit (ce processus est très important pour certaines généralisations du problème de la secrétaire mais nous ne l'utiliserons pratiquement pas ici, cf. [10]) :

$$Z = (Z_n)_{n\in[N]},$$

où : $\quad Z_n : G[N] \to [n]$ avec $Z_n(\omega) = [\pi^N(\omega)]^{-1}(1) = (\omega^{(n)})^{-1}(1)$,

c'est-à-dire :

$$Z_n(\omega) = z_n \Leftrightarrow \omega(z_n) < \omega(i) \text{ pour tous les } i \in [n],\ i \neq z_n .$$

Nous avons donc :

$$\begin{cases} Z_1 = X_1 \\ Z_n = n\, I_{[X_n = 1]} + Z_{n-1}\, I_{[X_n \neq 1]} \;;\; n = 2, \ldots, N. \end{cases}$$

II – EXPERIENCE STATISTIQUE SEQUENTIELLE

Nous allons rappeler des notions de base de statistique inférentielle. (Pour plus de détails, le lecteur est renvoyé à [3] ou [8]).

Définition 1

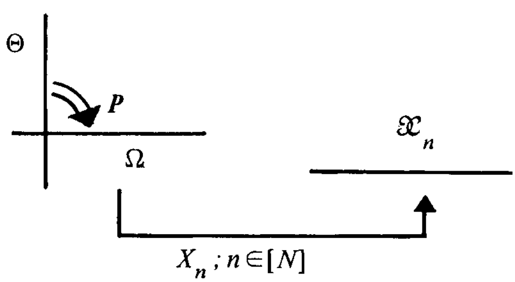
Une expérience statistique séquentielle est la donnée de :

- Θ : un espace de paramètres,
- Ω : un espace d'épreuves,
- P : une transition de probabilité de Θ dans Ω (c'est-à-dire, modulo les problèmes de mesurabilité, une famille de probabilités sur Ω indexées par Θ),
- $X = (X_n)_{n \in [N]}$ un processus observation où :

$$X_n : \Omega \to \mathcal{X}_n \quad ; \; n \in [N].$$

(Nous noterons toujours avec un indice en bas le présent et avec un indice en haut le passé, par exemple $\mathcal{X}^n = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_n$; $\mathcal{X}^n = (X_1, \ldots, X_n)$).

Nous pouvons schématiser cette notion de la manière suivante :



Définition 2

Une expérience statistique séquentielle "avec bruit" est la donnée de :

- Θ : un espace de "bruits",
- Ω' : un espace d'épreuves (non observables),
- P' : une probabilité sur Ω',
- Ω : un espace d'épreuves (observables par l'intermédiaire du processus X),
- F : $\Omega' \times \Theta \mapsto \Omega$,
- $X = (X_n)_{n \in [N]}$ un processus observation où :

$$X_n : \Omega \mapsto \mathfrak{X}_n \ ; n \in [N].$$

Remarques :

1. L'équation $\omega = F(\omega', \theta)$ se lit : "l'observation ω est l'observation théorique ω' perturbée par le bruit θ". Les modèles de ce type se rencontrent en statistique inférentielle dans les modèles linéaires et dans les modèles fiduciaires, c'est-à-dire les modèles où on utilise une probabilité fiduciaire construite à partir d'une fonction pivotale.

2. Les deux définitions sont équivalentes (rappelons que nous sommes dans des espaces finis). En effet :

(2) $\Rightarrow$ (1)

Si nous considérons les sections de F,

$$\begin{aligned} F_\theta : \Omega' &\longmapsto \Omega \ ; \ \theta \in \Theta \\ \omega' &\leadsto F_\theta(\omega') = F(\omega', \theta) \end{aligned}$$

nous pouvons construire les probabilités P_θ par :

$$P_\theta = F_\theta(P') \ ; \ \theta \in \Theta.$$

(1) $\Rightarrow$ (2)

Il suffit de poser :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \Omega' = \Omega^\Theta \\ \bullet\ F : \Omega' \times \Theta \mapsto \Omega \ \text{ où } F(.\,, \theta) = \pi_\theta \text{ projection de } \Omega^\Theta \text{ sur } \Omega \\ \bullet\ P' = \bigotimes_{\theta \in \Theta} P_\theta \end{array} \right.$$

Définition 3

Une expérience statistique séquentielle bayesienne est la donnée supplémentaire d'une probabilité μ sur Θ (la mesure *a priori*). Nous noterons $\mu \times \boldsymbol{P}$ la probabilité correspondante sur $\Theta \times \Omega$ et P_μ la marginale sur Ω.

III – TEMPS D'ARRET OPTIMAUX

Nous allons rappeler les principaux résultats de la théorie des temps d'arrêt optimaux que nous utiliserons (en horizon fini). Pour une démonstration de ces résultats classiques le lecteur est renvoyé à [2] ou [6] ou [9] ou [10].

Enoncé du problème

Soient :

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité,
- $(\mathcal{F}_n)_{n \in [N]}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$. (En général, nous aurons un processus $X = (X_n)_{n \in [N]}$ sur Ω et $\mathcal{F}_n = \mathcal{C}(X_1, \ldots, X_n)$),
- $(G_n)_{n \in [N]}$ une suite de variables aléatoires réelles positives adaptée à la suite $(\mathcal{F}_n)_{n \in [N]}$ (c'est-à-dire : pour tout $n \in [N]$, G_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable),
- $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des temps d'arrêt adaptés à la suite $(\mathcal{F}_j)_{j \in [N]}$ dont les valeurs sont comprises entre n et N. (Nous écrirons $\mathcal{C}$ à la place de $\mathcal{C}_1$).

Le problème des temps d'arrêt optimaux est (en horizon fini) la construction explicite d'un temps d'arrêt $\tilde{T}$ vérifiant :

$$\mathbf{E}\,[G_{\tilde{T}}] = \bigvee_{T \in \mathcal{C}} \mathbf{E}\,[G_T].$$

Cette construction est fournie par le théorème suivant :

Théorème 2 :

Définissons, par ***récurrence descendante****, la suite* $(\gamma_n)_{n \in [N]}$ *de la manière suivante :*

$$\begin{cases} \gamma_N = G_N \\ \gamma_n = G_n \ \mathbf{V}\ \mathbf{E}[\gamma_{n+1} / \mathcal{F}_n] \ ; n \in [N-1] \end{cases}$$

En posant :

$$\widetilde{T}_n = \text{premier instant } i \geqslant n \text{ tel que } G_i = \gamma_i \text{ ,}$$

Nous avons :

1. $\mathbf{E}[G_T / \mathcal{F}_n] \leqslant \gamma_n$ pour tout $T \in \mathcal{C}_n$
2. $\mathbf{E}[G_{\widetilde{T}_n} / \mathcal{F}_n] = \gamma_n$
3. $\gamma_n = \underset{T \in \mathcal{C}_n}{\mathbf{V}} \mathbf{E}[G_T / \mathcal{F}_n]$
4. $\mathbf{E}[G_{\widetilde{T}_n}] = \mathbf{E}[\gamma_n] = \underset{T \in \mathcal{C}_n}{\mathbf{V}} \mathbf{E}[G_T]$
5. $(\gamma_n)_{n \in [N]}$ est la plus petite sur-martingale majorant la suite $(G_n)_{n \in [N]}$
6. Si $\widetilde{T}'$ est un autre temps d'arrêt optimal alors :

$$\widetilde{T} \leqslant \widetilde{T}'.$$

∎

(Nous avons aussi écrit $\widetilde{T}$ à la place de $\widetilde{T}_1$).

Dans le cas où nous avons :

$$\text{(i) } \mathbf{E}[\gamma_{n+1} / \mathcal{F}_n] = \text{constante} = \mathbf{E}[\gamma_{n+1}] \ ; n \in [N-1] \text{ ,}$$

le théorème précédent se simplifie. En effet, en posant

$$d_n = \begin{cases} \mathbf{E}[\gamma_{n+1}] & \text{pour } n \in [N-1] \\ 0 & \text{pour } n = N \end{cases}$$

nous avons :

$$\widetilde{T} = \text{premier instant } n \text{ où } d_n \leqslant G_n \text{ .}$$

Remarque :

Des conditions suffisantes (mais non nécessaires) pour avoir la relation (i) sont :

$$\begin{cases} X_1, \ldots, X_n, \ldots, X_N \text{ variables aléatoires indépendantes} \\ G_n(X_1, \ldots, X_n) = G_n(X_n) \text{ .} \end{cases}$$

Ce cas est appelé *cas indépendant* dans la littérature (cf. [2]).

Supposons l'hypothèse (i) et supposons de plus que le processus X soit à valeurs dans un espace d'états E avec :

$$\begin{cases} E = E_1 + E_0 \\ G_n(X_1, \ldots, X_n) = G_n(X_n) = \begin{cases} g(n) & \text{si } X_n \in E_1 \\ 0 & \text{si } X_n \in E_0 \end{cases} \end{cases}$$

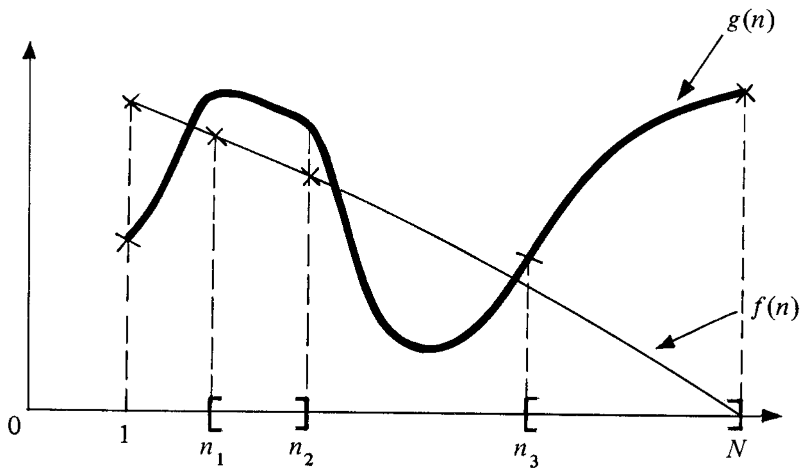
où g est une fonction de $[N]$ dans $\mathbf{R}_+^*$.

Il est, dans ce cas particulier, facile de visualiser $\widetilde{T}$. Pour cela, considérons le graphe des deux fonctions suivantes :

$$\begin{cases} f : [N] \longrightarrow \mathbf{R}_+^* \\ \quad n \longmapsto f(n) = d_n \\ g : [N] \longrightarrow R_+^* \\ \quad n \longmapsto g(n) \end{cases}$$

(Nous savons que la fonction f est décroissante car, d'après le théorème 2, nous avons :

$$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n \geqslant \ldots \geqslant d_N = 0).$$



Le temps d'arrêt $\widetilde{T}$ est donné par les "îlots d'arrêt" $[n_1\ , n_2]$ et $[n_3\ , N]$ selon la terminologie de Presman et Sonin (cf. [7]). C'est-à-dire :

$$\widetilde{T} = \begin{cases} \text{non arrêt entre } 1 \text{ et } n_1 - 1 \text{ quel que soit } X_n \\ \text{arrêt entre } n_1 \text{ et } n_2 \text{ si } X_n \in E_1 \\ \text{non arrêt entre } n_2 + 1 \text{ et } n_3 - 1 \text{ quel que soit } X_n \\ \text{arrêt entre } n_3 \text{ et } N - 1 \text{ si } X_n \in E_1 \\ \text{arrêt en } N \text{ quel que soit } X_N\ . \end{cases}$$

Remarques :

1. Le théorème d'exhaustivité que nous allons établir ci-dessous nous justifiera $\widetilde{T}$ en montrant que l'on ne peut s'arrêter, pour le temps d'arrêt optimal, que si l'on est dans E_1.

2. Nous avons un seul îlot d'arrêt $[n_1\ , N]$ dans le cas où la fonction g coupe au plus une fois la fonction f. Une condition suffisante pour avoir un seul îlot d'arrêt est la croissance de la fonction g, ce qui se produit dans le problème classique de la secrétaire car nous avons, dans ce cas, $g(n) = n/N$. Dans ce cas particulier où g est toujours au-dessus de f, nous avons l'îlôt d'arrêt $[1, N]$ et dans l'autre cas particulier où g est toujours en dessous de f, nous avons l'îlot d'arrêt formé du seul point N.

Regardons ce que donne le théorème 2 dans le cas où la suite des gains $(G_n)_{n \in [N]}$ est une martingale.

Proposition 1

Il y a équivalence entre :

1. La suite $(G_n)_{n \in [N]}$ est une martingale.

2. Pour tout $T \in \mathcal{C}$, $\mathbf{E}\ [G_T]$ est une constante.

Ainsi, pour une suite de gains qui est une martingale nous avons :

– tout temps d'arrêt est optimal ;

– le temps d'arrêt optimal $\widetilde{T}$ (celui qui s'arrête le plus vite parmi les temps d'arrêt optimaux) est donné par :

$$\widetilde{T} \equiv 1.$$

Remarque :

D'après le théorème 2, la condition de sur-martingalité suffit pour entraîner que T soit identiquement égal à 1.

Précisons ce que devient le théorème 2 dans le cas markovien.

Définition du "cas markovien"

Nous dirons que nous sommes dans le cas markovien si nous avons les hypothèses suivantes :

1. Le processus $Y = (Y_n)_{n \in N}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans un espace E auquel on adjoint un cimetière Δ.

2. Pour tout n on définit une transition sous-markovienne π_n telle que

$$P_x \, [Y_{n+1} \in . \, / \, Y_n] = \pi_n \, (Y_n \, , .) \, .$$

Soit g_n une suite de v.a. sur E, on pose $g_n(\Delta) = 0$, $\zeta = \inf\{n \, ; y_n = \Delta\}$. Nous avons alors :

Théorème 3

Soit γ_n la solution de l'équation

$$\gamma_n = \operatorname{Sup}(g_n \, , \pi_n \, \gamma_{n+1}).$$

Alors

a) $$\gamma_n = \operatorname*{Ess\,sup}_{n \leq T < \infty} \mathbf{E}\,[g_T(y_T) / \mathcal{F}_n].$$

b) *Pour un problème d'horizon N* ($g_n = 0$ si $n > N$)

on a $$\gamma_n = \sup(g_n, \pi_n \, \gamma_{n+1})$$

avec $$\gamma_{N+1} = 0.$$

Soit $$\widetilde{T} = \inf\{n \, ; n \geq 1, \gamma_n(y_n) = g_n(y_n)\}.$$

c) *Dans le cas stationnaire où π et g sont indépendants de n et toujours* $g_n = 0 \quad \forall n > N$,

notons $$\gamma_n = \lambda_{N-n+1} \, .$$

Si n tend vers l'∞, $\lim \uparrow \lambda_n = \lambda$

et $$\lambda = \sup\,[g, \pi\lambda]$$

et $$\widetilde{T} = \inf\{n\ ;\ n \geqslant 1,\ \ \lambda(y_n) = g(y_n)\}. \qquad \blacksquare$$

Donnons, pour terminer, un théorème d'exhaustivité que nous utiliserons par la suite. Revenons à la situation générale et supposons que notre processus observation X soit à valeurs dans un espace d'états E avec :

$$\begin{cases} E = E_0 + E_1 \\ G_n(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n \in E_0 \\ > 0 & \text{si } X_n \in E_1 \end{cases} \quad ; \quad n \in [N]. \end{cases}$$

A partir du processus X, construisons le processus $Y = (Y_k)_{k \in [N]}$ correspondant aux temps d'entrée successifs dans E_1. (Pour sa définition, cf. I). Nous allons appeler $\mathcal{C}(X)$ l'ensemble des temps d'arrêt adaptés au processus X et $\mathcal{C}(Y)$ le sous-ensemble de ceux qui sont adaptés au processus Y.

Nous avons alors :

Théorème 4

$$\bigvee_{T \in \mathcal{C}(X)} \mathbf{E}[G_T] = \bigvee_{\nu \in \mathcal{C}(Y)} \mathbf{E}[G_{Y_\nu}]. \qquad \blacksquare$$

En effet, pour tout $T \in \mathcal{C}(X)$, posons : $\nu = \infty$ pour $[G_T < 0]$, et $T = Y_\nu$ pour $[G_T > 0]$; alors ν est dans $\mathcal{C}(Y)$ et $\mathbf{E}[G_T] \leqslant \mathbf{E}[G_{Y_\nu}]$.

Donc $$\sup_{\nu \in \mathcal{C}(Y)} \mathbf{E}[G_{Y_\nu}] \geqslant \sup_{T \in \mathcal{C}(X)} \mathbf{E}[G_T].$$

L'inégalité contraire est évidente.

IV – RAPPELS SUR LA THEORIE DES JEUX

Nous allons fixer les notations et rappeler quelques résultats essentiels sur la théorie des jeux (cf. [1] ou [3]).

Définition

Un duel entre deux joueurs 1 et 3 est la donnée de :

$$\begin{cases} S_1 = \text{espace des stratégies (pures) du joueur 1} \\ S_2 = \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 2 \\ G : S_1 \times S_2 \to \mathbf{R}, \text{ la fonction de gain (perte pour le joueur 1,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{gain pour le joueur 2).} \end{cases}$$

Nous noterons :

- s_1 = l'espace des stratégies mixtes du joueur 1 (c'est-à-dire les distributions de probabilité sur S_1).
- s_2 = l'espace des stratégies mixtes du joueur 2 (c'est-à-dire les distributions de probabilité sur S_2).

La fonction de gain s'étend naturellement à $s_1 \times s_2$:

- $G_1(\mu) = \bigvee_{\nu \in s_2} G(\mu, \nu) \; ; \mu \in s_1$,
- $G_2(\nu) = \bigwedge_{\mu \in s_1} G(\mu, \nu) \; ; \nu \in s_2$.

Définitions

- *Le jeu est dit avoir une valeur* ϑ si on a :

$$\bigwedge_{\mu \in s_1} \bigvee_{\nu \in s_2} G(\mu, \nu) = \bigvee_{\nu \in s_2} \bigwedge_{\mu \in s_1} G(\mu, \nu) = \vartheta.$$

- $\hat{\mu}$ est *une stratégie égalisante pour le joueur 1* si on a :

$$G(\hat{\mu}, \nu) \text{ indépendant de } \nu \in s_2.$$

- $\hat{\nu}$ est *une stratégie égalisante pour le joueur 2* si on a :

$$G(\mu, \hat{\nu}) \text{ indépendant de } \mu \in s_1.$$

Il est montré dans [3] l'intérêt des stratégies égalisantes pour la recherche des stratégies minimax et maximin.

Le théorème fondamental de la théorie des duels est :

Théorème 5

1. *Tout duel a une valeur.*
2. *Le joueur 1 a une stratégie minimax.*
3. *Le joueur 2 a une stratégie maximin.* ∎

(Rappelons que S_1 et S_2 sont des ensembles finis).

Donnons pour terminer un résultat technique (pour la démonstration cf. [1]).

Proposition 2

1. $$\bigvee_{\nu \in s_2} \bigwedge_{\mu \in s_1} G(\mu, \nu) = \bigvee_{\nu \in s_2} \bigwedge_{u \in S_1} G(u, \nu).$$

2. $$\bigwedge_{\mu \in s_1} \bigvee_{\nu \in s_2} G(\mu, \nu) = \bigwedge_{\mu \in s_1} \bigvee_{w \in S_2} G(\mu, w).$$

DEUXIEME PARTIE : PROBLEMES DE LA SECRETAIRE

I – PROBLEMES DE LA SECRETAIRE ET STATISTIQUE INFERENTIELLE

Nous allons considérer deux modèles différents (le deuxième apparaît comme un cas particulier du premier) construits à partir de deux notions différentes d'expériences statistiques. Ces modèles nous conduisent à deux sortes de généralisations différentes du problème classique de la secrétaire. Nous résolvons, dans ce chapitre, le problème de la secrétaire correspondant au deuxième modèle sans aborder la résolution du problème de la secrétaire correspondant au premier modèle.

Dans le chapitre II, nous traiterons du jeu associé au premier modèle et dans le chapitre III du jeu associé au deuxième modèle.

I.1 – Premier modèle

Considérons l'expérience statistique bayesienne suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \Theta = G[N] \\ \bullet\ \Omega = G[N] \\ \bullet\ \mathbf{P}\ :\ \theta \mapsto \delta_\theta = \text{mesure de Dirac en } \theta \\ \bullet\ X = (X_n)_{n \in [N]} = \text{processus des rangs relatifs} \\ \bullet\ \mu\ :\ \text{mesure sur } \Theta. \end{array}\right.$$

Notations :

– μ_0 : mesure uniforme sur Θ ; $\mu_0(\theta) = 1/N\,!$ pour tout $\theta \in \Theta$.

– $\mu^{(n)}$: loi de probabilité de $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ quand Ω est muni de la mesure P_μ.

– $\mu_{(n)}$: loi de probabilité de X_n quand Ω est muni de la mesure P_μ.

Pour la transition considérée, nous avons $P_\mu = \mu$.

Remarque :

Des modèles statistiques de ce type ont connu un très grand développement à partir de 1960 dans les problèmes connus sous le nom de *Survey-Sampling* (cf. [5]).

A cette expérience, nous associons la généralisation du problème de la secrétaire construite avec la suite de gains suivante :

$$G_n^\mu(X_1, \ldots, X_n) = P_\mu\,[W_n = 1/X_1, \ldots, X_n]\ ;\ n \in [N].$$

Remarque :

Ainsi, le problème de la secrétaire se présente comme un problème de décision séquentielle particulier. En effet, dans un problème classique de décision séquentielle, la stratégie du statisticien (cf. [3]) est composée de deux parties :

– un temps d'arrêt ;
– une décision terminale.

Dans le problème de la secrétaire, la partie décision terminale disparaît et il ne reste que le temps d'arrêt. En effet, la décision terminale nous est imposée car si on s'arrête à l'étape n on doit choisir la $n^{\text{ième}}$ candidate.

I.2 Deuxième modèle

Considérons l'expérience statistique bayesienne "avec bruit" suivante : [cf. II,1ère partie]

- $\Gamma = [N]$ = espace des bruits
- $\Omega' = G[N]$
- $P' = \mu_0$ = mesure uniforme sur Ω'
- $\Omega = G[N]$
- $F : \Omega' \times \Gamma \longmapsto \Omega \; ; \; (\omega', \gamma) \mapsto \omega'_\gamma$ où :

si i est tel que $\omega'(i) = 1$ alors :

$$\omega'_\gamma(j) = \begin{cases} \omega'(j) & \text{pour } j \neq i \text{ et } j \neq \gamma \\ 1 & \text{pour } j = \gamma \\ \omega'(\gamma) & \text{pour } j = i \end{cases}$$

- $X = (X_n)_{n \in [N]}$ processus des rangs relatifs.
- ν : mesure sur Γ.

A cette deuxième expérience, nous associons la deuxième généralisation du problème de la secrétaire construite avec la suite de gains suivante :

$$G_n^\nu(X_1, \ldots, X_n) = P_\nu\,[W_n = 1/X_1, \ldots, X_n]\,;\, n \in [N]$$

I.2.1. Le deuxième modèle comme cas particulier du premier

Montrons que le deuxième modèle n'est qu'un cas particulier du premier modèle. Pour cela, calculons la transition Q de Γ dans $G[N]$ associée au deuxième modèle. Nous obtenons facilement le résultat suivant :

Proposition 3

1. $$Q_\gamma(\omega) = \frac{1}{(N-1)!}\,\delta_{(\omega^{-1}(1),\gamma)} \;;\gamma \in \Gamma \;; \omega \in G[N].$$

2. $$Q_\nu(\omega) = \frac{1}{(N-1)!}\,\nu(\omega^{-1}(1)) \;;\; \nu \text{ mesure sur } \Gamma \;; \omega \in G[N].$$

Ainsi :

Proposition 4

Le deuxième modèle correspond au premier à condition de prendre des mesures μ sur Θ vérifiant la propriété suivante :

(ii) μ est constante sur les A_n ; $n \in [N]$,

c'est-à-dire : ω_1 et $\omega_2 \in A_n \Rightarrow \mu(\omega_1) = \mu(\omega_2)$.

Remarques :

1. La mesure uniforme μ_0 qui, comme nous allons le voir, correspond au problème classique de la secrétaire, vérifie bien sûr la condition (ii). Elle correspond à la mesure uniforme ν_0 sur Γ.

2. Dans le cas particulier où $x_n = 1$, nous avons $z_n = n$, ainsi :

$$\nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n = 1) = \frac{1}{n!}\nu\{n+1, \ldots, N\} + \frac{1}{(n-1)!}\nu\{n\};\ n \in [N] .$$

3. Dans le cas où ν est la mesure uniforme sur $[N]$, c'est-à-dire, d'après la proposition 4, où $\mu = \mu_0$, nous avons :

$$\nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} .$$

Ainsi, pour la distribution uniforme μ_0, nous trouvons que les variables aléatoires $(X_n)_{n\in[N]}$ sont indépendantes, la loi de X_n étant la mesure uniforme sur $[n]$. Ceci correspond bien au cas du problème classique de la secrétaire.

Nous devons calculer maintenant la suite des gains $(G_n)_{n\in[N]}$ où :

$$G_n^\nu(X_1, \ldots, X_n) = P_\nu[W_n = 1/X_1, \ldots, X_n];\ n \in [N] .$$

Nous obtenons par un calcul facile :

Proposition 5

$$G_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{\nu\{n\}}{\frac{1}{n}\nu\{n+1, \ldots, N\} + \nu\{n\}} I_{[X_n=1]};\ n \in [N] .$$

I.2.2 – Le problème de la secrétaire correspondant au deuxième modèle

Résolvons maintenant le problème de la secrétaire correspondant au deuxième modèle. Comme nous avons :

$$[X_n \neq 1] \Rightarrow [G_n = 0] \;\; ; n \in [N],$$

nous pouvons résoudre ce problème, soit en utilisant le processus X, soit en utilisant le processus Y correspondant aux temps d'entrée dans $\{1\}$, (cf. théorème 4).

A) Utilisation du processus X

Rappelons qu'à $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ nous avons associé (cf. première partie) $\underline{Z}_n = Z_n(X^{(n)})$ où Z_n est la position de la meilleure relative :

$$Z_n(X^{(n)}) = n\, I_{[X_n=1]} + Z_{n-1}(X^{(n-1)})\, I_{[X_n \neq 1]}.$$

Nous avons alors pour la loi $\nu^{(n)}$ de $(X_1, \ldots, X_n)$:

Proposition 6

$$\nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n\,!}\, \nu\{n+1, \ldots, N\} + \frac{1}{(n-1)\,!}\, \nu\{z_n(x^{(n)})\} \; ; n \in [N].$$

Démonstration

En utilisant les lemmes combinatoires donnés dans la première partie et la proposition 3, il est facile de montrer que, quand $\Omega = G[N]$ est muni de la loi Q_γ $(\gamma \in \Gamma)$, la loi $\nu^{(n)}$ de $(X_1, \ldots, X_n)$ est donnée par :

$$\nu^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n\,!} & \text{si } n < \gamma \\[2ex] \dfrac{1}{(n-1)\,!}\, I_{[x_n=1]} & \text{si } n = \gamma \\[2ex] \dfrac{1}{(n-1)\,!}\, I_{[z_n=\gamma]} & \text{si } 1 < \gamma < n. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant calculer le temps d'arrêt optimal $\widetilde{T}^{\nu}$ en appliquant le théorème 2. Pour cela il nous faut calculer la sur-martingale $(\gamma_n^{\nu})_{n \in [N]}$. La loi compliquée des X_n rend pénible le calcul des espérances conditionnelles $\mathbf{E}_{\nu}[\gamma_{n+1}^{\nu}/X_1, \ldots, X_n]$. Nous donnons le résultat sans reproduire les calculs qui sont longs mais non difficiles.

Théorème 6

En posant : $$d_n^{\nu} = \mathbf{E}[\gamma_{n+1}] \;;\; n = 0, \ldots, N-1,$$

nous avons :

1. La suite $(d_n^{\nu})_{n=0,\ldots,N-1}$ est donnée par l'équation de récurrence descendante suivante :

$$\begin{cases} d_{N-1}^{\nu} = \nu\{N\} \\ d_{n-1}^{\nu} = \left[\nu\{n\} \vee \dfrac{d_n^{\nu}}{n}\right] + \dfrac{n-1}{n} d_n^{\nu} \;;\; n = 0, \ldots, N-2. \end{cases}$$

2. Le temps d'arrêt optimal $\widetilde{T}$ est donné par :

$$\widetilde{T} = \begin{cases} \text{arrêt en } n \text{ si } n \,.\, \nu\{n\} \geqslant d_n^{\nu} \text{ et } X_n = 1 \\ \text{non arrêt si } n \,.\, \nu\{n\} < d_n^{\nu} \end{cases}$$

pour $n = 1, \ldots, N-1$.

3. La probabilité maximum de gagner est :

$$\bigvee_{T \in \mathfrak{T}} \mathbf{E}[G_T^{\nu}] = \mathbf{E}[G_{\widetilde{T}^{\nu}}^{\nu}] = d_0^{\nu}.$$

Démonstration

Nous donnons seulement l'expression des espérances conditionnelles qui conduisent au théorème. Pour $n \in [N-1]$, nous avons :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\nu}[\gamma_{n+1}^{\nu}/X_1, \ldots, X_n = 1] = \dfrac{d_n^{\nu}/n}{\dfrac{1}{n}\nu\{n+1, \ldots, N\} + \nu\{n\}} \\ \mathbf{E}_{\nu}[\gamma_{n+1}^{\nu}/X_1, \ldots, X_n \neq 1] = \dfrac{d_n^{\nu}}{n} \,.\, \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{1}{\nu\{i\} + \dfrac{1}{n}\nu\{n+1, \ldots, N\}} \end{cases}$$

Remarque :

Malgré la loi compliquée des X_n, nous avons retrouvé les conclusions du cas indépendant (cf. (i) première partie). Le temps d'arrêt optimal $\widetilde{T}^\nu$ est fourni simplement par la comparaison des deux fonctions f et g où :

$$\begin{cases} f(n) = d_n \\ g(n) = n \cdot \nu\{n\} \end{cases} \quad ; \quad n \in [N-1].$$

Cela s'explique de la manière suivante : nous savons que le processus X ne nous intéresse qu'aux instants n où $X_n = 1$. Or nous allons voir plus loin que le processus Y associé aux temps d'entrée du processus X dans $\{1\}$ est une chaîne de Markov homogène pour toute mesure ν.

Précisons la structure du temps d'arrêt optimal $\widetilde{T}^\nu$ en calculant la suite $(d_n^\nu)_{n=0,\ldots,N-1}$. Supposons que la mesure ν fournisse k îlots d'arrêt $(A_i)_{i=1,\ldots,k}$ avec :

$$\begin{cases} A_i = [\alpha_i, \beta_i] \ ; \ i = 1, \ldots, k \\ 1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 < \alpha_2 \leqslant \beta_2 < \ldots < \alpha_k \leqslant \beta_k = N. \end{cases}$$

Nous avons donc, par définition des îlots d'arrêt :

$$\begin{cases} n \in A_i \Rightarrow \dfrac{d_n^\nu}{n} \vee \nu\{n\} = \nu\{n\} \\ n \notin \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \Rightarrow \dfrac{d_n^\nu}{n} \vee \nu\{n\} = \dfrac{d_n^\nu}{n} \end{cases}$$

Théorème 7

1.

$$\bigvee_{T \in \mathcal{T}} \mathrm{E}_\nu[G_T] = \begin{cases} \nu\{1\} & \text{pour } \alpha_1 = 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{(\alpha_1 - 1)\ldots(\alpha_i - 1)}{\beta_1 \ldots (\beta_{i-1})} \left[\sum_{n \in A_i} \frac{\nu\{n\}}{n-1} \right] & \text{pour } \alpha_1 \neq 1 \end{cases}$$

2. *La suite* (d_n^ν) *vérifie, pour* $\alpha_1 \neq 1$,

$$\begin{cases} \text{pour } \alpha_i - 1 \leqslant n \leqslant \beta_i - 1 : d_n^\nu = n\left[\dfrac{\nu\{n+1\}}{n} + \dots + \dfrac{\nu\{\beta_i\}}{\beta_i - 1} + \dfrac{d_{\beta_i}^\nu}{\beta_i}\right] \\ \text{pour } \beta_i \leqslant n \leqslant \alpha_{i+1} - 1 \ ; \ d_n^\nu = d_{\beta_i}^\nu = d_{\alpha_{i+1}-1}^\nu \end{cases}$$

Démonstration

1. Pour $\alpha_1 = 1$, on a $\widetilde{T}(\nu) \equiv 1$ et :

$$\bigvee_T \mathbf{E}_\nu[G_T^\nu] = \mathbf{E}_\nu[G_1^\nu] = \nu\{1\}.$$

2. Pour $\alpha_1 \neq 1$, on a :

$$\mathbf{E}_\nu[G_{\widetilde{T}}^\nu] = \sum_{i=1} \{ \sum_{n \in A_i}^{k} \mathbf{E}_\nu[G_n \, . \, [\widetilde{T}^\nu = n]]\}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{n \in A_i} \frac{\nu\{n\}}{\frac{1}{n}\nu\{n+1, \dots, N\} + \nu\{n\}} P_\nu[\widetilde{T}^\nu = n] \right\}.$$

Or, pour n $\in A_i$ nous avons :

$$P_\nu[\widetilde{T}^\nu = n] = P_\nu[X_n = 1 \ ; X_i \neq 1 \ ; i < n \ ; i \in A_j \ ; j \leqslant i]$$

$$= \frac{(\alpha_1 - 1)\dots(\alpha_i - 1)}{\beta_1 \dots (\beta_{i-1}) . (n-1)}\left[\frac{1}{n}\nu\{n+1, \dots, N\} + \nu\{n\}\right].$$

2. Nous obtenons cette forme des d_n^ν en utilisant l'équation de récurrence et la définition des îlots.

Nous pouvons préciser ce théorème dans le cas des mesures conduisant à un seul îlot d'arrêt $[\alpha_1, N]$.

Corollaire

1. Une condition nécessaire et suffisante pour que la mesure ν conduise à un seul îlot d'arrêt $[\alpha_1, N]$ est qu'il existe $\alpha_1 \in [N]$ vérifiant :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } n \geqslant \alpha_1, \nu\{n\} \geqslant \dfrac{\nu\{n+1\}}{n} + \dots + \dfrac{\nu\{N\}}{N-1} \\ \text{Pour tout } n < \alpha_1, \nu\{n\} < \dfrac{\alpha_1 - 1}{n}\left[\dfrac{\nu\{\alpha_1\}}{\alpha_1 - 1} + \dots + \dfrac{\nu\{N\}}{N-1}\right] \end{cases}$$

Dans ce cas, nous avons :

2. Pour $\alpha_1 \neq 1$:

$$\begin{cases} \text{si } n \geqslant \alpha_1 - 1 \,, d_n^\nu = n \left[\dfrac{\nu\{n+1\}}{n} + \ldots + \dfrac{\nu\{N\}}{N-1} \right] \\ \text{si } n < \alpha_1 - 1 \,, d_n^\nu = d_{\alpha_1}^\nu = d_0^\nu = (\alpha_1 - 1) \left[\dfrac{\nu\{\alpha_1\}}{\alpha_1 - 1} + \ldots + \dfrac{\nu\{N\}}{N-1} \right]. \end{cases}$$

3. Pour $\alpha_1 = 1$;

$$\begin{cases} \text{si } n \geqslant 1 \,, d_n^\nu = n \left[\dfrac{\nu\{n+1\}}{n} + \ldots + \dfrac{\nu\{N\}}{N-1} \right] \\ \text{si } n = 0, d_0^\nu = \nu\{1\}. \end{cases}$$

Remarque :

Dans le cas de la mesure uniforme, nous retrouvons bien les résultats classiques :

- un seul îlot $[\alpha_1, \ldots, N]$ où α_1 est le premier entier vérifiant :

$$\frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{N-1} \leqslant 1 \,,$$

- la probabilité maximum de gagner est :

$$\frac{\alpha_1 - 1}{N} \left[\frac{1}{\alpha_1 - 1} + \ldots + \frac{1}{N-1} \right].$$

Considérons le processus $Y = (Y_k)$ associé aux temps d'entrée successifs du processus X dans le sous-ensemble $\{1\}$. Y est un processus à espace d'états $E \cup \infty$ où $E = [N]$. La loi du processus est donnée par :

Théorème 8

Si $\Omega = G[N]$ est muni de la mesure Q_ν (cf. proposition 2), Y est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $[N] \cup \infty$ dont le noyau π est donné par :

$$\pi(k,\rho)=\begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant \rho \leqslant k \leqslant N \\ \dfrac{\dfrac{1}{\rho-1}\left(\dfrac{1}{\rho}\nu\{\rho+1,\ldots,N\}+\nu\{\rho\}\right)}{\dfrac{1}{k}\nu\{k+1,\ldots,N\}+\nu\{k\}} & \text{si } 1 \leqslant k < \rho \leqslant N \\ \dfrac{\nu\{k\}}{\dfrac{1}{k}\nu\{k+1,\ldots,N\}+\nu\{k\}} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant N\ ;\ \rho=\infty \\ \pi(\infty,\infty)=1\,. \end{cases}$$

■

Démonstration

Ce théorème se déduit de la définition du processus Y et de la proposition 5.

Calculons maintenant la suite des gains pour ce processus. Nous avons :

$$G_k^\nu(Y_1,\ldots,Y_k)=P_\nu[W_{Y_k}=1/Y_1,\ldots Y_k]\ ;k\in[N]\,.$$

Proposition 7

$$G_k^\nu(Y_1,\ldots,Y_k)=\begin{cases} 0 & \text{si } Y_k=\infty \\ \dfrac{\nu\{Y_k\}}{\dfrac{1}{Y_k}\nu\{Y_k+1,\ldots,N\}+\nu\{Y_k\}} & \text{si } Y_k\neq\infty \end{cases}$$

Démonstration

Si $Y_k \neq \infty$, alors nous avons :

$$W_{Y_k}=1 \Leftrightarrow Y_{k+1}=\infty$$

Ainsi :

$$G(Y_1,\ldots,Y_n)=g(Y_n)=\pi(Y_n,\infty)$$

$$g(y)=\frac{\nu(y)}{\dfrac{1}{y}\nu\{y+1,\ldots,N\}+\nu(y)}\quad \text{si } y\in[N] \text{ et } g(\infty)=0$$

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème 3. Ici, les problèmes d'arrêt optimal et d'horizon N coïncident : il existe un temps d'arrêt optimal. Nous avons $\lambda = \sup(g, \pi\lambda)$ et $\widetilde{T} = \inf\{Y_n ; g(Y_n) = \lambda(Y_n)\}$.

II – PREMIER JEU DE LA SECRETAIRE

Au premier modèle introduit dans le chapitre précédent nous allons associer le jeu suivant.

Définition du 1er jeu de la secrétaire

- *Le joueur 1 est la nature avec comme espace des stratégies pures :*

$$S_1 = \Theta = G[N].$$

- *Le joueur 2 est l'employeur avec comme espace des stratégies pures :*

$S_2 = \mathscr{C}$ = ensemble des temps d'arrêt compris entre 1 et N et adaptés au processus X.

- *La fonction de gain est définie par :*

$$\begin{cases} G[\theta, T] = \mathbf{E}_\theta\,[G_T^\theta] \\ \text{où} \\ G_n^\theta(X_1, \ldots, X_n) = P_\theta\,[W_n = 1/X_1, \ldots X_n]\,; n \in [N]\,. \end{cases}$$

Nous savons, d'après le théorème 5, que ce jeu admet une valeur, que la nature a une stratégie minimax et l'employeur une stratégie maximin. Nous allons calculer ces trois objets.

Proposition 8

Soit $\hat{\nu} \in s_2$ la distribution uniforme sur les temps d'arrêt constants. Alors $\hat{\nu}$ est une stratégie égalisante *pour le deuxième joueur et nous avons :*

$$G(\mu, \hat{\nu}) = \frac{1}{N}, \text{ pour tout } \mu \in s_1\,.$$

Démonstration

Soit T le temps d'arrêt constant $T = n$, alors

$$G(\mu, T) = \mathbf{E}_{\mu}[G_T] = \mathbf{E}_{\mu}[G_n] = \mu(A_n).$$

Soit $\hat{\nu}$ la distribution uniforme sur $[N]$, alors :

$$G(\mu, \hat{\nu}) = \mathbf{E}_{\hat{\nu}}[G(\mu, T)] = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \frac{1}{N}.$$

Donc $\hat{\nu}$ est une stratégie égalisante pour le deuxième joueur.

Proposition 9

Soit $\hat{\mu}$ une stratégie égalisante pour le premier joueur, alors

$$\operatorname*{Sup}_{T} G(\hat{\mu}, T) = \frac{1}{N}.$$

En effet,

$$G(\hat{\mu}, T) = \mathbf{E}[G_T] = \text{cste} = \mathbf{E}[G_1] = \frac{1}{N} = \hat{\mu}[A_1] = \hat{\mu}[A_2] = \hat{\mu}[A_n].$$

Ainsi, si $\hat{\mu}$ est une stratégie égalisante pour le premier joueur et si $\hat{\nu}$ est une stratégie égalisante pour le deuxième joueur, nous avons

$$\operatorname*{Sup}_{T} G(\hat{\mu}, T) = \inf_{\mu} G(\mu, \hat{\nu}) = \frac{1}{N}.$$

Il ne nous reste qu'à construire la stratégie (ou les stratégies) égalisante $\hat{\mu}$. Nous avons vu dans la proposition 1 qu'il y a équivalence entre $\hat{\mu}$, stratégie égalisante, et la suite $(G_n^{\hat{\mu}})_{n \in [N]}$, martingale. Caractérisons les mesures $\hat{\mu}$ qui conduisent à une martingale.

Définissons le sous-ensemble M de s_1 comme l'ensemble des mesures μ vérifiant les deux conditions suivantes :

α) $\mu[A_1] = \ldots = \mu[A_N] = \dfrac{1}{N}$.

β) μ ne charge que les permutations $\omega = (\omega(1), \ldots, \omega(N))$ vérifiant :

$$\omega(1) > \omega(2) > \ldots > \omega(n_0) = 1,$$

c'est-à-dire, dans l'espace $\hat{G}[N]$, les permutations $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant :

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n_0} = 1 \ , \ x_n \neq 1 \text{ pour } n > n_0.$$

Remarque :

La mesure μ qui charge uniformément les N permutations cycliques de la permutation $\omega = (N, N-1, \ldots, 1)$ est un élément de M. Mais il y en a beaucoup d'autres.

Proposition 10

Il y a équivalence entre :

1. $(G_n^{\mu})_{n \in [N]}$ *est une martingale.*

2. $\mu \in M$.

Démonstration :

(1) $\Rightarrow$ (2).

La condition de martingalité s'écrit :

Pour tout $1 \leqslant n \leqslant m \leqslant N$,

(iii) $\mu[W_m = 1, X_1, \ldots, X_n] = \mu[W_n = 1, X_1, \ldots, X_n]$.

Si $X_n \neq 1$, le terme de gauche de (iii) est nul, donc nous avons pour $m \geqslant n$:

$$\mu[W_m = 1, X_1, .., X_n \neq 1] = 0,$$

ce qui entraîne que μ vérifie la condition β) de la définition de M. En prenant $n = 1$ dans (iii) nous obtenons :

$$\mu[W_m = 1, X_1 = 1] = \mu[W_m = 1] = \mu[A_m] = \mu[A_1] \text{ pour tout } m \in [N],$$

c'est-à-dire la condition α) de la définition de M.

(2) $\Rightarrow$ (1).

Il nous faut donc vérifier la condition (iii). Celle-ci est vérifiée dès que un des $X_i \neq 1$ car les deux termes sont nuls d'après β). Il nous reste donc à montrer que :

$$\mu[W_m = 1, X_1 = 1, \ldots, X_n = 1] = \mu[W_n = 1, X_1 = 1, \ldots, X_n = 1]$$

et ceci est entraîné par α) et β).

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant :

Théorème 9

Pour le jeu considéré nous avons :

1) La valeur du jeu est $\frac{1}{N}$ *;*

2) Toute mesure $\mu \in M$ *est une stratégie minimax de la nature ;*

3) $\hat{\nu}$ *mesure uniforme sur les temps d'arrêt constants est une stratégie maximin de l'employeur.*

Remarque :

Nous retrouvons bien la solution de Gilbert et Mosteller (cf. [4]) c'est-à-dire la mesure uniforme sur les N permutations cycliques de la permutation $\omega = (N, \ldots, 1)$. Mais nous en obtenons beaucoup d'autres. (Par exemple, pour $N = 3$, toutes les mesures μ telles que :

$$\mu(1,2,3) = \mu_1 \,;\, \mu(1,3,2) = \mu_2 \,;\, \mu(2,1,3) = \mu_3 \,;\, \mu(3,1,2) = \mu_4 \,;$$
$$\mu(3,2,1) = \mu_5 \quad \text{avec } \mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4 = \mu_5 = \frac{1}{3}$$

appartiennent à M). Notre résultat est normal car, avant l'apparition de la meilleure, il faut présenter les candidates dans l'ordre décroissant comme le fait une permutation cyclique de $(N, \ldots, 1)$, mais après l'apparition de cette meilleure l'ordre des candidates restantes n'a plus aucune importance.

III – DEUXIEME JEU DE LA SECRETAIRE

Au deuxième modèle introduit dans le chapitre précédent nous allons associer le jeu suivant :

Définition du 2ème jeu de la secrétaire

- *Le joueur 1 est la nature avec comme espace des stratégies pures :*

$$S_1 = \Gamma = [N].$$

- *Le joueur 1 est la nature avec comme espace des stratégies pures :*

$$S_1 = \Gamma = [N].$$

- *Le joueur 2 est l'employeur avec comme espace des stratégies pures :*

$$S_2 = \mathcal{C}.$$

- *La fonction de gain est définie par :*

$$G[\nu, T] = \mathbf{E}_\nu[G_T^\nu].$$

Pour résoudre ce jeu, nous ne pouvons employer la méthode du chapitre précédent. En effet, il est facile de voir, (cf. proposition 1 et définition de M dans la proposition 10), que la suite $(G_n^\nu)_{n\in[N]}$ ne peut être une martingale pour aucune mesure ν sur Γ. Nous allons résoudre ce jeu en utilisant le processus (Y_n).

Théorème 10

1) *La valeur du jeu est*

$$V = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i}}$$

2) *La stratégie minimax de la nature est donnée par*

$$\hat{\nu}(i) = \frac{\hat{\nu}(N)}{i} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, N-1$$

$$\hat{\nu}(N) = V ; \hat{\nu} \in s_1 .$$

3) *La stratégie maximin de l'employeur est donnée par*

$$\hat{\mu}(T_i) = \frac{V}{i-1} \text{ avec } T_i = \inf\{Y_n / Y_n \geqslant i\} \text{ pour } i = 2, \ldots, N$$

$$\hat{\mu}(T_1) = V ; \hat{\mu} \in s_2 .$$

Démonstration

a) Nous avons vu (théorème 7) que pour tout $\nu \in s_1$:

$$G(\nu, T_i) = (i-1)\left[\frac{\nu(i)}{i-1} + \ldots + \frac{\nu(N)}{N-1}\right]$$

$$G(\nu, T_1) = \nu(1)$$

où

$$T_i = \inf \{Y_n / Y_n \geqslant i\}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Soit :

$$\hat{\mu}(T_i) = \frac{V}{i-1} \qquad \text{pour } i = 2, \ldots, N$$

$$\hat{\mu}(T_1) = V$$

une mesure sur les T_i.

Alors $$V \times (1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{N-1}) = 1$$

d'où $$V = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i}}$$

Donc $$G(\nu, \hat{\mu}) = \Sigma\, G(\nu, T_i) \times \hat{\mu}(T_i) = v.$$

b) Déterminons $\hat{\nu}$ telle que $g(Y_n)$ soit une martingale adaptée à $\mathcal{F}_{Y_n}$ pour les $Y_n \leqslant N$.

La condition de martingalité s'écrit :

$$\mathbf{E}\,[g(Y_m)/Y_n] = g(Y_n) \text{ pour tout } Y_n < Y_m \leqslant N.$$

Soit $$(\pi g)\, h = g(h), \forall h \in [N-1]$$

avec $$g(h) = \frac{1}{\frac{1}{h}\nu(h+1, \ldots, N) + \nu(h)}$$

et $$(\pi g)(h) = \frac{1}{\frac{1}{h}\nu\{h+1, \ldots, N\} + \nu(h)} \sum_{\ell=h+1}^{N} \frac{\nu(\ell)}{\ell - 1}.$$

Nous obtenons donc :

$$\hat{\nu}(h) = \sum_{\ell=h+1}^{N} \frac{\hat{\nu}(\ell)}{\ell-1} \text{ pour tout } h \in [N-1].$$

Cette condition est équivalente à :

$$\hat{\nu}(h) = \frac{\hat{\nu}(N)}{h} \quad \text{pour} \quad h \in [N-1] .$$

$$\hat{\nu}(N) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{i}} = V.$$

Remarque

Nous pourrions aussi considérer d'autres jeux en modifiant S_2 ou la fonction de gain par exemple :

– Modification du gain : l'employeur gagne s'il obtient une des s meilleures pour s fixé $\in [N]$.

– Modification de S_2 : l'employeur gagne s'il obtient la meilleure mais avec deux choix. Dans une publication ultérieure sur les problèmes de temps d'arrêt avec plusieurs choix, nous traiterons ce jeu.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BLACKWELL and M.A. GIRSHICH (1954). – "Theory of Games and Statistical Decisions". John Wiley and Son.

[2] Y.S. CHOW, M. ROBBINS and Y. SIEGMUND (1971). – "Great Expectation : The Theory of Optimal Stopping". Houghton-Miflin.

[3] T. FERGUSON (1967). – "Mathematical Statistics : A Decision Theoretic Approach". *Acad. Press.*

[4] J.P. GILBERT and F. MOSTELLER (1966). – "Recognizing the Maximum of a Sequence". *Jour. Amer. Stat. Ass.* 61 – pp. 35-73.

[5] E. GODAMBE (1969). – "Some aspects of the theoretical development in Survey-Sampling". *In* "New Developments in Survey-Sampling". Johnson and Smith. Wiley.

[6] J. NEVEU (1972). "Martingales à temps discret". Masson.

[7] E.L. PRESMAN and J.M. SONIN (1972). – "The Best Choice Problem for a Random Number of Objects". *Theor. Prob.* 17 pp. 657-668.

[8] J.P. RAOULT (1975). – "Structures statistiques". PUF.

[9] A.N. SIRJAEV (1973). – "Statistical Sequential Analysis". *Amer. Math. Soc.*

[10] H. WIMEL (1977). – "Problèmes de temps d'arrêt optimaux – Applications aux Problèmes de la secrétaire". Thèse – Université I – Montpellier.

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Publications scientifiques et littéraires
TYPO - OFFSET
05002 GAP - Téléphone 51 35 23 -

Dépôt légal 164-1980